

# ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ОБЪЕКТОВ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ ИЗДЕЛИЙ

А. А. Ляшков

Омский государственный технический университет,  
Россия, 644050, г. Омск, пр. Мира, 11

Рассмотрено геометрическое и компьютерное моделирование основных объектов формообразования технических изделий: огибающей, обволакивающей и удаляемых слоев на основе разработанной единой методологии. Проведенные исследования дискриминанты двумерных поверхностей и трехмерных гиперповерхностей позволили предложить определение огибающей и обволакивающей семейств линий и поверхностей с единых позиций аналитическими и численными методами соответственно. Эта методология развита для выполнения 3D-моделирования средствами САПР как обволакивающей, так и удаляемых слоев. Полученные поверхностные модели вспомогательных поверхностей использованы при анализе влияния на форму огибающей семейства профилей параметров формы образующей линии, а также параметра установки изделия относительно инструмента.

**Ключевые слова:** геометрическое и компьютерное моделирование, объекты формообразования, огибающая, обволакивающая, срезаемые слои.

## Введение

Формообразование поверхностей деталей является важной конструкторской и технологической задачей при производстве различных изделий в ряде отраслей машиностроения [1–4]. В этой задаче значительное место отводится решению вопросов, связанных с взаимодействием изделия и инструмента [5]. Поверхность изделия, получаемая после её обработки инструментом, будет состоять из огибающей семейства поверхностей [6] и, часто, переходных кривых. Поэтому наряду с разработкой математической модели огибающей в процессе формообразования решаются вопросы по установлению модели реальной поверхности — обволакивающей [7]. Для получения огибающей и обволакивающей семейств линий и поверхностей разработано множество методов, основанных на различных подходах к получению этих объектов формообразования. Большинство из них используют методы дифференциальной геометрии или кинематический метод. В последнее время активно и успешно для моделирования формообразования поверхностей применяются возможности современных компьютерных технологий [8–15].

Кроме огибающей и обволакивающей в практических приложениях часто требуется получение моделей удаляемых слоев [16]. Для исследования удаляемых слоев используются методы, отличающиеся от методов, применяемых при моделировании огибающей и обволакивающей поверхности. При этом, как правило, в известных литературных источниках рассматривается исследование только одного из объектов формообразования, причем различными методами.

Таким образом, основными объектами формообразования являются огибающая, обволакивающая и удаляемые слои. При их моделировании во многих задачах остается ряд недостаточно решенных или совсем не решенных вопросов. Это связано

с отсутствием единой методологии, которая позволяла бы при необходимости определять дискриминанту и обволакивающую семейств линий и поверхностей, а также удаляемые слои, используя при этом в полном объеме возможности современного геометрического, полигонального и твердотельного компьютерного моделирования.

## Постановка задачи моделирования формообразования поверхностей

Исследование огибающей семейства линий или поверхностей проводится во многих работах. В своём большинстве они основываются на методах дифференциальной геометрии либо на кинематическом методе. В своей основе в этих методах выполняется получение уравнения, устанавливающего связь параметров линии или поверхности и параметра их семейства. Как правило, в прикладных задачах это уравнение является трансцендентным, что сопряжено с существенными трудностями как при его решении, так и определении огибающей в целом.

Ещё одно направление определения огибающей семейства линий или поверхностей базируется на исследовании дискриминанты поверхности или гиперповерхности. Эти поверхности и гиперповерхности образуются в результате отображения семейств линий и поверхностей, получаемых в процессе формообразования, в пространство большей размерности. Его размерность на единицу больше, чем размерность пространства, в котором находятся линии и поверхности [17–20]. В этих работах, в основном, определяется ряд дифференциальных характеристик дискриминанты двумерной поверхности или алгебраической поверхности большей размерности. В работе [21] предлагается определять точки дискриминанты по уравнению поверхности, заданным в неявной форме, а также уравнениям, содержащим дифференциальные параметры этой

поверхности. Расчет дискриминанты выполняется методами вычислительной математики и нелинейного программирования, что является непростой задачей. Анализа дискриминанты и криминанты такой поверхности не приводится.

Исследованию особенностей отображения ортогональным проецированием алгебраических поверхностей различной размерности посвящены работы [18, 19, 22] и др. Так, в работе [19] показаны примеры получения дискриминанты гиперповерхности, заданной многочленом. Отображению ортогональным проецированием некоторых двумерных и трёхмерных поверхностей на плоскость и гиперплоскость посвящены работы [23–24].

Анализ этих работ показывает, что исследование особенностей отображения ортогональным проецированием поверхностей и гиперповерхностей на плоскость и гиперплоскость позволяет решать задачи по определению огибающей семейства линий или поверхностей как аналитическими, так и численными методами, что в ряде случаев наиболее эффективно. Ниже предлагаются результаты исследований отображения ортогональным проецированием двумерной поверхности и трехмерной гиперповерхности, при различных формах их задания, на координатную плоскость и гиперплоскость.

### Теория

**Огибающая семейства линий или поверхностей как дискриминанта поверхности или гиперповерхности.** Пусть исследуемая двумерная поверхность задана уравнением в неявном виде

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

и она отображается ортогональным проецированием на координатную плоскость  $XU$ . Особенностью этого отображения является дискриминанта или очерк поверхности — криминанта или контурная линия. В точках криминанты касательная плоскость к поверхности, причём параллельная координатной оси  $Z$  записывается уравнением вида

$$F_z(x, y, z) = 0. \quad (2)$$

Предложено рассматривать уравнение (1) как уравнение новой поверхности. Тогда уравнения (1) и (2) определяют их линию пересечения, являющуюся контурной линией поверхности (1). Выполненные исследования показывают, что точки на кривых, получаемых в пересечении поверхности плоскостями, параллельными координатным плоскостям  $XZ$  и  $YZ$ , являются экстремальными. Секундные плоскости при этом параллельны координатной оси, которая задает направление проецирования — ось  $Z$  (рис. 1). Такие точки могут включать точки складки, точки сборки и особые точки поверхности.

Исходя из этого, дискриминанта  $D$  поверхности является объединением множества экстремальных точек, связанных зависимостью

$$D = \sum_{i=1}^n \min f(x, z) \vee \max f(x, z) \Big|_{x=a_i},$$

если уравнение (1) записать в явном виде  $y = f(x, z)$ , а переменной является координата  $z$  в своей области определения.

Полученный результат исследования дифференциальных характеристик криминанты поверхности

позволяет предложить методику расчета координат рассматриваемых точек, используя численные методы определения условного экстремума одной из координат, например,  $y$ , при заданном значении другой координаты —  $x$ . Независимой переменной в этом случае является координата  $z$ .

Иллюстрацией этого результата могут быть модели заготовки с винтовой канавкой и инструмента с цилиндрической поверхностью (рис. 2). Здесь показано, что сечение винтовой поверхности заготовки координатной плоскостью  $YZ$  содержит экстремальную точку  $A$  относительно координатной плоскости  $XU$ . Эта точка определяет одну из точек профиля цилиндрической поверхности инструмента, сопряженной с заданной винтовой поверхностью изделия. Координаты этой точки могут быть определены как аналитическими, так и численными методами.

Таким образом, если уравнение (1) рассматривать как уравнение поверхности, полученной отображением конгруэнтных плоских кривых в пространство  $R^3$ , то огибающую этого семейства можно определять с единых позиций как аналитическими,

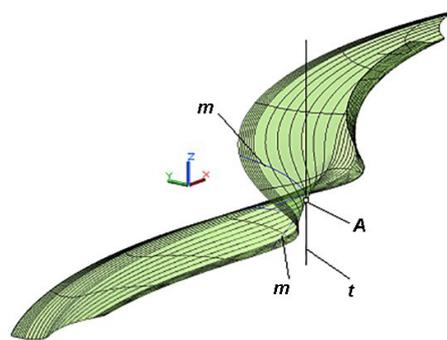


Рис. 1. Квазивиновая поверхность, её сечения  $m$  и  $n$  плоскостями, параллельными координатным  $ZY$  и  $ZX$  соответственно, а также касательная  $t$  к этим сечениям в точке  $A$   
Fig. 1. Quasi-screw surface, sections  $m$  and  $n$  by planes parallel to the coordinate  $ZY$  and  $ZX$  respectively, tangent to the sections at the point  $A$

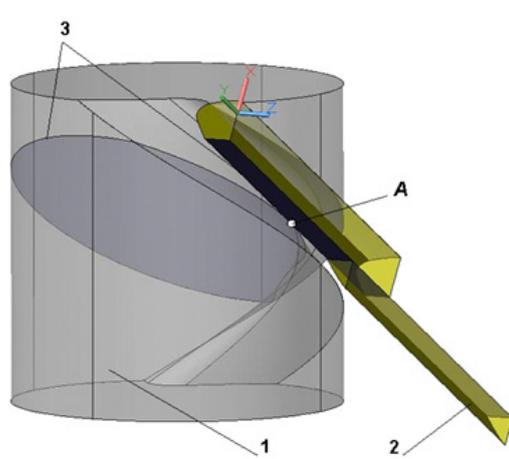


Рис. 2. Твердотельные модели отрезков заготовки 1 и инструмента 2, их сечений 3 координатной плоскостью  $YZ$ , а также точка  $A$  касания этих сечений  
Fig. 2. Solid-state models of workpiece 1 and tool bays 2, their sections 3 coordinate plane  $YZ$ , as well as point  $A$  of touching these sections

так и численными методами. Аналитическими методами — решая совместно уравнения (1) и (2), а численными — наложением условия связи на одну из координат и вычисляя экстремальное значение другой координаты. Третья координата принимает дискретные значения.

Рассмотрим теперь отображение ортогональным проецированием двумерной поверхности, заданной параметрическими уравнениями:

$$x = f_1(u, v), y = f_2(u, v), z = f_3(u, v). \quad (3)$$

Условие, при котором плоскость, касательная к поверхности (3), параллельна оси  $Z$  — направлению проецирования, записывается в виде:

$$F(u, v) = f_{1u} \cdot f_{2v} - f_{2u} \cdot f_{1v} = 0. \quad (4)$$

Это уравнение устанавливает связь параметров  $u, v$ . Оно совместно с уравнениями (3) определяют дискриминанту поверхности. Кроме того, это уравнение можно рассматривать как уравнение некоторой кривой  $\mu$ , в декартовой системе координат  $U$  и  $V$ . Кривинанта  $\mu'$  поверхности (3) получается отображением кривой  $\mu$  на эту поверхность. Такое отображение можно записать в виде:

$$(\mu \subset F) \subset R^2 \xrightarrow{F} (\mu' \subset \Phi) \subset R^3,$$

где  $F$  задается уравнениями (4).

Проведенные исследования кривых  $\mu$  и  $\mu'$  позволили установить расположение точек кривинанты поверхности (3) относительно соответствующих координатных плоскостей. Этот результат аналогичен полученному выше для поверхности, заданной в неявном виде.

В этом случае дискриминанта  $D$  поверхности (3) является объединением множества экстремальных точек, а именно:

$$D = \sum_{i=1}^n \min f_i(u, v) \vee \max f_i(u, v) \Big|_{f_2(u, v) = a_i}, \quad z = f_3(u, v).$$

Переменной в этой зависимости является один из параметров поверхности, а исследуемая поверхность рассекается семейством плоскостей, параллельных координатной плоскости  $ZY$ .

В ряде прикладных задач возникает необходимость в определении огибающей двухпараметрического семейства поверхностей. Так, если семейство поверхностей определено двумя независимыми параметрами, то исследованию её ортогональным отображением на гиперплоскость подлечит четырехмерная гиперповерхность  $\Sigma_1$  вида

$$F(x, y, z, u, v) = 0, \quad (5)$$

где  $u$  и  $v$  независимые параметры движения.

Тогда отображение ортогональным проецированием выполняется по направлениям осей  $u$  и  $v$  на соответствующие координатные гиперплоскости. Для этой гиперповерхности уравнение касательной к ней гиперплоскости записывается в виде

$$F_x \cdot (x - x_0) + F_y \cdot (y - y_0) + F_z \cdot (z - z_0) + F_u \cdot (u - u_0) + F_v \cdot (v - v_0) = 0, \quad (6)$$

где  $x_0, y_0, z_0, u_0, v_0$  — координаты некоторой точки  $N$  этой поверхности.

В точках гиперповерхности, в которых касательные к этой гиперповерхности гиперплоскости параллельны оси  $OU$ , выполняется условие

$$F_u(x, y, z, u, v) = 0. \quad (7)$$

Если рассматривать уравнение (7) как уравнение дополнительной четырехмерной гиперповерхности  $\Sigma_1'$ , то пересечение гиперповерхностей (5) и (7) определяет трехмерную гиперповерхность  $\Sigma_2$ . Она является кривинантой гиперповерхности  $\Sigma_1$  при её ортогональном отображении вдоль оси  $u$ .

Уравнение касательной гиперплоскости к этой гиперповерхности имеет вид

$$F_{ux} \cdot (x - x_0) + F_{uy} \cdot (y - y_0) + F_{uz} \cdot (z - z_0) + F_{uu} \cdot (u - u_0) + F_{uv} \cdot (v - v_0) = 0, \quad (8)$$

где  $x_0, y_0, z_0, u_0, v_0$  — координаты некоторой точки  $K$  этой гиперповерхности.

Полученные гиперплоскости (6) и (8) пересекаются по трехмерным гиперплоскостям, касающимся гиперповерхности  $\Sigma_2$ .

В точках кривинанты гиперповерхности (5) выполняется условие

$$F_v(x, y, z, u, v) = 0. \quad (9)$$

В результате уравнение (9) определяет ещё одну дополнительную четырехмерную гиперповерхность  $\Sigma_1''$ . Тогда кривинанта гиперповерхности  $\Sigma_1$  при её ортогональном отображении вдоль оси  $OV$  определяется в пересечении четырехмерных гиперповерхностей (5) и (9) и является трехмерной гиперповерхностью  $\Sigma_3$ . При этом уравнение гиперплоскости, касающейся гиперповерхности (9), записывается в виде

$$F_{vx} \cdot (x - x_0) + F_{vy} \cdot (y - y_0) + F_{vz} \cdot (z - z_0) + F_{vu} \cdot (u - u_0) + F_{vv} \cdot (v - v_0) = 0, \quad (10)$$

где  $x_0, y_0, z_0, u_0, v_0$  — координаты некоторой точки  $L$  этой поверхности.

Пересечение трехмерных гиперповерхностей  $\Sigma_2$  и  $\Sigma_3$  задает двумерную поверхность  $\Sigma_4'$ , являющуюся кривинантой гиперповерхности (5) при её ортогональном отображении по направлениям осей  $u$  и  $v$  на гиперплоскость  $XYZ$ .

Так как точки  $N, K$  и  $L$  принадлежат не только соответствующим гиперповерхностям, но и двумерной поверхности  $\Sigma_4'$ , то касательная плоскость к поверхности  $\Sigma_4'$  определяется в пересечении гиперплоскостей (6), (8), (10). Из этих уравнений получим

$$u - u_0 = \frac{-A \cdot F_{uv} + A_1 \cdot F_v}{\Delta}, \\ v - v_0 = \frac{A_1 \cdot F_u + A \cdot F_{uu}}{\Delta},$$

где  $A = F_x \cdot (x - x_0) + F_y \cdot (y - y_0) + F_z \cdot (z - z_0)$ ,

$A_1 = F_{ux} \cdot (x - x_0) + F_{uy} \cdot (y - y_0) + F_{uz} \cdot (z - z_0)$ ,

$\Delta = F_u \cdot F_{uv} + F_v \cdot F_{uu}$ ,

а уравнение плоскости, касательной к поверхности  $\Sigma_4'$ , будет

$$(x - x_0) \cdot \begin{vmatrix} F_x & F_u & F_v \\ F_{ux} & F_{uu} & F_{vu} \\ F_{vx} & F_{uv} & F_{vv} \end{vmatrix} + (y - y_0) \cdot \begin{vmatrix} F_y & F_u & F_v \\ F_{uy} & F_{uu} & F_{vu} \\ F_{vy} & F_{uv} & F_{vv} \end{vmatrix} + (z - z_0) \cdot \begin{vmatrix} F_z & F_u & F_v \\ F_{uz} & F_{uu} & F_{vu} \\ F_{vz} & F_{uv} & F_{vv} \end{vmatrix} = 0. \quad (11)$$

В результате, огибающая двухпараметрического семейства поверхностей (5) определяется системой уравнений (5), (7) и (9) при условиях

$$|F_x| + |F_y| + |F_z| \neq 0 \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} F_{uu} & F_{vu} \\ F_{uv} & F_{vv} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Таким образом, полученные результаты позволяют определять огибающую и обволакивающую семейств линий и поверхностей как аналитическими методами, путем получения уравнений связи параметров линии или поверхности и параметра их семейства (что часто трудоёмко), так и численными методами, не требующими получения таких уравнений. Эти результаты использованы для компьютерного полигонального и твердотельного моделирования не только огибающей и обволакивающей, но и третьего объекта формообразования — удаляемых объемов. Достоверность и эффективность изложенных результатов подтверждается проведенными экспериментами.

### Результаты экспериментов

**Поверхностное моделирование семейств конгруэнтных кривых.** В прикладных задачах, исследующих проектирование режущего инструмента, возникает необходимость в определении огибающей семейства конгруэнтных кривых, связанных с центроидой инструмента, катящейся без скольжения по центроиде изделия. При отображении семейств конгруэнтных кривых в пространство  $R^3$  получают некоторые вспомогательные поверхности [20]. Анализ геометрии этих поверхностей средствами САД-систем позволяет выявлять влияние параметров установки инструмента относительно изделия, а также формы кривой семейства, на форму огибающей. В качестве примера рассмотрим семейство кривых, связанных с центроидой — окружностью, катящейся по другой центроиде — окружности. Пусть радиусы этих центроид  $R_1$  и  $R_2$  соответственно, а кривая семейства задана параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t). \end{aligned}$$

После отображения этого семейства в пространство  $R^3$  получим поверхность, уравнение которой имеет вид

$$\begin{aligned} x_s &= x(t) \cdot \cos k\varphi - y(t) \cdot \sin k\varphi - A \cdot \sin \varphi, \\ y_s &= x(t) \cdot \sin k\varphi + y(t) \cdot \cos k\varphi + A \cdot \cos \varphi, \\ z_s &= p \cdot \varphi, \end{aligned}$$

где  $\varphi$  — параметр семейства кривых,  $k = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$ , а  $p$  — константа, большая нуля.

Сравнивая систему уравнений (12) с уравнением цилиндрической винтовой поверхности, можно констатировать, что поверхность (12) получена аффинным преобразованием цилиндрической винтовой поверхности. Следовательно, полученная поверхность — квазивиновая. Компьютерная модель одной из таких поверхностей показана на рис. 3а.

Для получения огибающей рассматриваемого семейства линий выполняется отображение ортогональным проецированием моделируемой поверхности на координатную плоскость (рис. 3б). Так, для модели, представленной на рис. 3а, горизонтальный очерк поверхности является огибающей семейства

кривых, связанных с окружностью (рис. 3б). Эта модель используется в режиме визуализации для исследования влияния на форму огибающей параметров установки изделия относительно инструмента.

Ещё одним примером компьютерного моделирования является определение огибающей семейства кривых (профилей инструмента), связанных с начальной прямой, катящейся без скольжения по окружности, без отображения их в пространство. На рис. 4 показаны два семейства кривых для двух положений инструмента относительно изделия. Так, на рис. 4а инструмент имеет положительное смещение (сближение) относительно заготовки, а на рис. 4б — отрицательное (удаление). В результате в первом случае профиль зуба очерчен не только эвольвентой, но и значительной по величине переходной кривой. Во втором случае (рис. 4б) нет переходной кривой, профиль зуба увеличивается, что повышает прочность зуба при изгибе, однако его вершина заострена.

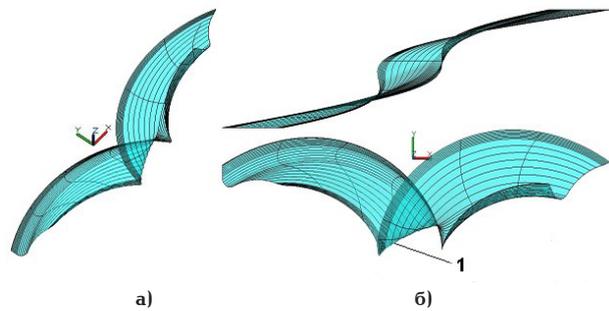


Рис. 3. Модель квазивиновой поверхности (а) и её ортогональные проекции (б); 1 — дискриминанта поверхности (огибающая семейства профилей)  
Fig. 3. The model of the quasi-screw surface (a) and its orthogonal projections (b); 1 — discriminant of surface (the envelope of the family of profiles)

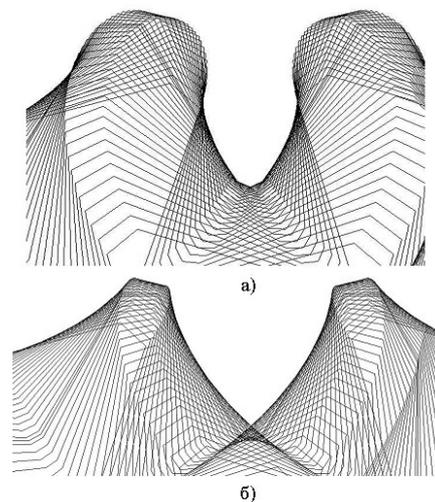


Рис. 4. Семейства профилей инструмента, связанных с прямой, катящейся по окружности: а — при положительном и б — отрицательном смещении инструмента относительно изделия  
Fig. 4. Families of tool profiles associated with a straight line rolling along a circle: а — with a positive and б — negative tool offset relative to the product

Проведённые эксперименты по компьютерному моделированию семейств линий на плоскости или их отображений в пространство с последующим проецированием на плоскость позволяют получить качественную картину формы огибающей семейства кривых в зависимости не только от формы исходного профиля, но и от взаимного расположения заготовки и инструмента.

**Компьютерное твердотельное моделирование формообразования.** Еще одним направлением исследования основных объектов формообразования является компьютерное твердотельное моделирование взаимодействия моделей инструмента и изделия в соответствии с выбранной кинематической схемой. В процессе проектирования режущего инструмента наряду с профилированием формирующей его части, важная роль принадлежит исследованию процесса резания. Разработанные компьютерные программы в среде САПР выполняют формообразование поверхности детали инструментом на основе твердотельного моделирования. В процессе моделирования взаимодействие твердотельных моделей инструмента и заготовки осуществляется на основе использования булевых операций. На рис. 5 показано моделирование формообразования винтовой канавки на цилиндрической заготовке дисковой фрезой. Результатом моделирования является обволакивающая поверхность этой канавки.

Наряду с получением обволакивающей поверхности формируемого изделия моделируется процесс последовательного создания этой поверхности, а значит, устанавливаются возможные переходные кривые, конфигурация удаляемого слоя и загруженность режущих кромок инструмента. Некоторые из указанных возможностей компьютерного моделирования пространственной схемы зацепления иллюстрируются рис. 6. На нём показана модель цилиндрической заготовки детали и модели слоев, удаляемых на ней концевой фрезой. На основе твердотельных моделей можно получить качественные характеристики о форме удаляемых слоёв и их объёмах.

Так, из рис. 6 следует, что для рассматриваемого случая конфигурация и объёмы удаляемых слоев не изменяются в процессе обработки. Если у модели заготовки после её формообразования убрать модели срезаемых слоёв, то можно исследовать наличие переходных кривых на обволакивающей поверхности, полученной боковой поверхностью фрезы, а также ее торцевой плоскостью.

Алгоритмы и программы твердотельного моделирования формообразования в задачах плоской схемы зацепления наряду с получением сопряженного профиля позволяют проследить процесс последовательного вырезания впадин между зубьями колеса, конфигурацию срезаемого слоя и загруженность участков режущих кромок. Кроме перечисленных качественных характеристик процесса резания, предлагаемое моделирование позволяет получить и количественные параметры: объем слоёв, удаляемый за один двойной ход инструмента; объем слоя, удаляемого боковыми режущими кромками инструмента, а также периферийными кромками. Есть возможность установить зависимость удаляемых объёмов от величины параметра резания. Анализ этих параметров позволит назначить оптимальные значения параметра резания, количество проходов, а также значение глубины резания для каждого прохода.

Отмеченные возможности иллюстрируются рис. 7. На нём показаны модели инструмента — долбяка и заготовки зубчатого колеса в процессе формообразования, а также модели слоёв, снимаемых инструментом.

Таким образом, компьютерное твердотельное моделирование позволяет получать модели двух основных объектов формообразования — обволакивающую поверхность и удаляемые слои. В ряде задач такой подход может быть основным при решении поставленной задачи или дополнять, при необходимости, геометрическое моделирование.

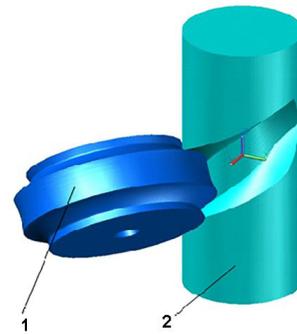


Рис. 5. Модель дисковой фрезы 1 в процессе формообразования винтовой канавки в цилиндрической заготовке 2  
Fig. 5. The model of a disk mill 1 in the process of shaping a helical groove in a cylindrical workpiece 2

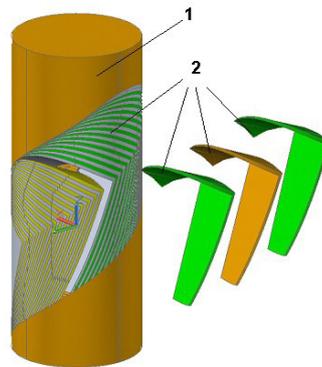


Рис. 6. Модели заготовки 1 после её формообразования и удаляемые слои 2  
Fig. 6. Workpiece models 1 after shaping and removable layers 2

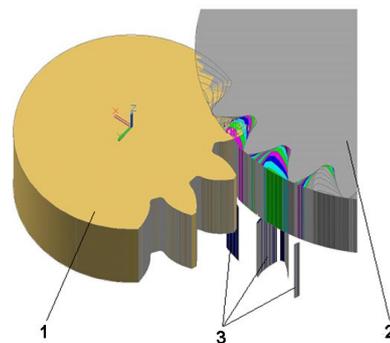


Рис. 7. Модели инструмента 1, заготовки 2, в процессе её формообразования, а также удаляемые слои 3  
Fig. 7. The models of the tool 1, the workpiece 2, during its shaping, as well as the removable layers 3

Проведенные эксперименты показали, что предлагаемая методология позволяет с единых позиций определять дискриминанту и обволакивающую семейств линий и поверхностей аналитическими и численными методами, а также удаляемые слои средствами САПР. При этом она успешно использует возможности современного геометрического, полигонального и твердотельного компьютерного моделирования.

#### Выводы и заключение

Предлагаемая методология моделирования формообразования поверхностей технических изделий позволяет решать следующие задачи:

- разрабатывать математические модели поверхностей и гиперповерхностей, полученных на основе отображения семейств линий и поверхностей в пространство размерности на единицу больше, чем размерность пространства, в котором находятся эти семейства;

- выполнять отображение полученных поверхностей и гиперповерхностей ортогональным проецированием на соответствующую плоскость и гиперплоскость; в результате огибающая и обволакивающая семейства линий или поверхностей может быть определена с единых позиций как аналитическими, так и численными методами, без получения часто сложных уравнений связи параметров формы линии или поверхности и параметра семейства;

- получать модели новых поверхностей, образованных семейством плоских кривых, связанных с центроидой инструмента, катящейся без скольжения по центроиде изделия; компьютерная визуализация таких поверхностей позволяет отслеживать изменение формы огибающей семейства профилей в зависимости от формы профиля и взаимного расположения изделия и инструмента;

- создавать твердотельные модели удаляемых объемов, на основе анализа которых предоставляется возможность назначать оптимальное значение параметра подачи и число проходов при формообразовании.

Таким образом, предлагаемая методология позволяет с единой теоретической основы выполнять моделирование огибающей, обволакивающей и удаляемых слоёв в процессе формообразования изделия инструментом как аналитическими, так и численными методами, а также с использованием современных компьютерных технологий.

#### Список источников

1. Лашнев С. И., Юликов М. И. Расчет и конструирование металлорежущих инструментов с применением ЭВМ. М.: Машиностроение, 1975. 392 с.
2. Люкшин В. С. Теория винтовых поверхностей в проектировании режущих инструментов. М.: Машиностроение, 1967. 372 с.
3. Litvin F. L., Fuentes A. Gear Geometry and Applied Theory. 2nd ed. Cambridge University Press, Cambridge, 2004. 800 p. ISBN 10: 0521815177.
4. Чемборисов Н. А., Девжеева Т. Г. Обзор методов профилирования червячной фрезы для зубчатых венцов // Металлообработка. 2010. № 4. С. 2–6.
5. Радзевич С. П. Формообразование поверхностей деталей. Основы теории: моногр. Киев: Растан, 2001. 592 с.
6. Залгаллер В. А. Теория огибающих. М.: Наука, 1975. 104 с.
7. Шевелева Г. И. Теория формообразования и контакта движущихся тел: моногр. М.: Мосстанкин, 1999. 494 с.

8. John Argyris, Faydor L. Litvin, Qiming Lian [et al.]. Determination of envelope to family of planar parametric curves and envelope singularities // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1999. Vol. 75, Issue 1-2. P. 175–187. DOI: 10.1016/S0045-7825(98)00367-3.

9. Лопатин Б. А., Хаустов С. А. Автоматизированная система моделирования и анализа способов формирования зубьев зубчатых колес // Вестник ЮУрГУ. Сер. Машиностроение. 2008. Вып. 11, № 10 (110). С. 72–77.

10. Ляшков А. А., Вивденко Ю. Н., Шутов А. Н. [и др.] Моделирование формообразования сложных поверхностей деталей // Металлообработка. 2010. № 4. С. 36–42.

11. Ляшков А. А. Моделирование формообразования винтовых поверхностей деталей инструментальной рейкой и червячной фрезой // Металлообработка. 2011. № 1. С. 2–7.

12. Dimitriou V., Vidakis N., Antoniadis A. Advanced computer aided design simulation of gear hobbing by means of three-dimensional kinematics modeling // Journal of Manufacturing Science and Engineering. 2006. Vol. 129, Issue 5. P. 911–918. DOI: 10.1115/1.2738947.

13. Dimitriou V., Antoniadis A. CAD-Based calculation of cutting force components in gear hobbing // Journal of Manufacturing Science and Engineering. June 2012, Vol. 134, Issue 3. DOI: 10.1115/1.4006553.

14. Lyashkov A. A. Shaping of harts with a helical surface by means of a disk mill // Russian Engineering Research. Allerton Press, Inc. 2012. Vol. 32, no. 4, P. 404–406.

15. Lyashkov A. A., Panchuk K. L. Computer modeling of the pump screw and disc tool cross shaping process // Procedia Engineering. 2015. Vol. 113. P. 174–180. DOI:10.1016/j.proeng.2015.07.314.

16. Шишков В. А. Образование поверхностей резанием по методу обкатки. М.: Машгиз. 1951. 392 с.

17. Thom R. Sur la theorie des envelopes // J. de Math. pur et Appl. 1962. Vol. 41, no. 2. P. 177–192.

18. Арнольд В. И. Особенности гладких отображений // Успехи математических наук. 1968. Т. 23, вып. 1 (139). С. 4–44.

19. Брус Дж., Джиблин П. Кривые и особенности. М.: Мир, 1988. 262 с.

20. Ляшков А. А., Куликов Л. К. Профилирование обкаточного инструмента по вспомогательной поверхности // Омский научный вестник. 1999. № 9. С. 73–74.

21. Быков В. И., Найханов В. В. Определение контурной линии на поверхности, заданной уравнением в неявной форме // Применение систем автоматизированного проектирования конструкций в машиностроении: тез. Всесоюз. науч.-метод. симп.: сб. Ростов-н/Д. 1983. С. 40–41.

22. Платонова О. А. Особенности проекций гладких поверхностей // Успехи математических наук. 1984. Т. 39, вып. 1. С. 149–150.

23. Ляшков А. А., Волков В. Я. Отображение ортогональным проецированием гиперповерхности на гиперплоскость // Вестник Иркутского государственного технического университета. 2012. № 3 (62). С. 18–22.

24. Ляшков А. А. Отображение ортогональным проецированием поверхности, заданной параметрическими уравнениями // Омский научный вестник. 2012. № 2 (110). С. 9–13.

**ЛЯШКОВ Алексей Ануфриевич**, доктор технических наук, доцент (Россия), профессор кафедры «Инженерная геометрия и САПР».

Адрес для переписки: 3dogibmod@mail.ru

#### Для цитирования

Ляшков А. А. Геометрическое и компьютерное моделирование основных объектов формообразования технических изделий // Омский научный вестник. Сер. Авиационно-ракетное и энергетическое машиностроение. 2017. Т. 1, № 2. С. 9–16.

Статья поступила в редакцию 07.11.2017 г.

© А. А. Ляшков

# GEOMETRIC AND COMPUTER MODELING OF THE MAIN OBJECTS FOR SHAPING OF TECHNICAL PRODUCTS

A. A. Lyashkov

Omsk State Technical University,  
Russia, Omsk, Mira Ave., 11, 644050

**There is considered geometrical and computer modeling of the main objects for forming products: envelope, enveloping and removable layers based on the joint methodology. There is carried out a study of discriminants of two-dimensional surfaces and three-dimensional hypersurfaces. The obtained results determine the envelope and enveloping families of lines and surfaces from a single viewpoint of analytical and numerical methods, respectively. This methodology is developed for performing 3D modeling by means of CAD, both enveloping and removing layers. There are developed surface models of families of lines after their display in the space. These models are used to analyze the effect on the shape of the envelope of the shape parameters of the forming line, as well as the setting of the product relative to the tool.**

**Keywords: geometric and computer modeling, objects of shaping, envelope, enveloping, cut-off layers.**

## References

1. Lashnev S. I., Yulikov M. I. Raschet i konstruirovaniye metallorazhushchikh instrumentov s primeneniym EVM [Calculation and design of metal-cutting tools with the use of computers]. Moscow: Mashinostroyeniye Publ., 1975. 392 p. (In Russ.).
2. Lyukshin V. S. Teoriya vintovykh poverkhnostey v proyektirovaniy rezhushchikh instrumentov [Theory of screw surfaces in the design of cutting tools]. Moscow: Mashinostroyeniye Publ., 1967. 372 p. (In Russ.).
3. Litvin F. L., Fuentes A. Gear Geometry and Applied Theory. 2nd ed. Cambridge University Press, Cambridge, 2004. 800 p. ISBN 10: 0521815177. (In Engl.).
4. Chemborisov N. A., Devzheyeva T. G. Obzor metodov profilirovaniya chervyachnoy frezy dlya zubchatykh ventsov [Overview of the methods of profiling the worm cutter for toothed rings] // Metalloobrabotka. Metalloobrabotka. 2010. No. 4. P. 2–6. (In Russ.).
5. Radzevich S. P. Formoobrazovanie poverkhnostey detalei: osnovy teorii (Surface shaping of machine: theoretical principles). Kiev: Rastan Publ., 2001. 592 p. (In Russ.).
6. Zalgaller V. A. Teoriya ogibayushchikh [Theory of envelopes]. Moscow: Nauka Publ., 1975. 104 p. (In Russ.).
7. Sheveleva G. I. Teoriya formoobrazovaniya i kontakta dvizhushchikhsya tel [The theory of the shaping and contact of moving bodies]. Moscow: Mosstankin Publ., 1999. 494 p. (In Russ.).
8. John Argyris, Faydor L. Litvin, Qiming Lian [et al.]. Determination of envelope to family of planar parametric curves and envelope singularities // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1999. Vol. 75, Issue 1-2. P. 175–187. DOI: 10.1016/S0045-7825(98)00367-3. (In Engl.).
9. Lopatin B. A., Khaustov S. A. Avtomatizirovannaya sistema modelirovaniya i analiza sposobov formirovaniya zub'yev zubchatykh koles [Automated system for modeling and analysis of methods for forming gear teeth] // Vestnik YUUrGU. Ser. Mashinostroyeniye. Bulletin of the South Ural State University. Series Mechanical Engineering Industry. 2008. Issue 11, no. 10. P. 72–77. (In Russ.).
10. Lyashkov A. A., Vivdenko Yu. N., Shutov A. N. [et al.]. Modelirovaniye formoobrazovaniya slozhnykh poverkhnostey detaley [Modeling the formation of complex surfaces of parts] // Metalloobrabotka. Metalloobrabotka. 2010. No. 4. P. 36–42. (In Russ.).
11. Lyashkov A. A. Modelirovaniye formoobrazovaniya vintovykh poverkhnostey detaley instrumental'noy reykoj i chervyachnoy frezoy [Modeling of the formation of screw surfaces of parts by tool lath and a worm cutter] // Metalloobrabotka. Metalloobrabotka. 2011. No. 1. P. 2–7. (In Russ.).
12. Dimitriou V., Vidakis N., Antoniadis A. Advanced computer aided design simulation of gear hobbing by means of three-dimensional kinematics modeling // Journal of Manufacturing Science and Engineering. 2006. Vol. 129, Issue 5. P. 911–918. DOI: 10.1115/1.2738947. (In Engl.).
13. Dimitriou V., Antoniadis A. CAD-Based calculation of cutting force components in gear hobbing // Journal of Manufacturing Science and Engineering. June 2012, Vol. 134, Issue 3. DOI: 10.1115/1.4006553. (In Engl.).
14. Lyashkov A. A. Shaping of harts with a helical surface by means of a disk mill // Russian Engineering Research. Allerton Press, Inc. 2012. Vol. 32, no. 4, P. 404–406. (In Engl.).
15. Lyashkov A. A., Panchuk K. L. Computer modeling of the pump screw and disc tool cross shaping process // Procedia Engineering. 2015. Vol. 113. P. 174–180. DOI:10.1016/j.proeng.2015.07.314. (In Engl.).
16. Shishkov V. A. Obrazovaniye poverkhnostey rezaniyem po metodu obkatki [Formation of surfaces by cutting by the method of running]. Moscow: Mashgiz Publ. 1951. 392 p. (In Russ.).
17. Thom R. Sur la theorie des envelopes // J. de Math. pur et Appl. 1962. Vol. 41, no. 2. P. 177–192. (In Engl.).
18. Arnol'd V. I. Osobennosti gladkikh otobrazheniy [Singularities of smooth mappings] // Uspekhi Matematicheskikh Nauk. Uspekhi Matematicheskikh Nauk. 1968. Vol. 23, Issue. 1 (139). P. 4–44. (In Russ.).
19. Brus Dzh., Dzhibliin. P. Krivyye i osobennosti [Curves and features]. Moscow: Mir Publ., 1988. 262 p. (In Russ.).
20. Lyashkov A. A., Kulikov L. K. Profilirovaniye obkatochnogo instrumenta po vspomogatel'noy poverkhnosti [Profiling of a running tool over the auxiliary surface] // Omskiy nauchnyy vestnik. Omsk Scientific Bulletin. 1999. No. 9. P. 73–74. (In Russ.).
21. Bykov V. I., Naykhanov V. V. Opredeleniye konturnoy linii na poverkhnosti, zadannoy uravneniyem v neyavnoy forme [Determination of a contour line on a surface given by an equation in an implicit form] // Primeneniye sistem avtomatizirovannogo proyektirovaniya konstruktsey v mashinostroyenii [Application of Automated Design of Structures in Mechanical Engineering]. Rostov-on-Don, 1983. P. 40–41. (In Russ.).

22. Platonova O. A. Osobennosti proyeksiy gladkikh poverkhnostey [Features of projections of smooth surfaces] // Uspekhi Matematicheskikh Nauk. Uspekhi Matematicheskikh Nauk. 1984. Vol. 39, Issue 1. P. 149–150. (In Russ.).

23. Lyashkov A. A., Volkov V. Ya. Otobrazheniye ortogonal'nym proyetsirovaniyem giperpoverkhnosti na giperploskost' [The mapping by an orthogonal projection of a hypersurface onto a hyperplane] // Vestnik Irkutskogo Gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Proceedings of Irkutsk State Technical University. 2012. No. 3 (62). P. 18–22. (In Russ.).

24. Lyashkov A. A. Otobrazheniye ortogonal'nym proyetsirovaniyem poverkhnosti, zadannoy parametriceskimi uravneniyami [The orthogonal projection of a surface defined by parametric equations] // Omskiy nauchnyy vestnik. Omsk Scientific Bulletin. 2012. No. 2 (110). P. 9–13. (In Russ.).

---

**LYASHKOV Aleksey Anufriyevich**, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor of Engineering Geometry and CAD Department.

Address for correspondence: 3dogibmod@mail.ru

**For citations**

Lyashkov A. A. Geometric and computer modeling of the main objects for shaping of technical products // Omsk Scientific Bulletin. Series Aviation-Rocket and Power Engineering. 2017. Vol. 1, no. 2. P. 9–16.

**Received 07 November 2017.**

© A. A. Lyashkov