

ЭЛЕМЕНТЫ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЦИКЛОГРАФИИ

К. Л. Панчук, Е. В. Любчинов

Омский государственный технический университет,
Россия, 644050, г. Омск, пр. Мира, 11

В современных CAD/CAM системах и в CAGD (Computer Aided Geometric Design) используются модели геометрических объектов (линий, поверхностей) пространства R^4 в пространстве R^3 и наоборот. Анализ используемых в таких системах геометрических моделей позволяет сделать вывод об актуальности исследований, направленных на разработку в пространстве R^3 аналитических моделей линий и поверхностей пространства R^4 .

В настоящей работе показана возможность получения конструктивно-аналитической модели с использованием трёхмерного чертежа пространства R^4 , предложенного Н. В. Наумович. На основе этого чертежа дана конструктивная интерпретация предложенной аналитической модели и выполнена её реализация в виртуальном электронном 3D-пространстве.

Предложенная в работе модель линии пространства R^4 основана на теоретических положениях пространственной циклографии, реализованной на трёхмерном чертеже Наумович. Этим предложенная модель отличается от существующих, использующих аналитический метод моделирования.

Суть предлагаемого конструктивно-аналитического моделирования состоит в геометрическом представлении и интерпретации на трёхмерном чертеже циклографических образов точек, линий, множества точек и линий пространства R^4 .

Конструктивно-аналитическое моделирование линии пространства R^4 на основе циклографического отображения и возможность его реализации на трёхмерном чертеже Наумович позволяют в полном объёме получать представление о взаимосвязи и взаимном влиянии всех элементов модели. Такое представление основано на реализации трёхмерного чертежа в виртуальном электронном 3D-пространстве средствами современных графических САПР и позволяет решать вопросы оптимизации разрабатываемых моделей геометрических объектов применительно к требованиям современных CAD/CAM систем и CAGD.

Ключевые слова: циклография, линии и поверхности, геометрическое моделирование, многомерное пространство, трёхмерный чертёж Наумович, каналовая поверхность.

Введение

Циклографическое моделирование пространства R^3 (плоская циклография) основано на трудах известных западно-европейских геометров 19–20 в. W. Fiedler [1], L. Eckhart [2], E. Muller и J. L. Krames [3] и др. В них достаточно полно исследованы циклографические модели линейных объектов (прямых линий и плоскостей) пространства R^3 . Заложены основы циклографического моделирования нелинейных объектов (кривых линий и поверхностей), при этом в гораздо большей степени уделено внимание моделям кривых линий и меньшей степени — моделям поверхностей. В 20–21 в. циклографическое моделирование нелинейных объектов евклидова пространства получило дальнейшее развитие в первую очередь благодаря теоретическим исследованиям в работах [4–11]. В это же время определились области практического использования циклографического моделирования: традиционная область — геометрическая оптика [3, 8, 10], глобальные системы позиционирования GPS [11], проектирование поверхностных форм автомобильных дорог [12], обработка карманных поверхностей в машиностроении [13] и многослойная 3D печать изделий. Циклографические модели нелинейных объектов евклидова пространства востребованы в области CAGD (Computer Aided Geometric Design) [7].

В современном циклографическом моделировании определилось направление исследований

«пространственная циклография». Оно посвящено исследованию и разработке циклографических моделей объектов пространства R^n в пространстве R^{n-1} , $n > 3$. Показано, что циклографической моделью кривой линии пространства R^4 служит каналовая поверхность в пространстве R^3 [6–9], 2-поверхности пространства R^4 соответствует двухпараметрическое множество сфер в пространстве R^3 [10]. Разработка и исследование указанных циклографических моделей выполняется аналитически. Вместе с тем в высшей начертательной геометрии известны конструктивные модели евклидовых многомерных пространств, которые допускают аналитическое представление. К ним относятся трёхмерный чертёж Наумович, позволяющий выполнять моделирование пространства R^4 [14]. В настоящей работе исследуется возможность циклографического моделирования кривой линии пространства R^4 на основе трёхмерного чертежа Наумович.

Теория

Элементы пространственной циклографии. Известно, что между множеством точек пространства R^4 и множеством сфер пространства R^3 можно установить изоморфное соответствие [1–3]. Покажем, что для реализации этого соответствия удобно использовать трёхмерный чертёж (гиперэпюр) Наумович [14], представляющий собой трёхмерный двухпроекционный чертёж пространства R^4 , в кото-

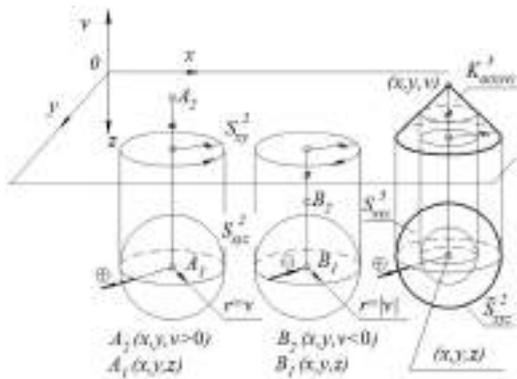


Рис. 1. Циклографическое моделирование точек пространства R^4 на гиперэпюре Наумович
Fig. 1. Cyclographic modeling of points of space R^4 on the Naumovich hyperdrawing

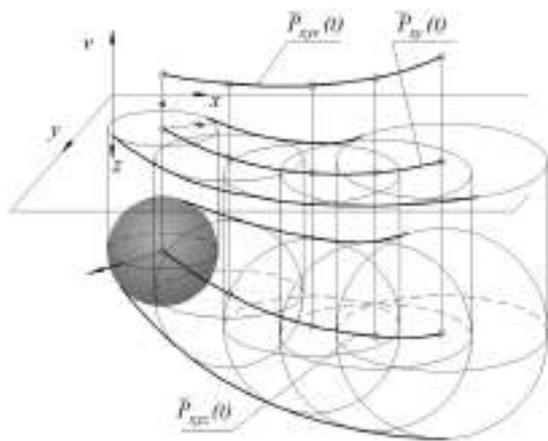


Рис. 2. Циклографическое моделирование линии пространства R^4 на гиперэпюре Наумович на основе отображения F_R
Fig. 2. Cyclographic modeling of a curve of space R^4 on the Naumovich hyperdrawing on basis of the mapping F_R

ром роли плоскостей проекций Π_2, Π_1 и их общей оси проекций x в известном чертеже Монжа исполняют соответственно гиперплоскости проекций $(xuz), (xuv)$ и осевая плоскость (xy) (рис. 1).

Удобство применения гиперэпюра Наумович заключается в возможности реализации его, как трехмерного чертежа, в виртуальном электронном 3D-пространстве средствами современных графических САПР [15]. На гиперэпюре точка пространства R^4 моделируется парой точек-проекций: $A_2(x, y, v)$ и $A_1(x, y, z)$. По аналогии с плоской циклографией, поставим точке $A(x, y, z, v)$ в соответствие 2-сферу S_{xyz}^2 с одним из направлений \oplus или \ominus и радиусом $r = |v|$, вложенную в гиперплоскость проекций (xuz) . Направленную сферу \tilde{S}_{xyz}^2 назовем двумерным циклом. Таким образом, циклографическим образом точки $A(x, y, z, v)$ на гиперплоскости проекций (xuz) будет двумерный цикл \tilde{S}_{xyz}^2 с ортогональной проекцией S_{xy}^2 на осевой плоскости в виде круга радиусом $r = |v|$ с направленной границей — одномерным циклом. Направление двумерного цикла определяется знаком координаты v . Изложенный подход к циклографическому моделированию точек пространства R^4 соответствует алгебраическому отображению F_R , а само отображение является пространственным циклографическим [8, 11].

Рассмотрим теперь геометрическое отображение F_E для циклографического моделирования точек пространства E^4 . Сферу S_{xyz}^2 в гиперплоскости проекций (xuz) примем в качестве основания α -гиперконуса вращения $K_{\alpha(x,y,v)}^3$ с вершиной в точке (x, y, z, v) и осью, перпендикулярной осевой плоскости (xy) и телесным полууглом при вершине, равным $\alpha = 45^\circ$. «Фронтальной» проекцией α -гиперконуса K_{α}^3 будет обычный трехмерный α -конус $K_{\alpha(x,y,v)}^3$ со всеми его внутренними точками, а «горизонтальной» — шар S_{xyz}^3 с центром в точке (x, y, z) , радиусом $r = |v|$ и с направленной сферической оболочкой — двумерным циклом \tilde{S}_{xyz}^2 .

По аналогии с циклографическим моделированием линейных объектов пространства R^3 [1–3, 8, 16] и опираясь на циклографическую модель точки пространства R^4 , можно построить в пространстве R^3 циклографические модели прямых, плоскостей и гиперплоскостей пространства R^4 . Эти модели составляют основу линейной пространственной циклографии пространства R^4 , реализуемой на гиперэпюре Наумович.

Опираясь на отображения F_R и $F_{E'}$, рассмотрим циклографическое моделирование кривой линии $\tilde{P}(t)$ пространства $R^4(E_4)$. В случае отображения F_R циклографической проекцией линии $\tilde{P}(t) \subset R^4$ в гиперплоскости проекций (xuz) будет каналовая поверхность — огибающая всех двумерных циклов, представляющих собой циклографические образы точек линии $\tilde{P}(t)$ (рис. 2). Ортогональной проекцией этой поверхности на осевой плоскости будет область, граница которой огибает однопараметрическое множество одномерных циклов, представляющих направленные границы множества кругов S_{xy}^2 . Круги с направленными границами — циклами представляет собой ортогональные проекции двумерных циклов \tilde{S}_{xyz}^2 на осевой плоскости (xy) .

В случае отображения F_E получаем на гиперплоскости проекций (xuv) трехмерную линейчатую α -поверхность $\Phi_{\alpha(x,y,v)}^3$ с её внутренними точками, огибающую однопараметрическое множество α -конусов $K_{\alpha(x,y,v)}^3$. Эта поверхность является «фронтальной» проекцией линейчатой α -гиперповерхности Φ_{α}^3 , огибающей однопараметрическое множество α -гиперконусов вращения K_{α}^3 . На гиперплоскости проекции (xuz) получаем трехмерную поверхность Φ_{xyz}^3 с её внутренними точками — огибающую однопараметрического множества шаров S_{xyz}^3 . Двумерной области в осевой плоскости (xy) с границей — огибающей границы кругов, представляющих собой на плоскости проекций (xy) основания трехмерных конусов вращения $K_{\alpha(x,y,v)}^3$ будет соответствовать в гиперплоскости проекций (xuz) огибающая двумерных циклов \tilde{S}_{xyz}^2 , т.е. та же каналовая поверхность, что и в случае отображения F_R (рис. 3).

Циклографическое моделирование кривой линии. Рассмотрим теперь конкретнее задачу циклографического моделирования кривой линии пространства R^4 на гиперэпюре Наумович. За основу примем отображение $F_{R'}$, не исключая при этом возможность применения отображения F_E .

Предположим, что задана линия

$$P(t) = \{x(t), y(t), z(t), v(t)\}, t \in G \subset R,$$

где G — одномерный промежуток на вещественной числовой прямой R ; x, y, z, v — дифференцируемые функции в окрестности любой точки $(x(t_0), y(t_0), z(t_0), v(t_0))$, $t_0 \in G$, имеющие в самой точке непрерывные

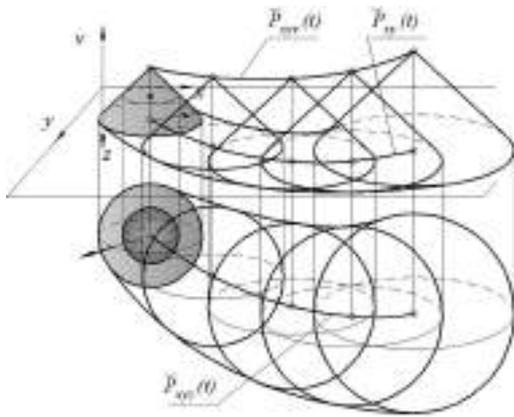


Рис. 3. Циклографическое моделирование линии пространства R^4 на гиперэллипсе Наумович на основе отображения F_E

Fig. 3. Cyclographic modeling of a curve of space R^4 on the Naumovich hyperdrawing on basis of the mapping F_E

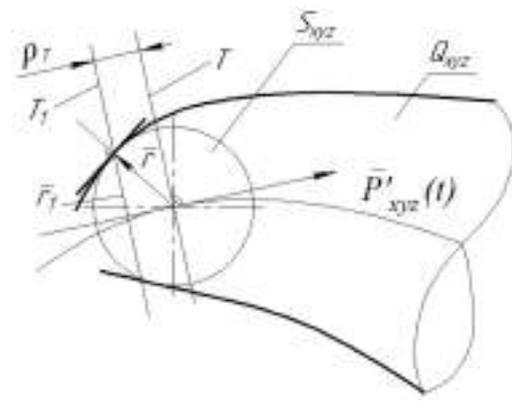


Рис. 4. Схема образования каналовой поверхности
Fig. 4. Pattern of the Channel surface formation

производные. Кривая $\bar{P}(t)$ состоит из обыкновенных точек, для которых выполняется условие:

$$((x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 + (v'(t))^2) \neq 0.$$

Выполним ортогональное проецирование линии $\bar{P}(t)$ на координатную гиперплоскость R^3_{xyz} . Геометрически это проецирование выполняется гиперсвязкой прямых с несобственным центром V^∞ — бесконечно удаленной точкой координатной оси v . Алгебраически — принятием координаты v значения, равного 0. В таком случае в гиперплоскости (xyz) появляется линия $\bar{P}_{xyz}(t)$:

$$\bar{P}_{xyz}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}. \quad (1)$$

Примем каждую точку линии $\bar{P}_{xyz}(t)$ в качестве центра ориентированной сферы с радиусом $r = |v|$. Тогда между множеством точек линии $\bar{P}(t) \subset R^4$ и однопараметрическим множеством ориентированных сфер с центрами на линии $\bar{P}_{xyz}(t)$ будет установлено непрерывное биективное соответствие. Это соответствие является подмножеством более общего непрерывного биективного соответствия между точечным пространством R^4 и множеством ориентированных сфер пространства R^3 .

Огибающая $\bar{P}_c = \{x_1(t, \phi), y_1(t, \phi), z_1(t, \phi)\}$ однопараметрического семейства $\Phi(t)$ ориентированных сфер с центрами на линии $\bar{P}_{xyz}(t)$ и радиусами $r = |v(t)|$ будет представлять собой каналовую поверхность — циклографический образ исходной линии $\bar{P}(t) \subset R^4$ в гиперплоскости R^3_{xyz} .

Уравнение однопараметрического семейства $\Phi(t)$ сфер может быть выражено следующим образом:

$$\Phi(t) : \langle \bar{P}_c - \bar{P}_{xyz}(t), \bar{P}_c - \bar{P}_{xyz}(t) \rangle_{R^3} - \bar{r}(t)^2 = 0, \quad (2)$$

при этом $|\bar{r}(t)| = |v(t)|$ — модуль радиус-вектора $\bar{r}(t)$ точки сферы семейства $\Phi(t)$. Функция (2) является дифференцируемой в области ее задания. Для определения огибающей семейства $\Phi(t)$ добавим к уравнению (2) следующее уравнение:

$$\Phi'(t) : \langle \bar{P}_c - \bar{P}_{xyz}(t), \bar{P}'_{xyz}(t) \rangle_{R^3} + \bar{r}(t) \cdot \bar{r}'(t) = 0. \quad (3)$$

Раскрытие уравнений (2) и (3) приводит к системе уравнений:

$$\begin{aligned} \Phi(t) : (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 - r^2 &= 0, \\ \Phi'(t) : x \cdot (x_1 - x) + y \cdot (y_1 - y) + z \cdot (z_1 - z) - r \cdot r' &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Рассмотрим геометрический смысл этих уравнений. Первое уравнение описывают однопараметрическое семейство ориентированных \bar{S}_{xyz} сфер радиуса $r = |v(t)|$ с центрами на линии $\bar{P}_{xyz}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$, которая получена в результате отображения линии $\bar{P}(t) \subset R^4 \rightarrow \bar{P}_{xyz}(t) \subset R^3_{xyz}$ на основе ортогонального проецирования на гиперплоскость проекции R^3_{xyz} . Каждая из сфер множества получена в результате циклографического отображения текущих точек линии $\bar{P}(t) \subset R^4$ на гиперплоскость R^3_{xyz} . Циклографическое отображение выполняется проведением α -гиперконусов с вершинами в точках линии $\bar{P}(t)$ и осями, перпендикулярными гиперплоскости проекции R^3_{xyz} , с последующим пересечением этих гиперконусов с гиперплоскостью R^3_{xyz} . В пересечении образуются сферы S_{xyz} — циклографические образы точек линии $\bar{P}(t)$. Второе уравнение системы (4) описывает нелинейный пучок (T_1) плоскостей T_1 , каждая из которых проходит перпендикулярно касательному вектору $\bar{P}'_{xyz}(t) = \{x'(t), y'(t), z'(t)\}$ линии $\bar{P}_{xyz}(t)$, проведенному в ее точке $(x(t), y(t), z(t))$. При этом каждая плоскость T_1 (рис. 4) параллельна соответствующей нормальной плоскости T линии $\bar{P}_{xyz}(t)$ и смещена от нее, как следует из геометрического смысла второго уравнения системы (4), на расстояние

$$\rho_T = \frac{|\bar{r} \cdot \bar{r}'|}{\sqrt{(\bar{P}'_{xyz}(t))^2}} \leq r. \quad (5)$$

Из равенства (5) следует необходимое и достаточное условие существования вещественных точек каналовой поверхности:

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - (r')^2 \geq 0. \quad (6)$$

Поскольку плоскость T_1 по условию (6) пересекает сферу S_{xyz} множества по окружности λ , то из схемы на рис. 4 следует значение радиуса r_1 этой окружности:

$$r_1(t) = r(t) \cdot \sqrt{1 - \frac{(r'(t))^2}{(\bar{P}'_{xyz}(t))^2}}. \quad (7)$$

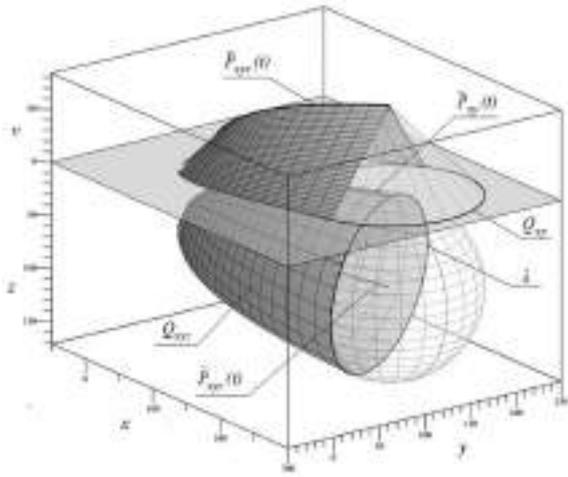


Рис. 5. Циклографическое моделирование пространственной кривой $\bar{P}(t) \subset R^4$ на гиперэпюре Наумович
Fig. 5. Cyclographic modeling of spatial curve $\bar{P}(t) \subset R^4$ on the Naumovich hyperdrawing

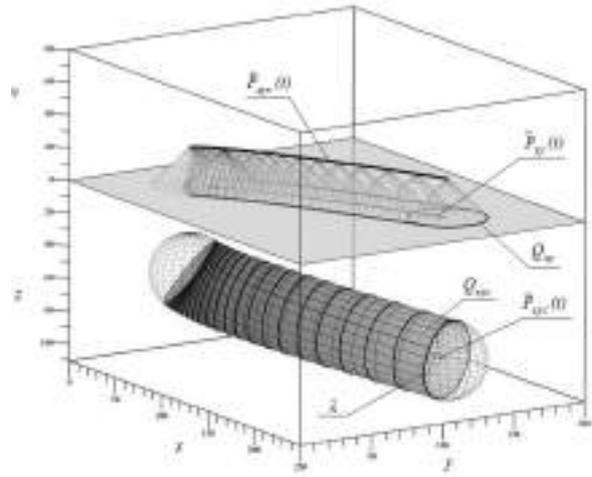


Рис. 6. Циклографическое моделирование плоской кривой $\bar{P}(t) \subset R^4$ на гиперэпюре Наумович
Fig. 6. Cyclographic modeling of a plane curve $\bar{P}(t) \subset R^4$ on the Naumovich hyperdrawing

Очевидно, окружность λ является характеристической линией огибающей Q_{xyz} , определяемой как $\lambda = \Phi(t) \cap \Phi'(t) = T_1 \cap S_{xyz}$.

Геометрическая интерпретация системы уравнений (4) позволяет получить уравнение огибающей Q_{xyz} , представляющей собой циклографический образ линии $\bar{P}(t) \subset R^4$. Рассмотрим получение уравнения этой поверхности.

Пусть параметрические уравнения линии $\bar{P}_{xyz}(t)$ имеют вид:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in G \subset R. \quad (8)$$

Полагаем, что x , y и z — дифференцируемые функции на промежутке определения параметра t . От параметра t можно перейти к внутреннему параметру s_1 кривой $\bar{P}_{xyz}(t)$:

$$ds_1 = |\bar{P}'_{xyz}(t)| \cdot dt = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} \cdot dt. \quad (9)$$

В каждой точке (x, y, z) , удовлетворяющей условию $\bar{P}'_{xyz}(t) = \bar{i} \cdot x'(t) + \bar{j} \cdot y'(t) + \bar{k} \cdot z'(t) \neq 0$, т.е. в обыкновенных точках линии $\bar{P}'_{xyz}(t)$, которые к тому же не являются точками распрямления ($\bar{P}'_{xyz}(t)$ и $\bar{P}''_{xyz}(t)$ не коллинеарны и при этом $\bar{P}''_{xyz}(t) \neq 0$) — в таких точках возможно построение трехгранника Френе

$$\bar{\tau}_1 = \frac{d\bar{P}_{xyz}}{ds_1} = \dot{\bar{P}}_{xyz}; \bar{\nu}_1 = \frac{\ddot{\bar{P}}_{xyz}}{|\ddot{\bar{P}}_{xyz}|}; \bar{\beta}_1 = [\bar{\tau}_1, \bar{\nu}_1]$$

с единичными векторами касательной $\bar{\tau}_1$, главной нормали $\bar{\nu}_1$ и бинормали $\bar{\beta}_1$. Вектор касательной может быть выражен следующим образом:

$$\bar{\tau}_1 = \dot{\bar{P}}_{xyz} = \frac{d\bar{P}_{xyz}}{ds_1} = \bar{i} \cdot \frac{x'}{|\bar{P}'_{xyz}|} + \bar{j} \cdot \frac{y'}{|\bar{P}'_{xyz}|} + \bar{k} \cdot \frac{z'}{|\bar{P}'_{xyz}|} = \bar{i} \cdot \tau_x + \bar{j} \cdot \tau_y + \bar{k} \cdot \tau_z. \quad (10)$$

Вектор главной нормали $\bar{\nu}_1$ можно выразить так:

$$\bar{\nu}_1 = \bar{i} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{d\tau_x}{ds_1} + \bar{j} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{d\tau_y}{ds_1} + \bar{k} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{d\tau_z}{ds_1} = \bar{i} \cdot \nu_x + \bar{j} \cdot \nu_y + \bar{k} \cdot \nu_z. \quad (11)$$

Уравнение вектора бинормали $\bar{\beta}_1$ имеет вид:

$$\bar{\beta}_1 = [\bar{\tau}_1, \bar{\nu}_1] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \tau_x & \tau_y & \tau_z \\ \nu_x & \nu_y & \nu_z \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \beta_x + \bar{j} \cdot \beta_y + \bar{k} \cdot \beta_z, \quad (12)$$

где $k = |\ddot{\bar{P}}_{xyz}|$ — кривизна линии $\bar{P}_{xyz}(t)$ в данной точке.

В уравнении (11) производные $\frac{d\tau_x}{ds_1}$, $\frac{d\tau_y}{ds_1}$ и $\frac{d\tau_z}{ds_1}$ могут быть получены следующим образом:

$$\frac{d\tau_x}{ds_1} = \frac{d\tau_x}{dt} \cdot \frac{dt}{ds_1} = \tau'_x \cdot \dot{t}; \frac{d\tau_y}{ds_1} = \tau'_y \cdot \dot{t}; \frac{d\tau_z}{ds_1} = \tau'_z \cdot \dot{t},$$

при этом $\dot{t} = \frac{1}{|\bar{P}'_{xyz}(t)|}$; производные τ'_x , τ'_y и τ'_z определяются взятием второй производной по t соответствующих функций — выражений τ_x , τ_y и τ_z из уравнения (10).

Запишем уравнение окружности λ радиуса $r_1 = r_1(t)$, принадлежащей плоскости T_1 , в системе координат подвижного трехгранника Френе:

$$x_\tau = -r_T = -\frac{v(t) \cdot v'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}}; \quad (13)$$

$$y_\nu = r_1(t) \cdot \cos \phi;$$

$$z_\beta = r_1(t) \cdot \sin \phi;$$

$$0 \leq \phi \leq 2\pi,$$

где радиус r_1 окружности λ определяется формулой (7).

Запишем формулы преобразования от подвижной системы координат $A x_\nu y_\beta z_\beta$ к неподвижной O_{xyz} , используя матрицу преобразований:

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} \tau_x & \nu_x & \beta_x \\ \tau_y & \nu_y & \beta_y \\ \tau_z & \nu_z & \beta_z \end{vmatrix}$$

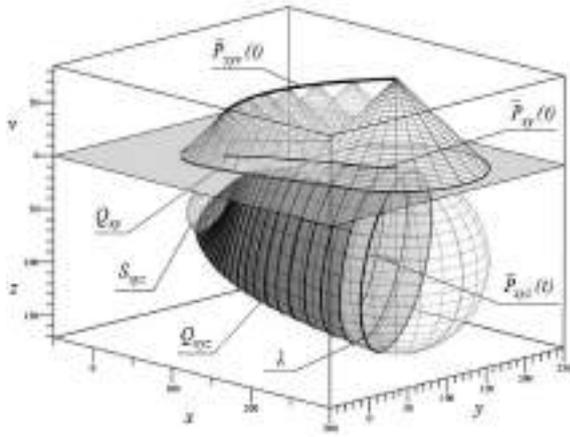


Рис. 7. Циклографическое моделирование пространственной кривой $\bar{P}(t) \subset R^4$ на гиперплоскости Наумович без учета смещения ρ_τ
 Fig. 7. Cyclographic modeling of spatial curve $\bar{P}(t) \subset R^4$ on the Naumovich hyperdrawing without taking into account the displacement ρ_τ

В матричном виде формулы преобразований имеют вид $D = A^{-1} \cdot B + C$, где

$$B = \begin{bmatrix} x_\tau \\ y_v \\ z_\beta \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix},$$

при этом x, y, z — координаты текущей точки A линии $\bar{P}_{xyz}(t)$.

От матричной формы записи формул преобразований можно перейти к развернутой координатной форме:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_\tau \cdot \tau_x + y_v \cdot v_x + z_\beta \cdot \beta_x + x, \\ y_1 &= x_\tau \cdot \tau_y + y_v \cdot v_y + z_\beta \cdot \beta_y + y, \\ z_1 &= x_\tau \cdot \tau_z + y_v \cdot v_z + z_\beta \cdot \beta_z + z. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя в (14) выражения координат из формул (10), (11), (12) и (13), получим развернутые параметрические уравнения огибающей поверхности Q_{xyz} .

Результаты эксперимента

Зададим параметрическую рациональную кривую $\bar{P}(t) \subset R^4$ уравнениями:

$$\begin{aligned} \bar{P}(t) &= \{x(t), y(t), z(t), v(t)\} = \\ &= \{t^4, 2t^3, 3t^2, 24t\}, \quad 1 \leq t \leq 3,5. \end{aligned} \quad (15)$$

Ее образ $\bar{P}_{xyz}(t)$ в гиперплоскости R^3_{xyz} , полученный ортогональным проектированием, описывается уравнениями:

$$\bar{P}_{xyz}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\} = \{t^4, 2t^3, 3t^2\}. \quad (16)$$

Касательный вектор $\bar{P}'_{xyz}(t)$ имеет вид:

$$\bar{P}'_{xyz}(t) = \{4t^3, 6t^2, 6t\}. \quad (17)$$

Производная $\bar{P}''_{xyz}(t)$ имеет вид:

$$P''_{xyz}(t) = \{12t^2, 12t, 6\}. \quad (18)$$

При исходных данных (15) и соответствующих им уравнениям (16), (17) и (18) ставится задача определения циклографического образа линии $\bar{P}(t) \subset R^4$ в пространстве R^3_{xyz} . Определим орты $\bar{\tau}_1, \bar{v}_1, \bar{\beta}_1$ трехгранника Френе без использования внутреннего параметра s_1 линии $\bar{P}(t)$ по методике, отличной от вышеизложенной. Орт касательной линии $\bar{P}_{xyz}(t)$ определяется следующим образом:

$$\bar{\tau}_1 = \frac{\bar{P}'_{xyz}}{|\bar{P}'_{xyz}|} = \left\{ \frac{2t^2}{\sqrt{4t^4 + 9t^2 + 9}}, \frac{3t}{\sqrt{4t^4 + 9t^2 + 9}}, \frac{3}{\sqrt{4t^4 + 9t^2 + 9}} \right\}, \quad (19)$$

Вектор бинормали линии $\bar{P}_{xyz}(t)$ определяется формулой:

$$\bar{\beta}_1 = \frac{[\bar{P}'_{xyz}, \bar{P}''_{xyz}]}{[\bar{P}'_{xyz}, \bar{P}''_{xyz}]}. \quad (20)$$

Выражения в числителе и знаменателе дроби определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} [\bar{P}'_{xyz}, \bar{P}''_{xyz}] &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4t^3 & 6t^2 & 6t \\ 12t^2 & 12t & 6 \end{vmatrix} = \\ &= \{-36t^2, 48t^3, -24t^4\}. \end{aligned} \quad (21)$$

$$[\bar{P}'_{xyz}, \bar{P}''_{xyz}] = 12t^2 \cdot \sqrt{4t^4 + 16t^2 + 9}. \quad (22)$$

Подставляя выражения (21) и (22) в уравнение (20), получим:

$$\bar{\beta}_1 = \left\{ -\frac{3}{\sqrt{4t^4 + 16t^2 + 9}}, \frac{4t}{\sqrt{4t^4 + 16t^2 + 9}}, -\frac{2t^2}{\sqrt{4t^4 + 16t^2 + 9}} \right\}. \quad (23)$$

Введем обозначения:

$$\sqrt{4t^4 + 9t^2 + 9} = N, \quad \sqrt{4t^4 + 16t^2 + 9} = M.$$

С учетом этих обозначений определим вектор главной нормали \bar{v}_1 линии $\bar{P}_{xyz}(t)$:

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 = [\bar{\beta}_1, \bar{\tau}_1] &= \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -\frac{3}{M} & \frac{4t}{M} & -\frac{2t^2}{M} \\ \frac{2t^2}{N} & \frac{3t}{N} & \frac{3}{N} \end{bmatrix} = \\ &= \left\{ \frac{6t \cdot (2 + t^2)}{MN}, \frac{9 - 4t^4}{MN}, \frac{t \cdot (9 + 8t^2)}{MN} \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Полученные уравнения (19), (23) и (24) определяют проекционные компоненты единичных ортов, образующих трехгранник Френе линии $\bar{P}_{xyz}(t)$. Уравнение (13) определяют проекционные компоненты радиус-вектора линии $\bar{P}_{xyz}(t)$. Таким образом, известны все компоненты параметрических уравнений огибающей Q_{xyz} поверхности, представляющей собой циклографический образ линии $\bar{P}(t) \subset R^4$

в гиперплоскости R_{xyz}^3 . Подставляя выражения компонент в уравнение (14), получим искомое уравнение канальной поверхности:

$$\begin{aligned} x_1(t, \phi) &= \frac{(-72t \cdot L \cdot \sin \phi)}{M} - \frac{(576t^3)}{N^2} + \\ &+ \frac{(144t^2(t^2 + 2) \cdot L \cdot \cos \phi)}{(M \cdot N)} + t^4; \\ y_1(t, \phi) &= \frac{96t^2 \cdot L \cdot \sin \phi}{M} - \frac{864t^2}{N^2} + \\ &+ \frac{24t(-4t^4 + 9) \cdot L \cdot \cos \phi}{M \cdot N} + 2t^3; \\ z_1(t, \phi) &= \frac{-48t^3 \cdot L \cdot \sin \phi}{M} - \frac{864t}{N^2} - \\ &- \frac{24t^2(8t^2 + 9) \cdot L \cdot \cos \phi}{M \cdot N} + 3t^2; \end{aligned} \quad (25)$$

$$1 \leq t \leq 3,5; 0 \leq \phi \leq 2\pi,$$

где $L = \sqrt{1 - 144 \frac{1}{N \cdot t^2}}$.

На рис. 5 приведено изображение канальной поверхности Q_{xyz} , представляющей собой циклографический образ пространственной линии $\bar{P}(t) \subset R^4$. При этом линия $\bar{P}(t)$ имеет ортогональные трехмерные проекции $\bar{P}_{xyz}(t)$ и $\bar{P}_{xyv}(t) \subset R_{xyz}^3$. Ортогональным образом канальной поверхности Q_{xyz} на осевой плоскости (xv) является область Q_{xy} . На рис. 6 на гиперэпюре Наумович приведено изображение циклографического образа Q_{xyz} заданной плоской линии $\bar{P}(t) \subset R^4$,

$$\bar{P}(t) = \{x(t), y(t), z(t), v = const\} = \{t^4, 2t^3, 3t^2, 24\}.$$

В рассматриваемом случае Q_{xyz} представляет собой трубчатую поверхность. На рис. 7 приведено изображение на гиперэпюре Наумович циклической поверхности $Q_{xyz'}$ полученной без учета смещения ρ_T (5), т.е. $\rho_T = 0$. В этом случае Q_{xyz} не является циклографическим образом линии $\bar{P}(t) \subset R^4$, поскольку Q_{xyz} не является огибающей множества сфер (S_{xyz}).

Основные результаты и выводы

1. На примере линии пространства R^4 показана возможность циклографического моделирования нелинейных объектов этого пространства на основе гиперэпюра Наумович.

2. Получены параметрические уравнения канальной поверхности, представляющей собой циклографический образ в пространстве R^3 линии пространства R^4 . Уравнения представляют собой конструктивно-аналитическую модель этой линии, удобной для использования в CAD/CAM системах и в CAGD.

3. Выполнен вычислительный эксперимент по определению циклографической модели параметрической рациональной кривой пространства R^4 на трехмерном чертеже, реализованном в виртуальном электронном 3D-пространстве. Рассмотрены вари-

анты этой модели, приводящие к получению частных видов канальной поверхности, моделирующих соответствующие кривые пространства R^4 .

Список источников

1. Fiedler W. *Cyklographie oder Construction der Aufgabenüber Kreise und Kugeln und elementare Geometrie der Kreis- und Kugelsysteme*. Leipzig, Druckund Verlag von B. G. Teubner, 1882. 284 S.
2. Eckhart L. *Konstruktive Abbildungsverfahren*. Berlin Hidelberg: Springer-Verlag, 1926. 120 S. ISBN 978-3-7091-5965-1.
3. *Vorlesungen über Darstellende Geometrie // By Dr. Emil Muller. II. Band: Die Zyklographie / Edited from the manuscript by Dr. Josef Leopold Krames*. Leipzig and Vienna, Franz Deuticke, 1929. 476 S.
4. Choi H. I., Choi S. W., Moon H. P. *Mathematical theory of medial axis transform // Pacific Journal of Mathematics*. 1997. Vol. 181 (1). P. 57–88. DOI: 10.2140/pjm.1997.181.57.
5. Choi H. I., Chang Y. H., Hwan P. M. [et al.]. *Medial axis transform and offset curves by Minkowski Pythagorean hodograph curves // CAD Computer Aided Design*. 1999. Vol. 31 (1). P. 59–72. DOI: 10.1016/S0010-4485(98)00080-3.
6. Cho H. Ch., Choi H. I., Kwon S.-H. [et al.]. *Clifford algebra, Lorentzian geometry and rational parametrization of canal surfaces // Computer Aided Geometric Design*. 2004. Vol. 21 (4). P. 327–339. DOI: 10.1016/j.cagd.2003.11.001.
7. Pottmann H., Peternell M. *Applications of laguerre geometry in CAGD // Computer Aided Geometric Design*. 1998. Vol. 15. P. 165–186. DOI: 10.1016/S0167-8396(97)00023-X.
8. Pottmann H., Wallner J. *Computational line geometry*. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 2010. 572 p. ISBN 9783540420583.
9. Peternell M., Pottmann H. *Computing rational parametrizations of Canal Surfaces // Journal of Symbolic Computation*. 1997. Vol. 23. P. 255–266. DOI: 10.1006/jsco.1996.0087.
10. Peternell M. *Rational two-parameter families of spheres and rational offset surfaces // Journal of Symbolic Computation*. 2010. Vol. 45. P. 1–18.
11. Panchuk K. L., Lyashkov A. A., Lyubchinov E. V. *Geometric model of pseudo-distance measurement in satellite location systems // IOP Conf. Series: Journal of Physics*. 2018. Vol. 998. DOI:10.1088/1742-6596/998/1/012021.
12. Panchuk K. L., Niteyskiy A. S., Lyubchinov E. V. *Cyclographic modeling of surface forms of highways // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. 2017. Vol. 262. DOI:10.1088/1757-899X/262/1/012108.
13. Held M. *On the computational geometry of pocket machining. Lecture notes in computer science*. Springer Verlag. Berlin. 1991. Vol. 500. 184 p. ISBN 978-3-540-54103-5. DOI: 10.1007/3-540-54103-9.
14. Пеклич В. А. *Высшая начертательная геометрия: моногр. М.: АСВ, 2000. 344 с.*
15. Короткий В. А. *Компьютерное моделирование фигур четырехмерного пространства // Вестник компьютерных и информационных технологий*. 2014. № 7 (21). С. 14–20. DOI: 10.14489/vkit.2014.07.pp.014-020.
16. Panchuk K. L., Kaygorodseva N. V. *Cyclographic descriptive geometry*. Omsk: OmSTU Publishing House. 2017. 232 p.

ПАНЧУК Константин Леонидович, доктор технических наук, доцент (Россия), профессор кафедры «Инженерная геометрия и САПР». SPIN-код: 5623-0008

ORCID: 0000-0001-9302-8560

AuthorID (SCOPUS): 55857766100

Адрес для переписки: Panchuk_KL@mail.ru

ЛЮБЧИНОВ Евгений Владимирович, аспирант, преподаватель кафедры «Инженерная геометрия и САПР».

SPIN-код: 8144-6370

AuthorID (SCOPUS): 57199399265

Адрес для переписки: Lubchinov.E.V@yandex.ru

Для цитирования

Панчук К. Л., Любчинов Е. В. Элементы пространственной циклографии // Омский научный вестник. Сер. Авиационно-ракетное и энергетическое машиностроение. 2018. Т. 2, № 3. С. 63–70. DOI: 10.25206/2588-0373-2018-2-3-63-70.

Статья поступила в редакцию 13.06.2018 г.

© К. Л. Панчук, Е. В. Любчинов

ELEMENTS OF SPATIAL CYCLOGRAPHY

K. L. Panchuk, E. V. Lyubchinov

Omsk State Technical University,
Russia, Omsk, Mira Ave., 11, 644050

In modern CAD/CAM systems and in CAGD (Computer Aided Geometric Design), models of geometric objects (lines, surfaces) of space R^4 in space R^3 and vice versa are used. The analysis of geometric models used in such systems allows us to conclude that research is relevant to the development in R^3 of analytical models of lines and surfaces of the space R^4 . In this paper, we show the possibility of obtaining of constructive-analytical model using the three-dimensional drawing of the space R^4 , proposed by N. V. Naumovich. Based on this drawing, a constructive interpretation of the proposed analytical model is given and its implementation is realized in a virtual electronic 3D-space. The model of the R^4 space curve proposed in this paper is based on the theoretical positions of the spatial cyclography realized in Naumovich's three-dimensional drawing. This proposed model differs from existing ones using the analytical method of modeling. The essence of the proposed constructive-analytical modeling consists in the geometric representation and interpretation in the three-dimensional drawing of the cyclographic images of points, lines, the set of points and lines of the space R^4 . The constructive-analytical modeling of the R^4 space curve on the basis of the cyclographic mapping and the possibility of its realization on Naumovich's three-dimensional drawing allow to get a full picture of the interrelation and mutual influence of all the elements of the model. Such a representation is based on the implementation of a 3D-drawing in virtual electronic 3D-space with the means of modern graphical CAD and allows solving the optimization of the developed models of geometric objects in relation to the requirements of modern CAD/CAM systems and CAGD.

Keywords: cyclography, lines and surfaces, geometric modeling, multidimensional space, three-dimensional Naumovich's drawing, channel surface.

References

1. Fiedler W. *Cyklographie oder construction der aufgabenüberkreise und kugeln und elementare geometrie der kreis- und kugelsysteme*. Leipzig, Druckund Verlag von B. G. Teubner, 1882. 284 S. (In Germ.).
2. Eckhart L. *Konstruktive abbildungsverfahren*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1926. 120 S. ISBN 978-3-7091-5965-1. (In Germ.).
3. *Vorlesungen über Darstellende Geometrie* // By Dr. Emil Muller. II. Band: Die Zyklographie / Edited from the manuscript by Dr. Josef Leopold Krames. Leipzig and Vienna, Franz Deuticke, 1929. 476 S. (In Germ.).
4. Choi H. I., Choi S. W., Moon H. P. Mathematical theory of medial axis transform // *Pacific Journal of Mathematics*. 1997. Vol. 181 (1). P. 57–88. DOI: 10.2140/pjm.1997.181.57. (In Engl.).
5. Choi H. I., Chang Y. H., Hwan P. M. [et al.]. Medial axis transform and offset curves by Minkowski Pythagorean hodograph curves // *CAD Computer Aided Design*. 1999. Vol. 31 (1). P. 59–72. DOI: 10.1016/S0010-4485(98)00080-3. (In Engl.).
6. Cho H. Ch., Choi H. I., Kwon S.-H., [et al.]. Clifford algebra, Lorentzian geometry and rational parametrization of canal surfaces // *Computer Aided Geometric Design*. 2004. Vol. 21 (4). P. 327–339. DOI: 10.1016/j.cagd.2003.11.001. (In Engl.).
7. Pottmann H., Peternell M. Applications of laguerre geometry in CAGD // *Computer Aided Geometric Design*. 1998. Vol. 15. P. 165–186. DOI: 10.1016/S0167-8396(97)00023-X. (In Engl.).
8. Pottmann H., Wallner J. *Computational line geometry*. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 2010. 572 p. ISBN 9783540420583. (In Engl.).
9. Peternell M., Pottmann H. Computing rational parametrizations of Canal Surfaces // *Journal of Symbolic Computation*. 1997. Vol. 23. P. 255–266. DOI: 10.1006/jsc.1996.0087. (In Engl.).
10. Peternell M. Rational two-parameter families of spheres and rational offset surfaces // *Journal of Symbolic Computation*. 2010. Vol. 45. P. 1–18. (In Engl.).
11. Panchuk K. L., Lyashkov A. A., Lyubchinov E. V. Geometric model of pseudo-distance measurement in satellite location systems // *IOP Conf. Series: Journal of Physics*. 2018. Vol. 998. DOI:10.1088/1742-6596/998/1/012021. (In Engl.).
12. Panchuk K. L., Niteyskiy A. S., Lyubchinov E. V. Cyclographic modeling of surface forms of highways // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. 2017. Vol. 262. DOI:10.1088/1757-899X/262/1/012108. (In Engl.).
13. Held M. *On the computational geometry of pocket machining*. Lecture notes in computer science. Springer Verlag. Berlin. 1991. Vol. 500. 184 p. ISBN 978-3-540-54103-5. DOI: 10.1007/3-540-54103-9. (In Engl.).
14. Peklich V. A. *Vysshaya nachertatel'naya geometriya* [Higher descriptive geometry. Moscow ASV Publ., 2000. 344 p. (In Russ.).
15. Korotkiy V. A. Komp'yuternoye modelirovaniye figur chetyrekhmernogo prostranstva [Computer modeling of four-dimensional figures // *Vestnik komp'yuternykh i informatsionnykh tekhnologiy. Herald of Computer and Information Technologies*. 2014. No. 7 (21). P. 14–20. DOI: 10.14489/vkit.2014.07.pp.014-020. (In Russ.).
16. Panchuk K. L., Kaygorodtseva N. V. *Cyclographic descriptive geometry*. Omsk, OmsSTU Publ. 2017. 232 p. (In Engl.).

PANCHUK Konstantin Leonidovich, Doctor of Technical Sciences, Professor of Engineering Geometry and CAD Department.

SPIN-code: 5623-0008; ORCID: 0000-0001-9302-8560
AuthorID (SCOPUS): 55857766100

Address for correspondence: Panchuk_KL@mail.ru
LYUBCHINOV Evgeny Vladimirovich, Graduate Student, Lecturer of Engineering Geometry and CAD Department.

SPIN-code: 8144-6370; AuthorID (SCOPUS): 57199399265
Address for correspondence: Lyubchinov.E.V@yandex.ru

For citations

Panchuk K. L., Lyubchinov E. V. Elements of spatial cyclography // *Omsk Scientific Bulletin. Series Aviation-Rocket and Power Engineering*. 2018. Vol. 2, no. 3. P. 63–70. DOI: 10.25206/2588-0373-2018-2-3-63-70.

Received 13 June 2018.

© K. L. Panchuk, E. V. Lyubchinov