ОМСКИЙ НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК. СЕРИЯ «ОБЩЕСТВО. ИСТОРИЯ. СОВРЕМЕННОСТЬ» ТОМ 6 № 4 2021

Позиции и А-Позиции

УДК 165.4
DOI: 10.25206/2542-0488-2021-6-4-82-86

В. В. ЦЕЛИЩЕВ
А. В. ХЛЕБАЛИН

Институт философии
и права Сибирского отделения
Российской академии наук,
г. Новосибирск

КОНЦЕПЦИЯ ПОНИМАНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ

В статье анализируется роль концепции понимания в математическом доказательстве. Понимание представляется естественной и необходимой характеристикой доказательства, интерпретируемого как аргумент в пользу устанавливаемого результата. Показано, что в общем виде можно выделить две традиции в трактовке математического доказательства, восходящие к Декарту и Лейбницу. Приводятся аргументы в пользу концептуальной трактовки категории понимания, не связанной с индивидуальными психическими актами. Проблематизируется перспектива достижения концептуального понимания в вычислительной интерпретации математического доказательства.

Ключевые слова: понимание, математическое доказательство, формализация, вычисления, компьютерное доказательство.

Центральным понятием эпистемологии математики выступает понятие доказательства. Набор эпистемологических концепций, характеризующих математическое исследование, неразрывно с ним связан. Именно концепция доказательства является центральной при обсуждении вопросов, связанных с обоснованием математического знания, с понятием математической истины и многими другими математическими проблемами. Основополагающую роль концепция доказательства играет и при характеристике математической деятельности в целом: понимание, объяснение и остальные ее характеристики трактуются в тесной связи с концепцией доказательства.

И в то же время общеизвестно, что концепция доказательства, являясь центральным понятием, на основе которого характеризуется математическая деятельность в самом широком смысле, имеет репутацию неисчерпаемого понятия. Обычно любые обращения к ней в литературе содержат различные оговорки ограничительного характера, оправдывающие предлагаемую интерпретацию этой концепции перед лицом многообразных контрпримеров, легко обнаруживаемых в математической практике. Многие рассуждения об этой концепции, — параграфы статей или даже целые главы книг, — зачастую носят названия «Что такое доказательство?» или «Природа математического доказательства», однако, несмотря на это, складывается впечатление, что ни автор, ни читатель, не воспринимает эти заголовки буквально. Людвиг Витгенштейн любил подчеркивать важность «пестроты» математической практики, фактически лишающей нас надежды поймать и выразить суть концепции доказательства каким-либо определением. Любые попытки создания обобщенной концепции доказательства он считал утопическими и необоснованными, обращая внимание философов на необходимость скрупулезного описания многообразия математической деятельности, одобряя тем самым переход от логико-эпистемологических исследований математического доказательства к исследованиям математических практик или даже к социально-антропологическим исследованиям математического сообщества как подлинному источнику понимания природы доказательства.

Рецепция витгенштейновской идеи о «пестроте» математической практики большой частью философов математики привела к внимательному изучению истории математики и представленного в ней многообразия практик доказательства и аргументации. Очевидная историчность современных канонов доказательства зачастую стала восприниматься как аргумент в пользу их случайности, а значит, — необоснованности их претензий на нормативность. Альтернативой нормативной концепции доказательства становится признание многообразия аргументативных практик в математике на различных этапах ее истории. Однако, на наш взгляд, такая исследовательская стратегия в настоящий момент времени сталкивается не только с философскими возражениями, но и с практическими вызовами со стороны компьютерной математики. Стремительный рост числа результатов, установленных с помощью компьютера, ставит большое количество вопросов именно логико-эпистемологического характера. Хорошо известные возражения против результатов, полученных компьютером, тоже основываются на вполне эпистемологических соображениях: компьютерные доказательства необозримы, применительно к ним невозможно вести речь о том, что они понятны в каком-либо разумном смысле этого слова и т.д. При этом продолжать и дальше игнорировать рост числа не только проверенных, но и полученных с помощью компьютера результатов, становится невозможным, поскольку такие результаты уже образовали фактически самостоятельную, стремительно развивающуюся отрасль математики.

Общим местом среди философов математики является представление о том, что математическое доказательство — изобретение древнегреческой математики, получившее свое каноническое воплощение в *Началах* Евклида. Столь же общеизвестен и тот факт, что заданный Евклидом стандарт доказательства практически всегда оставался неким признаваемым идеалом, который de facto никогда не воплощался в математических исследованиях [1]. Более того, «любой, кто хоть немного интересуется чтением древней математики, увидит, что стандарты дедуктивной математики менялись, как, впрочем, и теперь. Все это является контингентной историей» [2, с. 171]. Тем не менее, в XVII веке изменчивая история дедуктивного доказательства оформляется в два идеала, тесно связанных с именами Декарта и Лейбница: «Правильно сказать, что две совершенно разные идеи доказательства могут быть прочитаны в одержимо тщательных трудах Декарта и могут быть извлечены в более точном виде из некоторых неисчислимых текстов Лейбница» [2, с. 39]. Оба идеала доказательства возникли как результат переплетения различных философских концепций и претендовали не только на дескриптивную роль, нацеленную на раскрытие подлинной природы доказательства, но и, одновременно с этим, на нормативную, связанную с формированием стандартов математической аргументации.

Современная математика, кажется, является триумфом лейбницианской концепции доказательства. Так, Ян Хакинг безапелляционно заявляет: «Лейбниц знал, что такое доказательство. Декарт нет. <...>. Лейбницевское понятие доказательства почти точно такое же, как наше. Оно не существовало до его времени» [3, p. 169]. Правда, спустя годы он признается в излишней резкости своего заявления: «Несколько лет назад я начал открытую лекцию с таких слов: 'Лейбниц знал, что такое доказательство. Декарт не знал'. Я полагаю, что не был тогда в достаточно зрелом состоянии ума и мог позволить себе прогулки по саду сомнительных афоризмов» [2, с. 41]. Хотя тут же признает справедливость содержания своего заявления: «Сейчас я хотел бы сказать, что Лейбниц прозорливо нащупал концепцию доказательства, которой мы теперь учим в курсе элементарной логики. Доказательство-как-конечная-последовательность-предложений-каждое-из-которых-есть-либо-аксиома-или-выврлится-из-предыдущих-членов-последовательности-однократным-применением-правила-вывода». [2, с. 41—42]. Подобная формула доказательства, составленная с помощью '—', является лаконичным выражением лейбницевской концепции, согласно которой математическое доказательство — сугубо вычислительная процедура. В рамках вычислительной концепции доказательство валидно исключительно в силу своей формы, а не содержания. Оно представляет собой последовательность утверждений, начинающуюся с утверждений тождества и продолжающуюся конечной последовательностью строго логических шагов вывода и правил дефиниционального подстановки, вплоть до доказуемой теоремы. Удивительным образом в своих трудах Лейбниц предвосхищает многие идеи, связываемые с современной концепцией доказательства. Хакинг перечисляет среди них следующие: «Более того, пониманием Лейбницем доказательства таково, что он мог предложить метаматематическую демонстрацию непротиворечивости на основании демонстрации невыводиомсти противоречия за конечное число шагов из посылок определенной формы. Он понимал, что доказательство необходимого утверждения должно быть конечным, и важную часть своей философии основал на различии между конечным и бесконечным доказательством. Мы обязаны ему важным определением необходимости как редукции к противоречию и соответствующим определением возможности как свободы от противоречия, понятым как неизбежное доказательство противоречия конечным множеством шагов вывода. Доказательство не только конечно, но и вычислимо, и проверка доказательства называется арифметикой. Лейбниц видел даже важность представления идей и пропозиций средствами схемы рекурсивной нумерации» [3, p. 170]. Безусловно, нельзя утверждать, что все эти удивительные прозрения созданы исключительно Лейбницем; он сумел синтезировать и представить в систематическом виде многие ранее высказавшиеся идеи. При этом условия возможности такого синтеза во многом были предопределены оппонентом Лейбница в вопросе о природе доказательства — Декартом. Проделанная им алгебраизация геометрии фиксировала концептуальные возможности абстрагирования от содержания пропозиции в пользу ее формальных характеристик.

Абсолютизация формально-вычислительного аспекта математического рассуждения воплощается Лейбницем в проекте *Universal Characteristic*, идеально представляющей природу математического доказательства: «... которая делает истину устойчивой, видимой и непреодолимой, так сказать, на механической основе. ... алгебра, которую мы справедливо так уважаем, является лишь частью этого общего предприятия. Однако алгебра достигла многого: мы не можем ошибиться, даже если захотим, и эту истину можно понять, как если бы она была изображена на бумаге с помощью машины. Я пришел к пониманию того, что все подобное тому, что доказывает алгебра, принадлежит только высшей науке, которую я теперь обычно называю *combinatorial characteristic*» [4, p. 165]. Важной характеристикой вычислительной концепции доказательства Лейбница становится постулируемая в ней связь понятий истины и доказательства. Доказательство выступает концептуальным условием истины, оно устанавливает истинность и демонстрирует, почему нечто истинно. Более того, согласно вычислительной концепции доказательства, оно выступает также и условием понимания. Доказательство необходимо для понимания, потому что доказательство (и исключительно только оно) предоставляет анализ содержания понятий, которые определяют истинность. Таким образом, вычислительная, или механическая, концепция доказательства Лейбница представляет собой сложное переплетение истины, понимания и причины.

Альтернативная, декартовская, концепция доказательства совершенно иначе определяет соотношение доказательства и истины. По мнению Декарта, между этими концепциями нет тесной связи. Декарт, в отличие от Лейбница, специальным образом не углублялся в анализ собственно математического доказательства. Большая часть подобных рассуждений содержится в *Правилах для руководства ума* (*Regulae ad directionem ingenii*). В этой своей работе он устанавливает известное различие между интуицией и дедукцией: элементарные истины арифметики интуитивно постижимы всеми, следствия из них также могут быть понятны интуитивно; дедукция требует интуитивного постижения исходных утверждений. Предлагаемые Декартом характеристики компонентов доказательства носят явный психологический оттенок. По его мнению, успешное доказательство должно порождать у человека понимание, — и здесь мы вновь обнаруживаем индивидуально-психологическое наполнение концепции доказательства. Для понимания необходимо скрупулезное следование шагам доказательства, которые должны быть ясными и явными; нам требуется держать и обозревать его в уме целиком. Среди философов наиболее известным последователем Декарта в вопросе природы математического доказательства оказывается Витгенштейн, который также уделял основное внимание таким его характеристикам как обозримость, ясность, постижимость. Некоторые математики также открыто признавали важность этих индивидуально-психологических характеристик доказательства. Например, Годфри Харди писал: «Доказательства — это то, что Литлвуд и я называем *газом*, риторические расцвечивания, предназначенные воздействовать на психологию..., приемы, стимулирующие воображения учеников» [5, p. 18].

Во многом намеренно противопоставляемые друг другу вычислительная лейбницевская и декартовская концепции доказательства оказывали большое влияние на развитие математики, претерпевая время от времени существенные изменения. Вехами в истории их эволюции были, например, математика Карла Вейерштрасса (вычислительная традиция) и Георга Римана (концептуальная традиция доказательства). Противостояние этих концепций можно видеть и в споре о природе аксиом, развернувшемся между Готлобом Фреге, с одной стороны, и Рихардом Дедекиндом и Давидом Гильбертом — с другой. И новым витком этого противостояния становятся современные споры о статусе результатов, полученных с помощью компьютера. Помимо вызова аналитической концепции математической истины, компьютерные доказательства служат не только простым аргументом в пользу вычислительной природы математического знания, но и являются наглядным примером успешного развития этого нового бурно развивающегося направления в математике. И если первая концепция имеет сугубо когнитивный характер, требуя от доказательства ясности, понятности и возникновения так называемого ‘вау-эффекта’, знаменующего постижение доказательства, то вторая — является исключительно вычислительной, основанной на последовательном, пусть и неопределенно длинном, применении непроблематичных элементарных шагов вывода, завершаемого доказуемым утверждением. Очевидно, что в последнем случае все когнитивные характеристики, являющиеся необходимыми атрибутами подлинного доказательства с точки зрения первой концепции, совершенно не применимы во второй, где они, если и присутствуют, то только лишь в виде сопутствующих субъективных феноменов, не имеющих отношения к сути доказательства. И результаты, полученные с помощью компьютера, следует рассматривать в качестве очевидного примера кульминации вычислительной концепции[1].

Но многообразие математической деятельности не ограничивается лишь противостоянием компьютерной (вычислительной) и традиционной математики. Интересным феноменом является такой ее специальный раздел, как повторное доказательство ранее доказанных результатов. Примеры этой практики порой могут обескураживать. Так, известный английский математик Майкл Атья вспоминает: «Я помню одну теорему, которую доказал, но все же не мог понять, почему она была истинной. Это беспокоило меня много лет. <...> Я продолжал беспокоиться об этом, и пять или шесть лет спустя я понял, почему она должна быть истинной. Потом я получил совсем другое доказательство... Используя совсем другие методы, мне стало совершенно ясно, почему она должна быть истинной» [6, p. 17]. Случай Атьи, возможно, уникальный, и большинство вновь доказанных результатов обычно принадлежит другим авторам, а не первооткрывателям. Однако сам факт наличия (далеко не единичных случаев) передоказательства установленных результатов является весьма интересным и прежде всего в свете интересующей нас концепции понимания и ее роли в математическом доказательстве.

Американский математик Джон Доусон выделяет следующие цели, преследуемые при передоказательстве результатов: (1) исправления ошибок или восполнение пробелов в предыдущих доказательствах; (2) исключения лишних или противоречивых гипотез; (3) расширения области применения ранее полученных результатов; и наконец, (4) достижения большей ясности доказательства [7, p. 7]. Последняя из перечисленных целей представляет особый интерес. Практика повторного доказательства уже установленных результатов осуществляется формальными средствами и (естественно) не прибегает к каким-либо иным альтернативам. Подобная практика применима (по крайней потенциально) и к результатам, полученным с помощью компьютера, ведь для нас крайне желательным было бы получить аналог ‘человеческого’ доказательства для вычислительных результатов грандиозной длины. Основная ценность таких доказательств и заключается в том, что именно они могли бы нам дать понимание результатов. Принимая во внимание различия между картезианской и лейбницевской концепциями доказательства, речь здесь идет не об индивидуально-психологическом, а о концептуальном понимании, достигаемом формальными средствами, без какого-либо психологического воздействия. Чуждость данной концепции понимания декартовской модели математического доказательства, на наш взгляд, удачно иллюстрируется приведенной выше цитатой Атьи.

В первоначальной, лейбницевской, редакции вычислительной концепции доказательства концептуальное содержание понимания обусловлено переплетением и соотношением концепций истины (необходимой и контингентной), доказательства и вычисления. Компьютерная математика, выступающая современной версией концепции Лейбница, сталкивается с необходимостью поисков аналогичного решения проблемы интеграции концепций понимания и доказательства. Один из самых амбициозных проектов в компьютерной математике — гомотопическая теория типов (HoTT), — заявляет о претензиях на решение этой проблемы [подробнее см.: 8—10]. И хотя судить о состоятельности подобных претензий, на наш взгляд, пока преждевременно, заявление о том, что одной из неотложных задач, стоящих перед философией математики в связи с расцветом индустрии компьютерных доказательств, является развитие философии языков программирования [11], очевидным образом свидетельствует о статусе и важности проблемы эпистемологического анализа формальной математики. Полученные в этой области исследований результаты будут иметь определяющее значение для проблемы соотношения концепций понимания и математического доказательства.

Благодарности

Статья подготовлена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. Проект № 20-011-00723 А.

Примечания

[1]Апологеты компьютерной математики предсказывают близкий триумф вычислительной концепции: «[Майкл Харрис] ... сообщает о дискуссии в феврале 2011 г. на официальном собрании в Принстонском институте перспективных исследований. ‘Воеводский предсказал, что в скором времени можно будет разработать процедуры проверки доказательств на основе унивалентных оснований, которые могли бы эффективно проверить правильность доказательств, записанных на подходящем читаемом машиной языке. Через несколько лет, добавил он, журналы будут принимать только статьи, сопровождаемые их машинно-проверяемыми эквивалентами’» [2, с. 44].

Библиографический список

1. Клайн М. Математика. Утрата определенности / пер. с англ. Ю. А. Данилова. Москва: Мир, 1984. 446 с. ISBN 9984-9395-5-3.

2. Хакинг Я. Почему вообще существует философия математики? / пер. с англ. В. В. Целищева. Москва: Канон+, 2020. 400 с. ISBN 978-5-88373-595-9.

3. Hacking I. Descartes and Leibniz: Proof and Eternal Truths // Descartes: Philosophy, Mathematics and Physics / Ed. S. Gaukroger. Brighton: The Harvester Press, 1980. P. 169—180.

4. Leibniz G. W. Letter to Henry Oldenburg, December 28, 1675 // Philosophical Papers and Letters. Dordrecht: Springer, 1989. P. 165—166. ISBN 978-94-010-1426-7.

5. Hardy G. H. Mathematical Proof // Mind. 1929. Vol. 38 (149). P. 1—25. DOI: 10.1093/mind/XXXVIII.149.1.

6. Atiyah M. An Interview with Michael Atiyah // The Mathematical Intelligencer. 1984. Vol. 6 (1). P. 9—19. DOI: 10.1007/BF03024202.

7. Dawson Jr., John W. Why Prove It Again? Alternative Proof in Mathematical Practice. Dordrecht: Springer, 2015. 204 p. ISBN 978-3-319-17367-2.

8. Voevodsky V. An Experimental Library of Formalized Mathematics Based on the Univalent Foundations // Mathematical Structures in Computer Science. 2015. Vol. 25, Issue 5. P. 1278—1294. DOI: 10.1017/S0960129514000577.

9. Awodey S. Mathesis Universalis and Homotopy Type Theory // Mathesis Universalis, Computability and Proof / Eds.: S. Centrone, S. Negri, D. Sarikaya, P. M. Schuster. Dordrecht: Springer, 2019. P. 13—36.

10. Bordg A. Univalent Foundations and UniMath Library // Reflection on Foundation of Mathematics / Eds.: C. Centrone, D. Kant, D. Sarikaya. Dordrecht: Springer, 2019. P. 173—190. ISBN 978-3-030-15655-8.

11. Zach R. The Significance of Curry-Howard Isomorphism // Philosophy of Logic and Mathematics. Proc. of the 41st International Ludwig Wittgenstein Symposium / Eds.: G. M. Mras, P. Weingartner, B. Ritter. Berlin: DeGruyter, 2019. P. 313—326.

ЦЕЛИЩЕВ Виталий Валентинович, доктор философских наук, научный руководитель.
SPIN-код: 2637-3030
AuthorID (РИНЦ): 71719
AuthorID (SCOPUS): 56308362200
ResearcherID: W-5593-2018
Адрес для переписки: leitval@gmail.com
ХЛЕБАЛИН Александр Валерьевич, кандидат философских наук, заместитель директора по научной работе.
SPIN-код: 2737-5920
AuthorID (РИНЦ): 181236
ORCID: 0000-0002-3536-3974
ResearcherID: AAH-2027-2020
Адрес для переписки: sasha_khl@mail.ru

Для цитирования

Целищев В. В., Хлебалин А. В. Концепция понимания в математическом доказательстве // Омский научный вестник. Сер. Общество. История. Современность. 2021. Т. 6, № 4. С. 82—86. DOI: 10.25206/2542-0488-2021-6-4-82-86.

Статья поступила в редакцию 05.08.2021 г.

UDC 165.4
DOI: 10.25206/2542-0488-2021-6-4-82-86

V. V. TSELISHCHEV
A. V. KHLEBALIN

**Institute of Philosophy
and Law of the Siberian Branch
of the Russian Academy of Sciences,
Novosibirsk, Russia**

CONCEPTION OF UNDERSTANDING IN MATHEMATICAL PROOF

The article analyzes the role of the concept of understanding in mathematical proof. Understanding seems to be a natural and necessary characteristic of proof, interpreted as an argument in favor of the established result. It is shown that in general two traditions in the treatment of mathematical proofs can be distinguished, going back to Descartes and Leibniz. It arguments for conceptual treatment of category of understanding which is not connected with individual mental acts are resulted. The prospect of achieving conceptual understanding in the computational interpretation of mathematical proof is problematized.

Keywords: understanding, mathematical proof, formalization, computation, computer proof.

Acknowledgments

This paper is prepared within the framework of the scientific project No. 18-78-10082, supported by the Russian Foundation for Basic Research.

References

1. Kline M. Matematika. Utrata opredelennosti [Mathematics. The loss of cerfainty] / trans. from Engl. Yu. A. Danilov. Moscow, 1984. 446 p. ISBN 9984-9395-5-3. (In Russ.).

2. Hacking I. Pochemu voobshche sushchestvuyet filosofiya matematiki? [Why Is There Philosophy of Mathematics at All] / trans. from Engl. V. V. Tselishchev. Moscow, 2020. 400 p. ISBN 978-5-88373-595-9. (In Russ.).

3. Hacking I. Descartes and Leibniz: Proof and Eternal Truths // Descartes: Philosophy, Mathematics and Physics / Ed. S. Gaukroger. Brighton: The Harvester Press, 1980. P. 169–180. (In Engl.).

4. Leibniz G. W. Letter to Henry Oldenburg, December 28, 1675 // Philosophical Papers and Letters. Dordrecht: Springer, 1989. P. 165–166. ISBN 978-94-010-1426-7. (In Engl.).

5. Hardy G. H. Mathematical Proof // Mind. 1929. Vol. 38 (149). P. 1–25. DOI: 10.1093/mind/XXXVIII.149.1. (In Engl.).

6. Atiyah M. An Interview with Michael Atiyah // The Mathematical Intelligencer. 1984. Vol. 6 (1). P. 9–19. DOI: 10.1007/BF03024202. (In Engl.).

7. Dawson Jr., John W. Why Prove It Again? Alternative Proof in Mathematical Practice. Dordrecht: Springer, 2015. 204 p. ISBN 978-3-319-17367-2. (In Engl.).

8. Voevodsky V. An Experimental Library of Formalized Mathematics Based on the Univalent Foundations // Mathematical Structures in Computer Science. 2015. Vol. 25, Issue 5. P. 1278–1294. DOI: 10.1017/S0960129514000577. (In Engl.).

9. Awodey S. Mathesis Universalis and Homotopy Type Theory // Mathesis Universalis, Computability and Proof / Eds.: S. Centrone, S. Negri, D. Sarikaya, P. M. Schuster. Dordrecht: Springer, 2019. P. 13–36. (In Engl.).

10. Bordg A. Univalent Foundations and UniMath Library // Reflection on Foundation of Mathematics / Eds.: C. Centrone, D. Kant, D. Sarikaya. Dordrecht: Springer, 2019. P. 173–190. ISBN 978-3-030-15655-8. (In Engl.).

11. Zach R. The Significance of Curry-Howard Isomorphism // Philosophy of Logic and Mathematics. Proc. of the 41st International Ludwig Wittgenstein Symposium / Eds.: G. M. Mras, P. Weingartner, B. Ritter. Berlin: DeGruyter, 2019. P. 313–326. (In Engl.).

TSELISHCHEV Vitaly Valentinovich, Doctor of Philosophical Sciences, Scientific Director.
SPIN-code: 2637-3030
AuthorID (RSCI): 71719
AuthorID (SCOPUS): 56308362200
ResearcherID: W-5593-2018
Correspondence address: leitval@gmail.com
KHLEBALIN Aleksander Valerievich, Candidate of Philosophical Sciences, Deputy Director for Research.
SPIN-code: 2737-5920
AuthorID (RSCI): 181236
ORCID: 0000-0002-3536-3974
ResearcherID: AAH-2027-2020
Correspondence address: sasha_khl@mail.ru

For citations

Tselishchev V. V., Khlebalin A. V. Conception of understanding in mathematical proof // Omsk Scientific Bulletin. Series Society. History. Modernity. 2021. Vol. 6, no. 4. P. 82–86. DOI: 10.25206 / 2542-0488-2021-6-4-82-86.

Received August 5, 2021.