

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЕЗИНОКОРДНОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ ДЛЯ ПНЕВМАТИЧЕСКИХ АМОРТИЗАТОРОВ

В. С. Корнеев, В. В. Шалай

Омский государственный технический университет,  
Россия, 644050, г. Омск, пр. Мира, 11

Приведён краткий обзор основополагающих научных работ по механике пневматических шин. Предложена математическая модель резинокордной оболочки, которая отличается от математической модели безмоментной теории сетчатых оболочек, используемой в механике пневматических шин, учётом растяжимости нитей корда и упругого сопротивления резиновой матрицы без ограничения величины возникающих деформаций. Прилагаемые нагрузки полагаются статическими и осесимметричными. Уравнения равновесия составлены в виде, исключающем возникновение сингулярности в особых точках и не требующем специальных приёмов и средств при интегрировании. Для построения определяющих соотношений, отражающих структурную неоднородность материала и описываемых гладкими функциями пространственных координат, используется принцип виртуальных перемещений. Указан порядок решения уравнений математической модели.

Дан критический анализ известных вариантов теоретического описания начальной геометрии резинокордной оболочки после её изготовления. Предложен модифицированный метод, основанный на рассмотрении процесса деформирования представительного элемента заготовки и общепринятых допущениях. Указано на избыточность и недопустимость допущения о постоянстве шага между нитями корда или допущения о постоянстве площади элементарной ромбической ячейки заготовки.

Разработанная математическая модель предназначена для проектирования пневматических элементов с оптимальными рабочими характеристиками.

**Ключевые слова:** механика пневматических шин, пневматические элементы, резинокордная оболочка, математическая модель, метод расчета.

## Введение

В системах виброзащиты и виброизоляции широко используются пневматические элементы с резинокордными оболочками [1–3], а также резино-гидравлические виброопоры [4]. Конструктивные схемы пневматических элементов с резинокордными оболочками разнообразны, наиболее распространёнными являются резинокордные оболочки баллонного и рукавного типов (рис. 1).

Для проектирования виброопор с оптимальными рабочими характеристиками должна привлекаться соответствующая теория высокоэластичных оболочек. Наиболее разработанной является безмоментная теория сетчатых оболочек [5, 6], которая применяется в механике пневматических шин для расчёта равновесных конфигураций диагональных шин и усилий в нитях корда под действием внутреннего избыточного давления [7–12]. Данная теория основана на предположении, что армирующие кордные нити

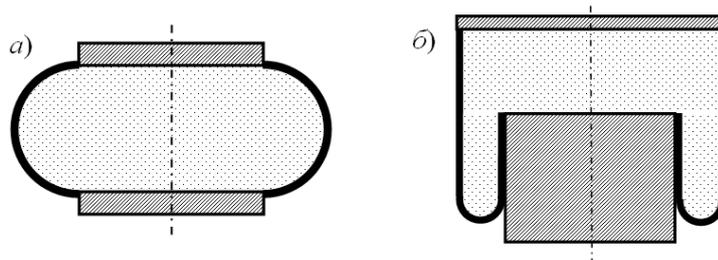


Рис. 1. Пневматический элемент с резинокордной оболочкой:  
а — баллонного типа; б — рукавного типа

Fig. 1. Air springs with rubber-shell:  
a — balloon type; b — hose type

нерастяжимы, а влиянием резины можно полностью пренебречь, так как жёсткость армирующих волокон значительно больше, чем жёсткость резиновой матрицы<sup>1</sup>.

**Замечание.** В зарубежной научно-технической литературе [9] указанный приближённый подход теории сетчатых оболочек называется РНВ-моделью в честь её разработчиков: сотрудника американской компании «Goodyear Tire & Rubber Co.» Перди (J. F. Purdy), немецкого специалиста компании «Deutsche Dunlop Gummi Co. AG» Хофферберта (W. Hofferberth) и советского учёного, сотрудника НИИ шинной промышленности (НИИШП) Бидермана (V. L. Biderman). Такая избыточность исследований, проведённых в разных странах на протяжении десятков лет, заслуживает того, чтобы детальнее остановиться на прояснении её причин. Метод расчёта исходной формы накачанной шины был разработан, чтобы помочь конструктору шин определить основополагающие геометрические соотношения между параметрами пресс-формы и сборочного барабана для последующего обеспечения технологии изготовления пневматических шин. Подобного рода информация составляет коммерческую тайну и поэтому была засекречена [9, 10]. После появления в 1963 году фундаментального коллективного труда [7] и его перевода в 1969 году на английский язык на первый план вышли соображения научного приоритета. Так, например, стало известно о существовании неопубликованного отчёта Перди, датированного 1928 годом, и об обширном неопубликованном отчёте сотрудников британской фирмы «Dunlop», датированном 1946 годом. В докторской диссертации В. Л. Бидермана<sup>2</sup> отмечается: «Литература, посвящённая расчёту резинокордных конструкций, также очень скудна... Первые попытки расчёта резинокордных оболочек вращения, и в частности пневматических шин, с использованием безмоментной теории относятся к 20-м годам. Однако при этом игнорировалась анизотропия конструкции оболочки, что привело к ошибочным результатам... Впервые метод расчёта конфигурации симметрично нагруженных оболочек и напряжений в них, опирающийся на учёт равновесия нити корда, был предложен нами для пневматических шин в 1948–1949 годах. Этот метод в дальнейшем был использован А. А. Лапиным для расчёта пневматических амортизаторов. В последнее время (1956 г.) аналогичные соображения, но не доведённые до расчётных формул, предложены в ФРГ Хоффербертом». Б. Л. Бухин в своей докторской диссертации<sup>3</sup> отмечает, что только в 1969 стали известны такие фундаментальные работы, как неопубликованный отчёт британской компании «Dunlop» 1946 года и статья Перди 1963 года; о более ранней работе Перди (неопубликованном отчёте за 1928 год) и других работах «мы знаем лишь по ссылкам и обзорным статьям [8]». В коллективной монографии [9] признаётся, что теория равновесных конфигураций накачанной шины разработана Бидерманом, Перди и Хоффербертом независимо друг от друга. Одновременно с этим допускаются казусные формулировки, к примеру, следующего вида: *уравнения, впервые полученные Перди (со ссылкой на его работу 1963 года), впоследствии*

*обсуждали многие исследователи (со ссылкой на работы других авторов, в том числе на работу Бидермана 1957 года).* Аналогичное положение дел сложилось и в теории пневматических амортизаторов: практически все опубликованные и общедоступные материалы принадлежат отечественным авторам [2, 3, 5, 6, 13–16]. К сожалению, до сих пор сохраняется ситуация, как и десятки лет назад: «Несмотря на широкое применение пневматических подвесок за рубежом, содержательные материалы по их созданию и исследованию в литературе не приводятся. Существующие публикации носят в основном рекламный характер и не имеют практического значения» [1]. Поэтому на текущий момент времени отсутствует возможность обсудить приоритетные вопросы исчерпывающим образом.

Дальнейшее развитие безмоментной теории сетчатых оболочек происходило в направлениях, учитывающих растяжимость армирующих нитей корда и упругое сопротивление резиновой матрицы. В [7] нити корда полагаются нерастяжимыми, а деформации резины — достаточно малыми, чтобы можно было использовать закон Гука. Адкинс и Ривлин предложили модель однонаправленного резинокордного монослоя, в которой кроме допущения о нерастяжимости кордных нитей предполагается, что резина несжимаема и следует кривой деформирования, полученной Муни [17]. В [18, 19] рассматривается модель, в которой срединная поверхность оболочки армирована двумя семействами малорастяжимых волокон, следующих закону Гука, а деформирование резины подчиняется произвольно взятому упругому потенциалу. В вышеупомянутой докторской диссертации Б. Л. Бухина и в [14–16] предлагаются математические модели, в которых не накладываются никакие ограничения на закон упругого деформирования нитей корда, а жёсткость резиновой матрицы игнорируется.

Настоящая статья посвящена актуальной задаче построения математической модели резинокордной оболочки вращения с учётом упругого сопротивления армирующих нитей корда и резиновой матрицы без ограничений на величину возникающих деформаций. При этом нагрузки, прикладываемые к пневматическому элементу, полагаются статическими и осесимметричными.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим оболочку вращения, меридиан срединной поверхности которой в ненагруженном состоянии определяется уравнениями  $r_0(\xi_0)$ ,  $z_0(\xi_0)$ , при естественном методе описания в цилиндрической системе координат  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  (рис. 2а). Здесь  $\xi_0$  — криволинейная координата произвольной точки меридиана  $M_0(r_0, z_0)$ , равная длине дуги меридиана  $E'_0 M_0$  в отсчётной конфигурации (до нагружения). Общая длина меридиана между конечными точками  $E'_0$ ,  $E''_0$  равна  $l_0$ . Точки  $A'$ ,  $A''$  соответствуют точкам закрепления (точкам соприкосновения, точкам схода) резинокордной оболочки к металлической арматуре (рис. 1).

После нагружения (например, внутренним избыточным давлением  $p_u$  и осевой силой  $P$ ) срединная поверхность оболочки принимает форму

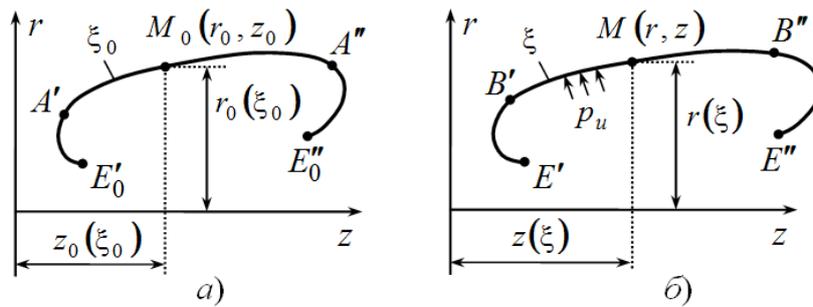


Рис. 2. Меридиан срединной поверхности оболочки вращения:  
 а — до нагружения (отсчётная конфигурация);  
 б — после нагружения (актуальная конфигурация)  
 Fig. 2. Meridian of the middle surface of the shell of revolution:  
 а — before loading (readout configuration);  
 б — after loading (actual configuration)

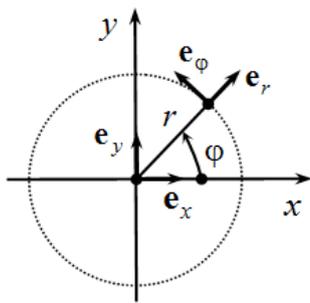


Рис. 3. Направляющие орты цилиндрической и декартовой систем координат  
 Fig. 3. Guidelines of the cylindrical and Cartesian coordinate systems

некоторой поверхности вращения с меридианом  $r(\xi)$ ,  $z(\xi)$  (рис. 2б). Здесь  $\xi$  — криволинейная координата произвольной точки меридиана  $M(r, z)$ , равная длине дуги меридиана  $E'M$  в актуальной конфигурации (после нагружения). Общая длина меридиана между конечными точками  $E'$ ,  $E''$  равна  $l$ . Точки  $B'$ ,  $B''$  соответствуют точкам закрепления (точкам соприкосновения, точкам схода) резинокордной оболочки к металлической арматуре. Благодаря осевой симметрии каждая материальная точка в меридианном сечении срединной поверхности оболочки переходит из начального положения  $M_0$  с координатами  $r_0$ ,  $z_0$  в конечное положение  $M$  с координатами  $r$ ,  $z$ , не выходя за пределы меридианного сечения (рис. 2). При конструктивной возможности перекатывания резинокордной оболочки по металлической арматуре (рис. 1б) точки  $A'$  и  $B'$ ,  $A''$  и  $B''$  являются несовпадающими материальными точками меридиана, что составляет отличительную особенность модели пневматической шины от модели пневматического элемента, существенно осложняя формулировку и математическую запись граничных условий.

Для математического описания напряжённо-деформированного состояния оболочки требуется установить связь между характеристиками деформации срединной поверхности оболочки и перемещениями её точек, составить уравне-

ния равновесия и выписать определяющие соотношения, характеризующие свойства материала оболочки.

## 2. Геометрические соотношения

Направляющие орты  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$  и  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  цилиндрической  $(r, \varphi, z)$  и декартовой  $(x, y, z)$  систем координат связаны между собой соотношениями (рис. 3):

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r(\varphi) = \cos\varphi \mathbf{e}_x + \sin\varphi \mathbf{e}_y; \\ \mathbf{e}_\varphi(\varphi) = -\sin\varphi \mathbf{e}_x + \cos\varphi \mathbf{e}_y. \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_\varphi(\varphi)}{d\varphi} &= -(\cos\varphi \mathbf{e}_x + \sin\varphi \mathbf{e}_y) = -\mathbf{e}_r(\varphi), \\ \mathbf{e}_r(\varphi) \times \mathbf{e}_\varphi(\varphi) &= \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{e}_z$  — направляющий орт оси вращения оболочки  $z$ .

Орт касательной  $\mathbf{e}_1$  и орт нормали  $\mathbf{n}$  к меридиану равны (рис. 4а)

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1(\xi, \varphi) = \cos\varphi_1(\xi) \mathbf{e}_z + \sin\varphi_1(\xi) \mathbf{e}_r(\varphi); \\ \mathbf{n}(\xi, \varphi) = -\sin\varphi_1(\xi) \mathbf{e}_z + \cos\varphi_1(\xi) \mathbf{e}_r(\varphi), \end{cases} \quad (2)$$

где  $\varphi_1$  — угол между касательной к меридиану и осью вращения оболочки, определяемый формулой (рис. 4в)

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{dr}{dz} = \frac{dr(\xi)/d\xi}{dz(\xi)/d\xi}. \quad (3)$$

Для второй касательной к срединной поверхности (рис. 4б) направляющий орт  $\mathbf{e}_2$  со ссылкой на (2) равен

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{n} \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r = -\mathbf{e}_\varphi. \quad (4)$$

С другой стороны, базисные векторы цилиндрической системы координат можно выразить

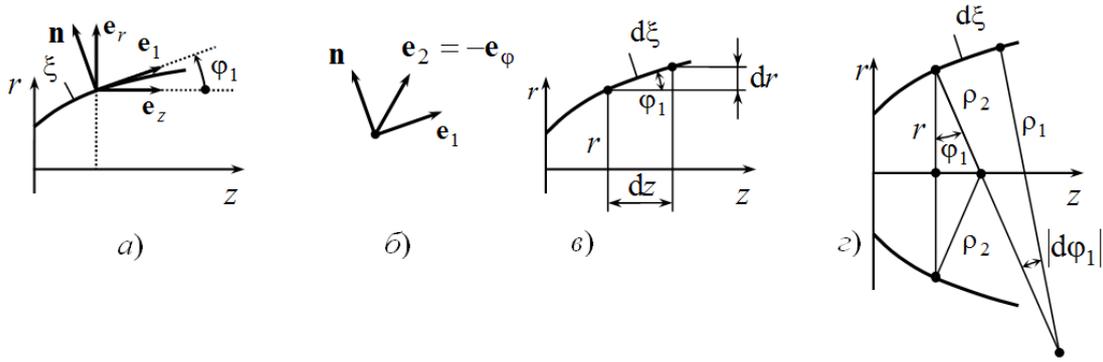


Рис. 4. Геометрические параметры срединной поверхности оболочки:

- а — орты касательной и нормали к меридиану;
- б — орты касательных и нормали к срединной поверхности;
- в — угол наклона касательной к меридиану;
- г — радиусы кривизны меридианного сечения оболочки и нормального конического сечения оболочки

Fig. 4. Geometric parameters of the middle surface of the shell:

- a — orts of tangent and normal to meridian;
- b — orts of tangents and normals to the median surface;
- c — the angle of inclination of the tangent to the meridian;
- g — the radii of curvature of the meridian section of the shell and normal conical section of the shell

через базисные векторы срединной поверхности (рис. 4а):

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_1 \sin \varphi_1 + \mathbf{n} \cos \varphi_1; \\ \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_1 \cos \varphi_1 - \mathbf{n} \sin \varphi_1. \end{cases} \quad (5)$$

На основании (1), (2), (4), (5) находим

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{e}_1(\xi, \varphi)}{\partial \xi} = \frac{d\varphi_1(\xi)}{d\xi} [-\sin \varphi_1(\xi) \mathbf{e}_z + \cos \varphi_1(\xi) \mathbf{e}_r(\varphi)] = \\ = \frac{d\varphi_1(\xi)}{d\xi} \mathbf{n}(\xi, \varphi); \\ \frac{\partial \mathbf{n}(\xi, \varphi)}{\partial \xi} = -\frac{d\varphi_1(\xi)}{d\xi} [\cos \varphi_1(\xi) \mathbf{e}_z + \sin \varphi_1(\xi) \mathbf{e}_r(\varphi)] = \\ = -\frac{d\varphi_1(\xi)}{d\xi} \mathbf{e}_1(\xi, \varphi); \\ \frac{d\mathbf{e}_2(\varphi)}{d\varphi} = \mathbf{e}_r(\varphi) = \mathbf{e}_1(\xi, \varphi) \sin \varphi_1(\xi) + \mathbf{n}(\xi, \varphi) \cos \varphi_1(\xi). \end{cases} \quad (6)$$

Далее понадобятся равенства (рис. 4в)

$$\begin{cases} d\xi = \frac{dz}{\cos \varphi_1}, \\ d\xi = \frac{dr}{\sin \varphi_1} \end{cases} \quad (7)$$

для элементарной длины меридиана, а также равенства (рис. 4г)

$$\begin{cases} d\xi = \rho_1 |d\varphi_1| = -\rho_1 d\varphi_1, \\ \frac{r}{\rho_2} = \cos \varphi_1, \end{cases} \quad (8)$$

определяющие главные радиусы кривизны срединной поверхности оболочки: радиус кривизны

меридиана  $\rho_1$  и радиус кривизны конического нормального сечения  $\rho_2$ . Знак минус в первом равенстве (8) отражает тот факт, что для выпуклой кривой меридиана зависимость  $\varphi_1(\xi)$  является убывающей функций и поэтому  $|d\varphi_1| = -d\varphi_1$ . Фактически это результат соглашения, по которому радиус кривизны выпуклой плоской кривой полагается положительным, а радиус кривизны вогнутой плоской кривой — отрицательным [20].

Равенства (7), (8) приводят к дифференциальным уравнениям

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\xi} = \cos \varphi_1, \\ \frac{dr}{d\xi} = \sin \varphi_1, \end{cases} \quad (9)$$

а также к выражениям

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_1}{d\xi} = -\kappa_1, \\ \kappa_2 = \frac{\cos \varphi_1}{r} \end{cases} \quad (10)$$

для главных значений кривизны срединной поверхности оболочки — кривизны меридиана и кривизны нормального конического сечения соответственно:

$$\begin{cases} \kappa_1 = 1/\rho_1, \\ \kappa_2 = 1/\rho_2. \end{cases} \quad (11)$$

Геометрические соотношения (2) – (10) выписаны в обозначениях, относящихся к актуальной конфигурации (рис. 2б). Очевидно, что аналогичные соотношения справедливы и по отношению к отсчётной конфигурации (рис. 2а), если в соответствующих обозначениях добавить индекс «0». К примеру,

$$\frac{dz_0}{d\xi_0} = \cos\varphi_1^0,$$

$$\frac{dr_0}{d\xi_0} = \sin\varphi_1^0,$$

$$\frac{d\varphi_1^0}{d\xi_0} = -\kappa_1^0,$$

$$\kappa_2^0 = \frac{\cos\varphi_1^0}{r_0},$$

$$\kappa_1^0 = 1/\rho_1^0,$$

$$\kappa_2^0 = 1/\rho_2^0.$$

Рассмотрим бесконечно малый элемент меридиана оболочки (рис. 4в). До нагружения он имеет длину  $d\xi_0$ , а после приложения нагрузки — длину  $d\xi$  (рис. 4б). В качестве характеристики деформации меридиана можно использовать кратность удлинения меридиана

$$\lambda_1 = \frac{d\xi}{d\xi_0}, \quad (12)$$

либо относительное удлинение меридиана

$$\varepsilon_1 = \frac{d\xi - d\xi_0}{d\xi_0}. \quad (13)$$

Характеристики деформации (12), (13) связаны между собой очевидными равенствами

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \lambda_1 - 1, \\ \lambda_1 &= 1 + \varepsilon_1 \end{aligned} \quad (14)$$

и поэтому абсолютно равноправны.

Аналогичным образом в качестве характеристики деформации оболочки в тангенциальном направлении можно использовать как кратность удлинения бесконечно малого элемента параллели (рис. 4г)

$$\lambda_2 = \frac{rd\varphi}{r_0d\varphi} = \frac{r}{r_0}, \quad (15)$$

так и относительное удлинение параллели

$$\varepsilon_2 = \frac{rd\varphi - r_0d\varphi}{r_0d\varphi} = \frac{r}{r_0} - 1. \quad (16)$$

Выражения для характеристик деформации (15), (16) записаны с учётом осевой симметрии оболочки; они связаны между собой равенствами

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \lambda_2 - 1, \\ \lambda_2 &= 1 + \varepsilon_2 \end{aligned}$$

которые подобны равенствам (14). В ряде случаев формулы (12), (15) более удобны для практического использования, чем формулы (13), (16).

Введённых в рассмотрение характеристик деформации (12), (15) и их эквивалентов (13), (16) достаточно для описания деформированного состояния тонкостенных резинокордных оболочек, у которых мембранные деформации срединной поверхности преобладают над изгибными деформациями, которыми можно пренебречь без особой потери точности [5–16, 18, 19].

### 3. Уравнения равновесия

Выделим бесконечно малый элемент оболочки, заключённый между двумя меридианными сечениями  $\varphi = \text{const}$  и двумя нормальными координатными сечениями  $\xi = \text{const}$  (рис. 5). Для его равновесия необходимо, чтобы сумма всех приложенных сил была равна нулю:

$$\begin{aligned} p_u \mathbf{n} d\xi \rho_2 d\varphi_2 + T_1' \mathbf{e}_1' \rho_2' d\varphi_2' - T_1 \mathbf{e}_1 \rho_2 d\varphi_2 - \\ - T_2' d\xi \mathbf{e}_2' + T_2 d\xi \mathbf{e}_2 = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь  $T_1$  — погонное (на единицу длины) меридианное усилие,  $T_2$  — погонное тангенциальное (окружное) усилие.

Принимая во внимание, что (рис. 5)

$$\rho_2 d\varphi_2 = rd\varphi,$$

$$\rho_2' d\varphi_2' = r'd\varphi,$$

и учитывая, что, благодаря осевой симметрии  $T_2' = T_2$ , уравнение равновесия (17) можно представить в виде

$$\begin{aligned} p_u \mathbf{n} d\xi r d\varphi + (T_1 \mathbf{e}_1 r|_{\xi+d\xi} - T_1 \mathbf{e}_1 r|_{\xi}) d\varphi - \\ - T_2 (\mathbf{e}_2|_{\varphi+d\varphi} - \mathbf{e}_2|_{\varphi}) d\xi = 0 \end{aligned}$$

или, в соответствии с правилами дифференцирования,

$$\begin{aligned} p_u \mathbf{m} d\xi d\varphi + \frac{\partial}{\partial \xi} (T_1 r \mathbf{e}_1) d\xi d\varphi - \\ - T_2 \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \varphi} d\varphi d\xi = 0. \end{aligned}$$

После сокращения на  $d\xi d\varphi$  приходим к векторному уравнению равновесия

$$p_u \mathbf{m} + \frac{\partial}{\partial \xi} (T_1 r \mathbf{e}_1) - T_2 \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \varphi} = 0,$$

которое с помощью (6), (8) можно записать следующим образом:

$$r \left( p_u - \frac{T_1}{\rho_1} - \frac{T_2}{\rho_2} \right) \mathbf{n} + \left[ \frac{d(T_1 r)}{d\xi} - T_2 \sin\varphi_1 \right] \mathbf{e}_1 = 0. \quad (18)$$

В проекции на нормаль  $\mathbf{n}$  векторное уравнение (18) содержит известное уравнение Лапласа

$$\frac{T_1}{\rho_1} + \frac{T_2}{\rho_2} = p_u. \quad (19)$$

В проекции на меридианное направление, задаваемое ортом  $\mathbf{e}_1$ , векторное уравнение (18) приводит к уравнению равновесия

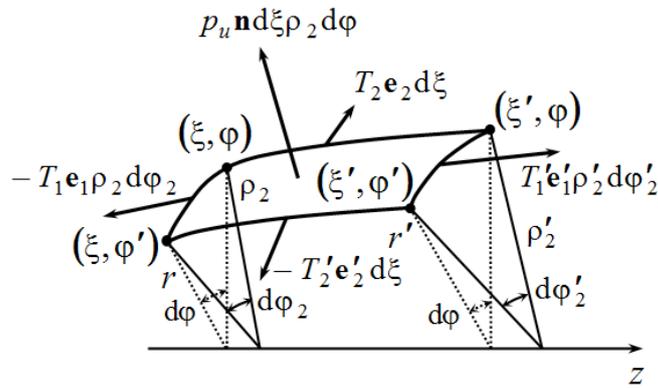


Рис. 5. Равновесие бесконечно малого элемента оболочки  
 Fig. 5. The balance of the infinitesimal element of the shell

$$\frac{d(T_1 r)}{d\xi} = T_2 \sin \varphi_1. \quad (20)$$

Так как по второму соотношению (9)

$$\frac{dr}{d\xi} = \sin \varphi_1,$$

уравнение равновесия (20) можно переписать в виде

$$\frac{dT_1}{d\xi} = \frac{T_2 - T_1}{r} \sin \varphi_1, \quad (21)$$

более удобным для практического использования.

Для полноты общей картины получим дополнительно дифференциальное уравнение равновесия в проекции на ось вращения  $z$  (рис. 5). С этой целью скалярно умножим векторное уравнение (18) на орт  $\mathbf{e}_z$  и учтём (2). После несложных преобразований с использованием (7), (8) будем иметь

$$p_u r \operatorname{tg} \varphi_1 - \frac{d(T_1 r \cos \varphi_1)}{dz} = 0$$

или с учётом выражения (3)

$$p_u r \frac{dr}{dz} - \frac{d(T_1 r \cos \varphi_1)}{dz} = 0. \quad (22)$$

В случае, когда избыточное давление  $p_u$  неизменно по длине оболочки, уравнение (22) обладает общим интегралом

$$p_u r^2 - 2T_1 r \cos \varphi_1 = C, \quad (23)$$

где

$$C = (p_u r^2 - 2T_1 r \cos \varphi_1) \Big|_{z=0} \quad (24)$$

— постоянная интегрирования.

**Замечание.** Поясним физический смысл общего интеграла (23). С этой целью рассмотрим

равновесие одной из частей рассечённой оболочки, например левой её части с фланцем (рис. 6а), в проекции на ось вращения оболочки:

$$\pi r^2(z) p_u(z) - 2\pi r(z) T_1(z) \cos \varphi_1(z) = P.$$

Следовательно, постоянная (24) равна усилию пневмоэлемента  $P$ , делённому на число  $\pi$ :  $C = P/\pi$ . В свою очередь, усилие пневмоэлемента (рис. 6б)

$$P = \pi r^2(0) p_u(0) - 2\pi r(0) T_1(0) \cos \varphi_1(0) \equiv P_u - R_z$$

представляет собой разность между равнодействующей сил давления

$$P_u = \pi r^2(0) p_u(0),$$

действующих на фланец, и распорной силой

$$R_z = 2\pi r(0) T_1(0) \cos \varphi_1(0),$$

являющейся силой взаимодействия между оболочкой и фланцем.

#### 4. Механические свойства резинокордного композита

Резинокордный композит является структурно неоднородным материалом: слой резины, обладающей материальной однородностью и изотропностью, чередуются с дискретным числом нитей корда малого диаметра. Поэтому напряжённо-деформированное состояние резинокордной оболочки под нагрузкой объективно является неоднородным. Чтобы получить определяющие соотношения, связывающие между собой деформации и напряжения в резинокордном композите, как правило, используется метод осреднения свойств реального материала, чтобы указанную связь между напряжениями и деформациями можно было описывать достаточно гладкими функциями пространственных координат. По факту после осреднения происходит переход от материала с дискретной структурой к так называемой *эффективной сплошной среде* [21], являющейся материально однородной (но, вообще говоря, анизотропной) средой с непре-

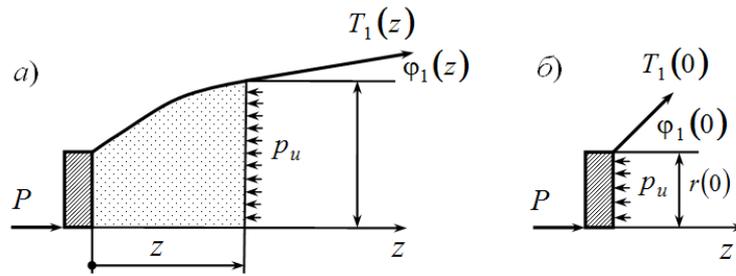


Рис. 6. Равновесие системы примененных сил:  
 а — к отсечённой части оболочки вращения с фланцем; б — к фланцу  
 Fig. 6. The balance of the system of applied forces:  
 а — to the cut off part of the rotation shell with a flange; б — to flange

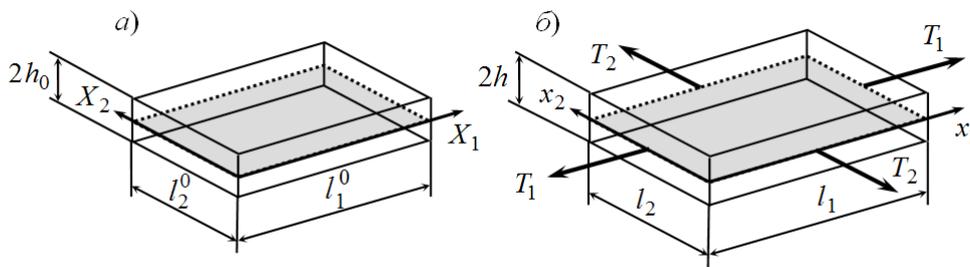


Рис. 7. Представительный элемент резинокордной оболочки:  
 а — до нагружения (отсчётная конфигурация);  
 б — после нагружения (актуальная конфигурация)  
 Fig. 7. The representative element of the rubber-cord shell:  
 а — before loading (readout configuration);  
 б — after loading (actual configuration)

рывно изменяющимися свойствами. С этой целью берётся так называемый представительный элемент резинокордного композита, который, с одной стороны, достаточно мал по сравнению с размерами оболочки в целом, а с другой стороны, достаточно велик, чтобы в нём содержалось такое количество нитей корда, когда не сказывается существенным образом добавление (или удаление) одной нити корда. После процедуры осреднения конечное число нитей корда фактически заменяется бесконечным числом нитей, равномерно распределённых по всему представительному элементу. Указанная процедура осреднения аналогична широко используемой в механике сплошных сред гипотезе сплошности, по которой осуществляется переход от дискретной атомарной структуры вещества к сплошной среде, непрерывно заполняющей соответствующую область пространства.

Необходимо также отметить следующее. Резинокордный композит является практически несжимаемым материалом. Поэтому деформация срединной поверхности тонкостенной резинокордной оболочки вызывает изменение толщины стенки. Чтобы учесть данное обстоятельство, в теории тонкостенных резинокордных оболочек используется модифицированная кинематическая (геометрическая) гипотеза Кирхгофа — Лява [18]: «материальное волокно, нормальное к матери-

альной срединной поверхности до деформации, остаётся нормальным к ней и после деформации, удлиняясь по линейному закону». Данная гипотеза, которую можно назвать *гипотезой деформируемых нормалей* (по аналогии с *гипотезой недеформируемых нормалей* [22]), существенно упрощает математические выкладки при выводе определяющих соотношений тонкостенных резинокордных оболочек.

Представительный элемент тонкостенной резинокордной оболочки благодаря малости его размеров можно рассматривать как прямоугольный параллелепипед, который до нагружения имеет полутолщину  $h_0$  и рёбра длиной  $l_1^0, l_2^0$  (рис. 7а), а после нагружения (согласно гипотезе деформируемых нормалей) — полутолщину  $h$  и длину рёбер  $l_1, l_2$  (рис. 7б).

Вследствие несжимаемости резинокордного композита объём представительного элемента до и после нагружения остаётся неизменным:

$$V = V_0, \\ V_0 = 2h_0 l_1^0 l_2^0, \\ V = 2h l_1 l_2. \quad (25)$$

Если для характеристики деформации использовать кратности удлинения

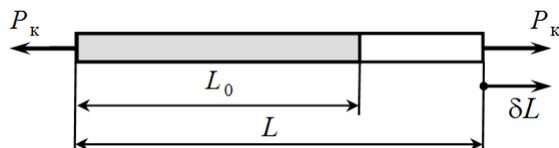


Рис. 8. Деформирование отдельной нити корда  
Fig. 8. Deformation of a separate thread of a cord

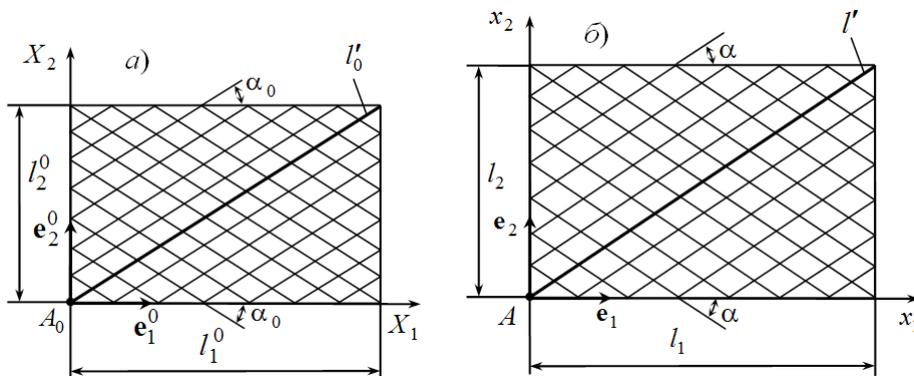


Рис. 9. Расположение нитей корда в представительном элементе:  
а — до нагружения (отсчётная конфигурация);  
б — после нагружения (актуальная конфигурация)  
Fig. 9. The location of the cord threads in the representative element:  
a — before loading (readout configuration);  
b — after loading (actual configuration)

$$\lambda_1 = \frac{l_1}{l_1^0}, \quad \lambda_2 = \frac{l_2}{l_2^0}, \quad \lambda_3 = \frac{h}{h_0}, \quad \delta A^{ext} = \frac{V}{2h_0} (T_1 \lambda_2 \delta \lambda_1 + T_2 \lambda_1 \delta \lambda_2). \quad (26)$$

то тогда условие несжимаемости (25) можно записать в виде

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1. \quad (27)$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}. \quad (28)$$

Далее для построения определяющих соотношений, связывающих погонные усилия  $T_1$ ,  $T_2$  с характеристиками деформации  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  срединной поверхности оболочки, в качестве метода осреднения применим, следуя [5, 23], принцип виртуальных перемещений

$$\delta A^{ext} + \delta A^{int} = 0. \quad (29)$$

Виртуальная работа внешних сил определяется выражением (рис. 7)

$$\delta A^{ext} = T_1 l_2 \delta l_1 + T_2 l_1 \delta l_2$$

или с учётом (25) – (27)

Виртуальную работу внутренних сил удобно разбить на две части и вычислить по отдельности:

$$\delta A^{int} = \delta A_k^{int} + \delta A_p^{int}. \quad (31)$$

Здесь  $\delta A_k^{int}$ ,  $\delta A_p^{int}$  — виртуальная работа внутренних сил нитей корда и резиновой матрицы соответственно.

#### 4.1. Виртуальная работа внутренних сил корда

Виртуальная работа внутренних сил упруго-деформируемых нитей корда совершается за счёт убыли потенциальной энергии деформации:

$$\delta A_k^{int} = -\delta U_k. \quad (32)$$

Поскольку в пределах представительного элемента напряжённо-деформированное состояние всех нитей корда одинаковое, достаточно рассмотреть деформирование одной нити корда с начальной длиной  $L_0$ , равной суммарной длине нитей корда в представительном элементе (рис. 8).

Под действием растягивающей силы  $P_k$  нить получает удлинение  $\Delta L = L - L_0$ , где  $L$  — текущая длина нити (рис. 8). Придадим нити виртуальное перемещение (рис. 8)

$$\delta L = L_0 \delta \lambda_k, \quad (33)$$

где

$$\lambda_k = L / L_0 \quad (34)$$

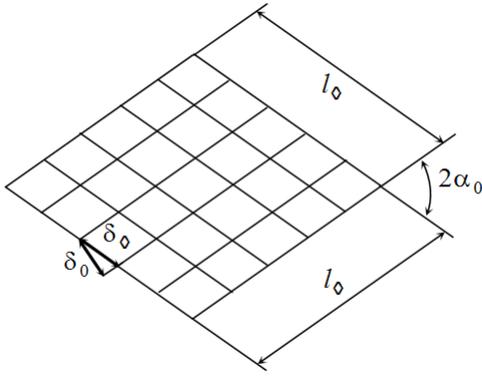


Рис. 10. Ромбический представительный элемент в отсчётной конфигурации  
Fig. 10. Rhombic representative element in the readout configuration

кратность удлинения нити корда. На перемещении (33) сила  $P_k$  совершит работу, которая пойдёт на увеличение потенциальной энергии деформации:

$$\delta U_k = P_k \delta L = P_k L_0 \delta \lambda_k. \quad (35)$$

При упругом деформировании нити сила растяжения  $P_k$  является однозначной функцией кратности удлинения (34). Так, например, для различных марок ткани кордной капроновой, используемых для изготовления резинокордных оболочек, в [24] приводятся табличные данные зависимости  $P(\varepsilon_k)$ , где  $\varepsilon_k = \Delta L / L_0$  — относительное удлинение, связанное с кратностью удлинения (34) формулой  $\varepsilon_k = \lambda_k - 1$ . Поэтому, интегрируя (35), можно найти потенциальную энергию деформации на единицу длины нити корда:

$$u_k \equiv U_k / L_0 = \int_1^{\lambda_k} P_k (\lambda_k - 1) \delta \lambda_k.$$

Переходя к представительному элементу резинокордной оболочки, необходимо связать  $\lambda_k$  с кратностями удлинения  $\lambda_1, \lambda_2$  меридиана и параллели, а также определить суммарную длину нитей корда  $L_\diamond$ . С этой целью рассмотрим расположение нитей корда в представительном элементе (рис. 9). До нагружения ориентация нитей корда по отношению к меридиану с направляющим ортом  $\mathbf{e}_1^0$  определяется выражениями (рис. 9а)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_0 &= l_2^0 / l_1^0, \\ \cos \alpha_0 &= l_1^0 / \sqrt{(l_1^0)^2 + (l_2^0)^2}, \\ \sin \alpha_0 &= l_2^0 / \sqrt{(l_1^0)^2 + (l_2^0)^2}. \end{aligned} \quad (36)$$

Соответственно, после нагружения ориентация нитей корда по отношению к меридиану с направляющим ортом  $\mathbf{e}_1$  задаётся формулой (рис. 9б)

$$\operatorname{tg} \alpha = l_2 / l_1. \quad (37)$$

При этом кратность удлинения нитей корда равна (рис. 9)

$$\lambda_k = \frac{l'}{l_0} = \frac{\sqrt{(l_1')^2 + (l_2')^2}}{\sqrt{(l_1^0)^2 + (l_2^0)^2}}. \quad (38)$$

Если учесть выражения (26) для кратностей удлинения меридиана и параллели, соотношения (37), (38) со ссылкой на (36) можно преобразовать к виду

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \operatorname{tg} \alpha_0, \quad (39)$$

$$\lambda_k = \sqrt{\lambda_1^2 \cos^2 \alpha_0 + \lambda_2^2 \sin^2 \alpha_0}. \quad (40)$$

Чтобы найти суммарную длину нитей корда, определим сначала величину суммарной длины нитей корда, приходящейся на единицу площади. Для этого достаточно рассмотреть представительный элемент в виде ромба со сторонами, расположенными вдоль нитей корда обоих направлений (рис. 10). Последнее является вполне допустимым приёмом упрощения математических выкладок, так как свойства представительного элемента не зависят от его формы.

Из геометрических соображений ясно (рис. 10), что число нитей  $N_\diamond$  одного направления, расположенных вдоль стороны ромба  $l_\diamond$ , равно

$$N_\diamond = l_\diamond / \delta_\diamond, \quad (41)$$

где  $\delta_\diamond$  — длина стороны элементарной ромбической ячейки. Величина  $\delta_\diamond$  связана с расстоянием  $\delta_0$  между соседними нитями корда формулой (рис. 10)

$$\delta_0 / \delta_\diamond = \sin 2\alpha_0, \quad (42)$$

где  $\delta_0$  — начальный (до нагружения) шаг между нитями корда. Исходя из (41), (42), находим

$$N_\diamond = \frac{l_\diamond}{\delta_0} \sin 2\alpha_0.$$

Следовательно, суммарная длина нитей корда в представительном элементе ромбической формы определяется выражением

$$L_\diamond = 2k N_\diamond l_\diamond = 2 \frac{k}{\delta_0} l_\diamond^2 \sin 2\alpha_0, \quad (43)$$

где  $k$  — число слоёв нитей корда одного направления. С другой стороны, площадь ромбического представительного элемента равна (рис. 10)

$$\Sigma_\diamond = l_\diamond^2 \sin 2\alpha_0. \quad (44)$$

Разделив (43) на (44), получим искомое значение суммарной длины нитей корда, приходящейся на единицу площади:

$$\frac{L_\diamond}{\Sigma_\diamond} = 2 \frac{k}{\delta_0}. \quad (45)$$



описывает упругие напряжения в резине; после задания упругого потенциала  $\Phi(\mathbf{C})$  они могут быть определены в явном виде. Например, для описания упругих свойств резины можно воспользоваться потенциалом Трелоара [18, 25, 27]

$$\Phi(\mathbf{C}) = \frac{\mu_e}{2} \text{tr}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{\mu_e}{2} (\text{tr} \mathbf{C} - 3), \quad (53)$$

где  $\mu_e = E_e/3$  — модуль сдвига при малых деформациях ( $E_e$  — модуль Юнга). Неогуков потенциал (53) является одноконстантным и поэтому особенно удобен в приложениях благодаря своей простоте и достаточной точности описания экспериментальных кривых при деформациях одноосного растяжения, не превышающих деформацию разрушения нитей корда (порядка 20...30%).

В главных осях напряжений, совпадающих по направлению с осями локальной системы координат  $x_1, x_2, x_3$  (рис. 7б) с направляющими ортами  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , определяющее соотношение (52) имеет вид [18]

$$\mathbf{T} = \sum_{\alpha=1}^3 \sigma_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} = q\mathbf{I} + \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_{\alpha} \frac{\partial \Phi_A}{\partial \lambda_{\alpha}} \mathbf{e}_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}.$$

Придадим представителю элементу в актуальной конфигурации (рис. 7б) виртуальное перемещение, которому соответствует изохорная (с сохранением объёма) вариация линейного тензора деформации

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{\alpha=1}^3 \delta \varepsilon_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha},$$

$$\delta \varepsilon_{\alpha} = \frac{\delta l_{\alpha}}{l_{\alpha}^0} = \frac{\delta \lambda_{\alpha}}{\lambda_{\alpha}} \quad (\alpha = 1, 2, 3). \quad (54)$$

В этом случае виртуальная работа внутренних сил резины будет равна

$$\delta A_p^{\text{int}} = - \int_{V_p} \mathbf{T} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV =$$

$$= -V_p \left( q\mathbf{I} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} + \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_{\alpha} \frac{\partial \Phi_A}{\partial \lambda_{\alpha}} \delta \varepsilon_{\alpha\alpha} \right). \quad (55)$$

Здесь в соответствии с (54)

$$\delta \varepsilon_{11} = \frac{\delta \lambda_1}{\lambda_1},$$

$$\delta \varepsilon_{22} = \frac{\delta \lambda_2}{\lambda_2},$$

$$\delta \varepsilon_{33} = - \left( \frac{\delta \lambda_1}{\lambda_1} + \frac{\delta \lambda_2}{\lambda_2} \right). \quad (56)$$

При записи (55) учтено, что тензоры  $\mathbf{F}$ ,  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  имеют постоянное значение в пределах представителю элемента и что при однородном деформированном состоянии напряжённое со-

стояние также однородно. Поскольку  $q\mathbf{I} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} = 0$ , ибо  $\text{tr}(\delta \boldsymbol{\varepsilon}) = 0$ , после подстановки в (55) выражений (56) находим

$$\delta A_p^{\text{int}} = -\chi_p V \left[ \Psi_1(\lambda_1, \lambda_2) \frac{\delta \lambda_1}{\lambda_1} + \Psi_2(\lambda_1, \lambda_2) \frac{\delta \lambda_2}{\lambda_2} \right]. \quad (57)$$

Здесь со ссылкой на (28) введены обозначения

$$\Psi_1(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_1} - (\lambda_1 \lambda_2)^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_3} \Big|_{\lambda_3=(\lambda_1 \lambda_2)^{-1}},$$

$$\Psi_2(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_2} - (\lambda_1 \lambda_2)^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_3} \Big|_{\lambda_3=(\lambda_1 \lambda_2)^{-1}}.$$

По формулам (48), (49)

$$\chi_k = \frac{\pi d_k^2}{4} \frac{k}{\delta_0 h_0},$$

$$\chi_p = 1 - \chi_k$$

объёмные доли нитей корда и резины в (несжимаемом) резинокордном композите соответственно:  $V_k = \chi_k V$ ,  $V_p = \chi_p V$ ,  $V_k + V_p = V$ .

### 4.3. Определяющие соотношения

Подставим полученные выражения для виртуальной работы внешних сил (30) и виртуальной работы внутренних сил представителю элемента (31), (51), (57) в формулу осреднения (29). Получим уравнение

$$\frac{V}{2h_0} (T_1 \lambda_2 \delta \lambda_1 + T_2 \lambda_1 \delta \lambda_2) -$$

$$- P_k \frac{kV}{\delta_0 h_0} \frac{\lambda_1 \delta \lambda_1 \cos^2 \alpha_0 + \lambda_2 \delta \lambda_2 \sin^2 \alpha_0}{\sqrt{\lambda_1^2 \cos^2 \alpha_0 + \lambda_2^2 \sin^2 \alpha_0}} -$$

$$- \chi_p V \left[ \Psi_1(\lambda_1, \lambda_2) \frac{\delta \lambda_1}{\lambda_1} + \Psi_2(\lambda_1, \lambda_2) \frac{\delta \lambda_2}{\lambda_2} \right] = 0.$$

Так как вариации кратностей удлинения  $\delta \lambda_1, \delta \lambda_2$  независимые, полагая поочередно  $\delta \lambda_1 \neq 0, \delta \lambda_2 = 0$  и  $\delta \lambda_1 = 0, \delta \lambda_2 \neq 0$ , приходим к результату

$$\begin{cases} T_1 = 2 \frac{k}{\delta_0} \frac{P_k(\lambda_k)}{\lambda_k} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cos^2 \alpha_0 + 2h_0 \chi_p \frac{\Psi_1(\lambda_1, \lambda_2)}{\lambda_1 \lambda_2}; \\ T_2 = 2 \frac{k}{\delta_0} \frac{P_k(\lambda_k)}{\lambda_k} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sin^2 \alpha_0 + 2h_0 \chi_p \frac{\Psi_2(\lambda_1, \lambda_2)}{\lambda_1 \lambda_2}. \end{cases} \quad (58)$$

К соотношениям (58) надо присоединить выражение (40) для кратности удлинения нитей корда

$$\lambda_k = \sqrt{\lambda_1^2 \cos^2 \alpha_0 + \lambda_2^2 \sin^2 \alpha_0}, \quad (59)$$

через которую определяется силовая характеристика нитей корда  $P_k = P_k(\lambda_k)$ .

Если в (58) пренебречь вкладом резины, описываемым последними членами в правой части, получим упрощённые определяющие соотношения, используемые в безмоментной теории сетчатых оболочек вращения [5–10, 13–16]:

$$\begin{cases} T_1 = 2 \frac{k}{\delta_0} \frac{P_k(\lambda_k)}{\lambda_k} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cos^2 \alpha_0; \\ T_2 = 2 \frac{k}{\delta_0} \frac{P_k(\lambda_k)}{\lambda_k} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sin^2 \alpha_0. \end{cases} \quad (60)$$

Если в (60) разделить первое уравнение на второе уравнение и учесть выражение (39), придём к общеизвестному соотношению между погонными усилиями вдоль меридиана и параллели при симметричном нагружении оболочки:

$$T_1 / T_2 = \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

В качестве независимых характеристик деформации резинокордной оболочки вращения можно использовать не только кратности удлинения  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  меридиана и параллели, но и угол наклона нитей корда к меридиану  $\alpha$  и кратность удлинения нитей корда  $\lambda_k$  (либо относительное удлинение нитей корда  $\varepsilon_k = \lambda_k - 1$ ), что имеет определённый физический смысл, поскольку основным несущим элементом являются нити корда, а не резина. Действительно, по формуле (39)

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha_0}. \quad (61)$$

Решая систему уравнений (59), (61) относительно переменных  $\alpha$ ,  $\lambda_k$ , получим

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_0} \lambda_k, \\ \lambda_2 &= \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_0} \lambda_k. \end{aligned} \quad (62)$$

При этом очевидно, что

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_0} \dot{\lambda}_k - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha_0} \lambda_k \dot{\alpha}, \\ \dot{\lambda}_2 &= \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_0} \dot{\lambda}_k + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha_0} \lambda_k \dot{\alpha}. \end{aligned} \quad (63)$$

Из формул (63) отчётливо видно, что при релаксации резинокордной оболочки к равновесному состоянию изменение кратностей удлинения  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  меридиана и параллели сопровождается изменениями длины нитей корда и угла их расположения, характеризующимися скоростями изменения  $\dot{\lambda}_k$  и  $\dot{\alpha}$ .

### 5. Уравнения математической модели и порядок их решения

Преобразуем полученные нелинейные уравнения математической модели к виду, удобному для проведения численных расчётов. По уравнению (12)

$$\frac{d\xi}{d\xi_0} = \lambda_1. \quad (64)$$

Так как кратность удлинения меридиана  $\lambda_1 > 0$ , криволинейные координаты  $\xi_0$ ,  $\xi$ , задающие положение материальных точек меридиана срединной поверхности в отсчётной и актуальной конфигурациях резинокордной оболочки (рис. 2), связаны между собой некоторой взаимно однозначной зависимостью  $\xi = \xi(\xi_0)$ . Это позволяет в дифференциальных уравнениях математической модели осуществить повсеместную замену независимой переменной  $\xi$  независимой переменной  $\xi_0$ , используя правило дифференцирования сложной функции

$$\frac{df}{d\xi} = \frac{df}{d\xi_0} \frac{d\xi_0}{d\xi}.$$

Умножая дифференциальные уравнения (9), (10), (21) на (64), имеем

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{d\xi_0} &= \lambda_1 \frac{T_2 - T_1}{r} \sin \varphi_1, \\ \frac{dz}{d\xi_0} &= \lambda_1 \cos \varphi_1, \\ \frac{dr}{d\xi_0} &= \lambda_1 \sin \varphi_1, \\ \frac{d\varphi_1}{d\xi_0} &= -\lambda_1 \kappa_1. \end{aligned} \quad (65)$$

Тем самым происходит фактический переход от эйлерова (пространственного) метода описания к лагранжевому (материальному) методу описания процесса деформирования резинокордной оболочки.

Таким образом, математическая модель резинокордной оболочки вращения при симметричном нагружении включает в себя четыре обыкновенных дифференциальных уравнения (65) с граничными условиями (рис. 2б)

$$\begin{aligned} r|_{\xi_0=\xi_0^{B'}} &= r_{B'}, \\ z|_{\xi_0=\xi_0^{B'}} &= z_{B'}, \\ r|_{\xi_0=\xi_0^{B''}} &= r_{B''}, \\ z|_{\xi_0=\xi_0^{B''}} &= z_{B''}. \end{aligned} \quad (66)$$

Здесь  $\xi_0^{B'}$ ,  $\xi_0^{B''}$  — криволинейные координаты точек меридиана, в которых оболочка сопрягается с металлической арматурой;  $r_{B'}$ ,  $z_{B'}$  и  $r_{B''}$ ,  $z_{B''}$  — цилиндрические координаты точек закрепления  $B'$ ,  $B''$  соответственно. К примеру, в случае оболочки баллонного типа (рис. 1а) можно полагать, что  $A' = B'$ ,  $A'' = B''$  (рис. 2) и поэтому  $\xi_0^{B'} = 0$ ,  $\xi_0^{B''} = l_0$ ,  $r_{B'} = r_{B''} = r_0$ ,  $z_{B'} = z_0$ ,  $z_{B''} = z_0 + s$ , где  $s$  — взаимное перемещение фланцев из начального положения. В результате граничные условия (66) принимают вид

$$r|_{\xi_0=0} = r_0,$$

$$\begin{aligned} z|_{\xi_0=0} &= z_0, \\ r|_{\xi_0=l_0} &= r_0, \\ z|_{\xi_0=l_0} &= z_0 + s. \end{aligned} \quad (67)$$

Благодаря тому, что оболочка баллонного типа обладает плоскостью симметрии посередине своей длины, последние два граничных условия (67) можно заменить эквивалентными граничными условиями

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_1|_{\xi_0=l_0/2} &= 0, \\ z|_{\xi_0=l_0/2} &= (z_0 + s)/2. \end{aligned}$$

Для других типов оболочек, допускающих перекачивание по металлической арматуре, как в случае оболочки рукавного типа (рис. 16), формулировка граничных условий (66) в явном виде требует учёта геометрических особенностей конструкции металлической арматуры, характера фрикционного взаимодействия в зоне контакта с резинокордной оболочкой и способа её крепления, анализ которых выходит за рамки текущего изложения.

Входящие в систему дифференциальных уравнений (65) переменные величины  $T_1$ ,  $z$ ,  $r$ ,  $\varphi_1$  для удобства терминологии можно назвать *первичными* (зависимыми) переменными. Для них функциональные зависимости  $T_1(\xi_0)$ ,  $z(\xi_0)$ ,  $r(\xi_0)$ ,  $\varphi_1(\xi_0)$  от материальной координаты (независимой переменной)  $\xi_0$  находятся численным интегрированием системы уравнений (65) при граничных условиях (66). Все остальные переменные величины математической модели можно условно назвать *вторичными* (зависимыми) переменными<sup>4</sup>. Они выражаются через первичные переменные посредством алгебраических и/или тригонометрических уравнений математической модели и служат для вычисления функций правых частей дифференциальных уравнений (65) по следующему алгоритму.

Сначала через первичные переменные  $T_1$ ,  $z$ ,  $r$ ,  $\varphi_1$  выражаются вторичные переменные  $\kappa_2$ ,  $\lambda_2$ , определяемые уравнениями (10), (15):

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= \frac{\cos \varphi_1}{r}, \\ \lambda_2 &= \frac{r}{r_0(\xi_0)}. \end{aligned} \quad (68)$$

После этого находится значение переменной  $\lambda_1$  решением уравнения

$$\begin{aligned} \Pi_{\kappa}(\lambda_1, \lambda_2, \xi_0) \frac{2k}{\delta_0(\xi_0)} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cos^2 \alpha_0(\xi_0) + \\ + 2h_0 \chi_p(\xi_0) \frac{\Psi_1(\lambda_1, \lambda_2)}{\lambda_1 \lambda_2} = T_1, \end{aligned} \quad (69)$$

получаемого из первого определяющего соотношения (58) с учётом (59). Здесь введено обозначение

$$\Pi_{\kappa}(\lambda_1, \lambda_2, \xi_0) = \frac{P_{\kappa}(\lambda_{\kappa})}{\lambda_{\kappa}} \Big|_{\lambda_{\kappa} = \sqrt{\lambda_1^2 \cos^2 \alpha_0(\xi_0) + \lambda_2^2 \sin^2 \alpha_0(\xi_0)}} \quad (70)$$

для компактной записи уравнения (69). Далее находятся вторичные переменные  $T_2$ , а по второму соотношению (58) и формуле (39) соответственно:

$$\begin{aligned} T_2 = \Pi_{\kappa}(\lambda_1, \lambda_2, \xi_0) \frac{2k}{\delta_0(\xi_0)} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sin^2 \alpha_0(\xi_0) + \\ + 2h_0 \chi_p(\xi_0) \frac{\Psi_2(\lambda_1, \lambda_2)}{\lambda_1 \lambda_2}, \end{aligned} \quad (71)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \operatorname{tg} \alpha_0(\xi_0). \quad (72)$$

Наконец, исходя из уравнения Лапласа (19) и формул (11), определяется значение кривизны меридиана:

$$\kappa_1 = \frac{p_u - \kappa_2 T_2}{T_1}. \quad (73)$$

Фигурирующие в (68) – (73) зависимости  $r_0(\xi_0)$ ,  $\alpha_0(\xi_0)$ ,  $\delta_0(\xi_0)$ , а также зависимость  $z_0(\xi_0)$  считаются заданными функциями криволинейной координаты  $\xi_0$ , получаемыми либо экспериментально, либо теоретически, исходя из технологии изготовления резинокордной оболочки.

**Замечание.** Взамен первого уравнения системы (65) можно использовать дифференциальное уравнение равновесия (22), которое после умножения на  $dz/d\xi_0$  принимает вид

$$p_u r \frac{dr}{d\xi_0} - \frac{d(T_1 r \cos \varphi_1)}{d\xi_0} = 0 \quad (74)$$

или с учётом третьего и четвёртого уравнения (65)

$$\frac{dT_1}{d\xi_0} = \lambda_1 \left[ (p_u - T_1 \kappa_1) \operatorname{tg} \varphi_1 - \frac{T_1}{r} \sin \varphi_1 \right]. \quad (75)$$

Уравнение (74) интересно тем, что оно имеет общий интеграл (23):

$$p_u r^2 - 2T_1 r \cos \varphi_1 = P/\pi. \quad (76)$$

Однако практическое применение дифференциального уравнения (75) или вытекающего из (76) выражения

$$T_1 = \frac{p_u r^2 - P/\pi}{2r \cos \varphi_1}$$

сопряжено с одним затруднением, вызванным тем, что при  $\varphi_1 = \pm \pi/2$  имеет место особенность  $\operatorname{tg} \varphi_1 = \pm \infty$  или  $\cos \varphi_1 = 0$ . Подобная особенность отсутствует в первом уравнении (65), поэтому при его использовании не возникает необходимости в дополнительном привлечении каких-либо специальных приёмов и средств.

## 6. Геометрические параметры резинокордной оболочки в ненагруженном состоянии (отсчётной конфигурации)

В принципе параметрические зависимости  $r_0(\xi_0)$ ,  $z_0(\xi_0)$ , описывающие геометрическую форму оболочки, а также зависимости  $\alpha_0(\xi_0)$ ,  $\delta_0(\xi_0)$ , характеризующие расположение нитей корда, можно определить путём прямых измерений специальным образом подготовленных образцов резинокордной оболочки. Однако более распространённым является полуэмпирический метод, когда указанные параметрические зависимости устанавливаются теоретически, исходя из технологии изготовления резинокордной оболочки, а экспериментальные данные привлекаются для определения ограниченного числа материальных параметров математической модели.

Описание технологии изготовления резинокордного каркаса пневматической шины и пневматического амортизатора содержится в [3, 5, 7]; там же даётся теоретический анализ начальной геометрии нитей корда. Предполагается, что слои корда собираются в виде браслетов на сборочном барабане в форме кругового цилиндра. Заготовка считается материально однородной и осесимметричной. Осесимметричным полагается также воздействие на заготовку внутреннего давления, подаваемого в варочную камеру, на протяжении всего процесса формирования оболочки. Из принятых допущений полной осевой симметрии и материальной однородности следует вывод, что любая точка браслета, лежащая в некоторой меридианной плоскости, остаётся в этой плоскости и после формирования и вулканизации оболочки. Далее математически описывается поведение элементарного (бесконечно малого) участка отдельной нити с использованием предположения, что все нити корда по своей длине вытягиваются равномерно с некоторым одинаковым относительным удлинением. В результате получаются искомые зависимости, соответствующие заданной геометрии пресс-формы.

Ограничение рассмотрения элементарным участком отдельной нити корда делает допустимым принятие избыточной гипотезы о том, что перекрещивающиеся слои корда в браслете не смещаются относительно друг друга при формировании оболочки (пантографическая модель кордной сетки каркаса [11]). Это приводит к допустимости принятия других избыточных гипотез, например, гипотезы о постоянстве шага между нитями корда в процессе формирования оболочки, или гипотезы о постоянстве площади элементарной ромбической ячейки заготовки [11]. Вследствие этого получаются альтернативные, отличные друг от друга зависимости, описывающие начальное расположение нитей корда по заданной геометрии пресс-формы [11].

В этой связи воспользуемся иным методом определения начальных геометрических параметров резинокордной оболочки, основанном на рассмотрении процесса деформирования представительного элемента заготовки (рис. 9) и принятии трёх предположений: 1) материальной однородности заготовки; 2) полной осевой симметрии процесса формирования; 3) одинаково-

вого относительного удлинения нитей корда по всей их длине.

На сборочном барабане радиуса  $r_0$  меридиан заготовки (браслета) представляет прямую линию, параллельную оси барабана и, соответственно, оси вращения резинокордной оболочки (рис. 11). Нити корда расположены по отношению к меридиану браслета под углом  $\alpha_0$ , называемого углом закроя корда; шаг между нитями корда равен  $\delta_0$ . В процессе изготовления (рис. 11) произвольно взятая материальная точка заготовки (браслета) переходит из исходного положения  $M_0$  в конечное положение  $M_1$ , определяемое цилиндрическими координатами  $r_1$ ,  $z_1$ , которые описываются зависимостями  $r_1(\xi_1)$ ,  $z_1(\xi_1)$  для меридиана пресс-формы (по чертежу); криволинейная координата  $\xi_1$  отсчитывается от некоторой точки  $A_0$ , например, той точки, в которой при последующей сборке пневмоэлемента осуществляется крепление резинокордной оболочки к металлической арматуре.

По формуле (15) изменение радиуса от значения  $r_0$  до значения  $r_1$  приводит к удлинению параллели с кратностью  $\lambda_2^\phi$ , которая связана с углом наклона нитей корда  $\alpha_0$  и их удлинением  $\lambda_k^\phi$  второй формулой (62):

$$\lambda_2^\phi = \frac{r_1}{r_0} = \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha_1} \lambda_k^\phi. \quad (77)$$

Обе используемые формулы (15), (62) получены из чистых геометрических соображений, поэтому зависимость (77) является столь же точной, насколько точными являются принятые гипотезы.

Под действием внутреннего избыточного давления в варочной камере нити корда имеют после вулканизации некоторое удлинение  $\lambda_k^\phi = 1 + \varepsilon_k^\phi$ , где  $\varepsilon_k^\phi$  — относительное удлинение нитей корда, которое, по принятому предположению, считается одинаковым по всей длине нитей корда и по оценочным данным для различных типов корда лежит в диапазоне 4...10% [5], 2...8% [7].

После снятия давления в варочной камере нити корда укорачиваются до своей первоначальной длины (если влияние резины незначительно) и геометрия меридиана срединной поверхности готового изделия (резинокордной оболочки) некоторым образом искажается, становясь отличной от геометрии меридиана пресс-формы (рис. 11). Если указанным искажением формы можно пренебречь, то тогда по формуле (77) будем иметь

$$\sin \alpha_0(\xi_0) \cong \frac{\sin \alpha_1}{r_1} r_0(\xi_0). \quad (78)$$

Формула (78) отличается от более точной формулы

$$\sin \alpha_0(\xi_0) = \frac{\sin \alpha_1}{r_1(1 + \varepsilon_k^\phi)} r_0(\xi_0), \quad (79)$$

приводимой в [3, 5, 7] и имеющей место при отличном от нуля внутреннем избыточном давлении в варочной камере.

Формулы (78), (79) можно переписать единым образом способом

$$\sin\alpha_0(\xi_0) = \frac{\sin\alpha_K}{r_K} r_0(\xi_0), \quad (80)$$

если ввести в рассмотрение радиус экватора  $r_K$  срединной поверхности оболочки и угол наклона нитей корда к меридиану на экваторе  $\alpha_K$ . Зависимость (80) описывает так называемую «шинную геометрию» расположения нитей корда [7] (в [11] используется другое наименование: «пантографическое правило»). В случае приближённой формулы (78)

$$\frac{\sin\alpha_K}{r_K} = \frac{\sin\alpha_0}{r_0},$$

а в случае уточнённой формулы (79)

$$\frac{\sin\alpha_K}{r_K} = \frac{\sin\alpha_0}{r_0(1 + \varepsilon_K^\phi)}.$$

Как отмечается в [3] со ссылкой на труды А. А. Лапина, «справедливость формулы (80) была проверена путём анализа геометрии нитей в готовых оболочках и заготовках (без вулканизации). Проведённый анализ даёт возможность считать, что зависимость синуса угла наклона нитей корда от радиуса является линейной». «Формула (80) даёт возможность подсчитать угол нити корда в любой точке оболочки, если известен этот угол на экваторе» [5]. «Отсюда следует, что угол нити корда по экватору полностью определяет всю геометрию нитей в шине и является поэтому одной из важнейших её конструктивных характеристик» [7].

Таким образом, в практических расчётах можно рекомендовать использовать зависимость (80), в которой зависимость  $r_0(\xi_0)$  определяется геометрией пресс-формы, а радиус экватора  $r_K$  срединной поверхности оболочки и угол наклона нитей корда к меридиану на экваторе  $\alpha_K$  определяются экспериментально по той или иной методике, предполагающей целостность (под избыточным давлением, равным давлению в варочной камере) или разрушение готовой оболочки. В последнем случае неизбежно принимается дополнительное предположение, что при сбросе до нулевого избыточного давления возникающее изменение угла  $\alpha_K$  пренебрежимо мало.

Чтобы определить зависимость  $\delta_0(\xi_0)$  для шага нитей корда в отсчётной конфигурации резинокордной оболочки, достаточно воспользоваться тем обстоятельством, что число нитей корда в поперечном сечении заготовки (браслета) равно числу нитей корда в поперечном сечении готового изделия [5], в частности, числу нитей корда в экваториальном сечении оболочки. Полное количество нитей корда одинарного слоя прорезиненной кордной ткани в браслете равно (рис. 11)

$$N_K = \frac{2\pi r_0}{\delta_0 / \cos\alpha_0}. \quad (81)$$

Полное количество нитей такого же слоя в готовой оболочке, пересекаемых произвольным кольцевым сечением радиуса  $r_0$ , определяется выражением

$$N_K = \frac{2\pi r_0}{\delta_0 / \cos\alpha_0}. \quad (82)$$

В свою очередь, для экваториального сечения

$$N_K = \frac{2\pi r_K}{\delta_K / \cos\alpha_K}. \quad (83)$$

Приравнявая значения (82) и (83), получаем

$$\frac{\delta_0}{r_0 \cos\alpha_0} = \frac{\delta_K}{r_K \cos\alpha_K}.$$

Поскольку в соответствии с (80)

$$\frac{\sin\alpha_0}{r_0} = \frac{\sin\alpha_K}{r_K},$$

окончательно находим

$$\delta_0(\xi_0) = \delta_K \frac{\sin 2\alpha_0(\xi_0)}{\sin 2\alpha_K}. \quad (84)$$

Таким образом, шаг нитей корда (84) пропорционален синусу двойного угла их наклона к меридиану срединной поверхности резинокордной оболочки [5, 7].

При практическом применении формулы (84) необходимо располагать экспериментально найденным значением шага  $\delta_K$ . В отсутствие необходимых экспериментальных данных в качестве первого приближения можно использовать зависимость (78), которая совместно с (81), (82) приводит к выражению, аналогичному по виду точному выражению (84):

$$\delta_0(\xi_0) \cong \delta_0 \frac{\sin 2\alpha_0(\xi_0)}{\sin 2\alpha_0}. \quad (85)$$

Приближённая формула (85) может оказаться полезной на стадии разработки и проектирования резинокордных оболочек пневматических элементов с оптимальными рабочими характеристиками.

## 7. Обсуждение результатов

Представляется очевидным, что разрабатываемая математическая модель должна быть последовательной и внутренне непротиворечивой. Поэтому если при моделировании процесса формирования оболочки принимается допущение о постоянстве шага между нитями корда (или допущение о постоянстве площади элементарной ромбической ячейки заготовки) [11], встроенными в невулканизированную (сырую) резину, то данное допущение будет правомерно и после

вулканизации резины, причём в значительно большей степени; его нужно учитывать, чтобы обеспечить последовательность и идейную непротиворечивость математической модели.

С целью анализа следствий указанных дополнительных допущений рассмотрим представительный элемент (рис. 9), относящийся в равной степени как к резинокордной оболочке (после вулканизации), так и к «сырой» заготовке (до вулканизации). Так как при деформировании представительного элемента число нитей каждого слоя корда остаётся неизменным, можно установить следующие два равенства (рис. 9):

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta_0} &= \lambda_1 \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_0}, \\ \frac{\delta}{\delta_0} &= \lambda_2 \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_0}. \end{aligned} \quad (86)$$

Здесь  $\delta_0$ ,  $\delta$  — шаг между нитями корда до и после деформирования (нагружения) соответственно. С помощью формулы (39) оба равенства (86) преобразуются к одинаковому виду:

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 \cos^2 \alpha_0 + \lambda_2^2 \sin^2 \alpha_0}}. \quad (87)$$

Если во второе равенство (86) подставить выражение (15) и принять допущение, что  $\delta/\delta_0 = 1$ , получится соотношение

$$r \cos \alpha = r_0 \cos \alpha_0. \quad (88)$$

Если вместо угла  $\alpha$ , определяющего наклон нитей корда к меридиану (рис. 9), использовать, как в [11], дополнительный угол  $\beta = \pi/2 - \alpha$ , определяющий наклон нитей корда к параллели, соотношение (88) примет вид

$$r \cos \beta = r_0 \cos \beta_0. \quad (89)$$

Это так называемое «синусоидальное правило» [11], которое предлагается как альтернатива «пантографическому правилу» (80) и которое в [11] называется также «косинусным правилом», ибо после соответствующих переобозначений соотношению (80) можно придать вид

$$\frac{\cos \beta}{r} = \frac{\cos \beta_0}{r_0}. \quad (90)$$

Точно так же на основании рис. 10 имеем

$$\frac{A}{A_0} = \left( \frac{\delta}{\delta_0} \right)^2 \frac{\sin 2\alpha_0}{\sin 2\alpha}, \quad (91)$$

где  $A_0$ ,  $A$  — площадь элементарной ромбической ячейки до и после деформирования (нагружения) соответственно. Подставляя в (91) оба выражения (86), находим

$$\frac{A}{A_0} = \lambda_1 \lambda_2. \quad (92)$$

Если в (92) подставить сначала выражение (61), а затем учесть (15), то после принятия допущения о том, что  $A/A_0 = 1$ , получится соотношение

$$r^2 \operatorname{ctg} \alpha = r_0^2 \operatorname{ctg} \alpha_0$$

или после замены на угол  $\beta = \pi/2 - \alpha$

$$r^2 \operatorname{tg} \beta = r_0^2 \operatorname{tg} \beta_0. \quad (93)$$

В [11] соотношение (93) называется «правилом касательных», оно предлагается как альтернатива «синусоидальному правилу» (89) и «косинусному правилу» (90).

Проанализируем, к каким следствиям приводят допущения  $\delta/\delta_0 = 1$ ,  $A/A_0 = 1$ . Если в соотношении (87) принять ограничение  $\delta/\delta_0 = 1$ , получим равенство

$$\lambda_1^2 \cos^2 \alpha_0 + \lambda_2^2 \sin^2 \alpha_0 = \lambda_1^2 \lambda_2^2. \quad (94)$$

Соответственно, если в соотношении (92) положить  $A/A_0 = 1$ , будем иметь

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1. \quad (95)$$

Оба случая (94), (95) приводят к вполне ожидаемому выводу, что кратности удлинения  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  рёбер представительного элемента (рис. 9) не являются независимыми друг от друга. Иными словами, при принятии допущения  $\delta/\delta_0 = 1$  или  $A/A_0 = 1$  математическая модель резинокордной оболочки становится внутренне противоречивой. Особенно ярко это выражено в случае нерастяжимых нитей корда. Действительно, полагая кратность удлинения нитей корда  $\lambda_k = 1$  и подставляя формулы (62) в оба выражения (86) и в выражение (92), придём к единому соотношению

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \frac{A}{A_0} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha_0}. \quad (96)$$

Как видно из (96), для нерастяжимых нитей корда оба допущения  $\delta/\delta_0 = 1$  и  $A/A_0 = 1$  эквивалентны, а для их выполнения необходимо равенство  $\alpha = \alpha_0$ , означающее, что представительный элемент (рис. 9) не деформируем. Выявленное противоречие указывает на ошибочность принятых дополнительных допущений  $\delta/\delta_0 = 1$ ,  $A/A_0 = 1$ , а следовательно, непригодность «синусоидального правила» (89) и «правила касательных» (93). Для резинокордных оболочек с диагональным расположением нитей корда, собираемых на сборочном барабане, практическое значение имеет «пантографическое правило» (или «косинусное правило») (90), которое в отечественной литературе называется правилом «шинной геометрии» [6, 7, 13].

### Заключение

Разработанная математическая модель резинокордной оболочки представляет собой дальнейшее развитие существующей безмоментной теории сетчатых оболочек, направленное на повышение точности расчётов посредством учёта

растяжимости нитей корда и упругого сопротивления резиновой матрицы без ограничений на величину возникающих деформаций. Нагрузки, прикладываемые к пневматическому элементу, полагаются статическими и осесимметричными. Приведены геометрические соотношения, устанавливающие связь между характеристиками деформации срединной поверхности оболочки и перемещениями её точек; составлены уравнения равновесия, исключающие возникновение сингулярности в особых точках и поэтому не требующие дополнительных специальных приёмов и средств при интегрировании. Для построения определяющих соотношений структурно неоднородного материала, описываемых гладкими функциями пространственных координат, используется принцип виртуальных перемещений, позволивший усреднить свойства представительного элемента оболочки из упруго деформируемого резинокордного композита. Указан порядок решения уравнений математической модели численными методами.

Продолан критический анализ существующих вариантов альтернативного описания параметров начальной геометрии в отсчётной конфигурации резинокордной оболочки после её изготовления. Предложен модифицированный метод вывода функций распределения геометрических параметров нитей корда, основанный на рассмотрении процесса деформирования представительного элемента заготовки и трёх общепринятых допущений (материальной однородности заготовки, полной осевой симметрии процесса формирования оболочки, одинакового относительного удлинения нитей корда по всей их длине). Благодаря этому установлена избыточность и недопустимость гипотезы о постоянстве шага между нитями корда и гипотезы о постоянстве площади элементарной ромбической ячейки заготовки. Приведены практические рекомендации применения ограниченного числа экспериментально получаемых данных для математического описания расположения нитей корда в отсчётной (ненагруженной) конфигурации оболочки.

Разработанная математическая модель резинокордной оболочки вращения предназначена для проектирования упругих пневматических элементов с оптимальными рабочими характеристиками.

#### Примечания

<sup>1</sup> Данное инженерное приближение не выполняется при очень низком давлении воздуха в шине, значительно ниже того давления, которое используется в процессе эксплуатации. В этом «нерасчётном» случае резина является столь же эффективной в поддержании нагрузки, как и нити корда [9]. При этом необходимо учитывать возникающие изгибные деформации.

<sup>2</sup> Бидерман В. Л. Расчёт резинометаллических и резинокордных элементов машин: дис. ... д-ра техн. наук. М., 1958. 373 с.

<sup>3</sup> Бухин Б. Л. Теория безмоментных сетчатых оболочек вращения и её приложение к расчёту пневматических шин: дис. ... д-ра техн. наук. М., 1972. 309 с.

<sup>4</sup> Например, таковыми являются величины  $\lambda_1$ ,  $T_2$ ,  $\kappa_1$ , входящие в правые части дифференциальных уравнений системы (65).

1. Акоюн Р. А. Пневматическое подрессоривание автотранспортных средств (вопросы теории и практики). В 2 ч. Львов: Выща школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1979. Ч. 1. 218 с.
2. Певзнер Я. М., Горелик А. М. Пневматические и гидропневматические подвески. М.: Машгиз, 1963. 319 с.
3. Равкин Г. О. Пневматическая подвеска автомобиля. М.: Машгиз, 1962. 289 с.
4. Гордеев Б. А., Ерофеев В. И., Синев А. В. [и др.]. Системы виброзащиты с использованием инерционности и диссипации реологических сред. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 176 с. ISBN 5-9221-0561-2.
5. Бидерман В. Л. Расчёты резиновых и резинокордных деталей // Расчёты на прочность в машиностроении. В 3 т. Т. 2. Некоторые задачи прикладной теории упругости. Расчёты за пределами упругости. Расчёты на ползучесть / под ред. С. Д. Пономарева [и др.]. М.: Машгиз, 1958. С. 487–591.
6. Бидерман В. Л. Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
7. Бидерман В. Л., Гуслицер Р. Л., Захаров С. П. [и др.]. Автомобильные шины (конструкция, расчёт, испытание, эксплуатация). М.: Госхимиздат, 1963. 383 с.
8. Frank F., Hofferberth W. Mechanics of the Pneumatic Tire // Rubber Chemistry and Technology. 1967. Vol. 40, Issue 1. P. 271–322. DOI: 10.5254/1.3539045.
9. Clark S. K. Mechanics of Pneumatic Tires: monograph. Washington, D.C.: National Bureau of Standards, 1981. 853 p.
10. Gent A. N., Walter J. D. Pneumatic Tire. NY: Mechanical Engineering Faculty Research, 2006. 854 p.
11. Koutný F. Geometry and Mechanics of Pneumatic Tires. CZE: Zlín, 2007. 139 p.
12. Белкин А. Е., Мухин О. Н., Сорокин Ф. Д. О моделях и методах механики пневматических шин и резинокордных оболочек. Развитие идей профессора В. Л. Бидермана // Известия РАН. МТТ. 2017. № 3. С. 6–17.
13. Трибельский И. А., Шалай В. В., Зубарев А. В. [и др.]. Расчётно-экспериментальные методы проектирования сложных резинокордных конструкций: моногр. Омск: Изд-во ОмГТУ, 2011. 238 с. ISBN 978-5-8149-1077-6.
14. Корнеев С. А., Трибельский М. И. Расчётная модель сетчатой оболочки вращения для резинокордного патрубка // Омский научный вестник. 2012. № 1 (107). С. 101–109.
15. Корнеев С. А., Соколовский З. Н., Русских Г. С. [и др.]. Учёт влияния растяжимости нитей корда на расчётные параметры резинокордных оболочек // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2012. № 3 (35). С. 69–76.
16. Корнеев С. А., Трибельский М. И., Пеньков И. А. [и др.]. Аналитический метод расчёта цилиндрических резинокордных оболочек // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2014. № 2 (42). С. 71–77.
17. Акасака Т. Эластичные композиты // Тканые конструктивные композиты / под ред. Чу Т.-И., Ко. Ф. М.: Мир, 1991. С. 315-363. ISBN 5-03-002094-2.
18. Черных К. Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчётах. Л.: Машиностроение, 1986. 335 с.
19. Черных К. Ф., Кабриц С. А., Михайловский Е. И. [и др.]. Общая нелинейная теория упругих оболочек: моногр. / под ред. К. Ф. Черных, С. А. Кабрица. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2002. 385 с. ISBN 5-288-02922-9.
20. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1974. 176 с.

21. Христианович С. А. О пластическом деформировании упрочняющихся металлов и сплавов. Определяющие уравнения и расчёты по ним // Избранные работы. В 2 кн. Кн. 2: Речная гидравлика. Теория фильтрации. Аэродинамика и газовая динамика. Горное дело. Теория пластичности. Энергетика. М.: Изд-во МФТИ, 2000. С. 218–246.

22. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.

23. Новожилов В. В., Черных К. Ф., Михайловский Е. И. Линейная теория тонких оболочек. Л.: Политехника, 1991. 655 с. ISBN 5-7325-0127-4.

24. ГОСТ 24221–94. Ткань кордная капроновая. Технические условия. М.: ИПК Издательство стандартов, 1996. 16 с.

25. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.

26. Трудселл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред / пер. с англ. Р. В. Гольдштейна, В. М. Ентова; под ред. П. А. Жилина, А. И. Лурье. М.: Мир, 1975. 592 с.

27. Трелоар Л. Физика упругости каучука / под ред. Е. В. Кувшинского. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 240 с.

---

**КОРНЕЕВ Владимир Сергеевич**, кандидат технических наук, доцент кафедры «Основы теории механики и автоматического управления».

SPIN-код: 5866-0890

AuthorID (РИНЦ): 566718

ORCID: 0000-0003-1694-1190

AuthorID (SCOPUS): 57190977806

Адрес для переписки: 79045840307@ya.ru

**ШАЛАЙ Виктор Владимирович**, доктор технических наук, профессор (Россия), заведующий кафедрой «Нефтегазовое дело, стандартизация и метрология», президент ОмГТУ.

SPIN-код: 2322-6820

AuthorID (РИНЦ): 9913

ORCID: 0000-0003-0635-4849

AuthorID (SCOPUS): 35792469000

AuthorID (SCOPUS): 56755298300

AuthorID (SCOPUS): 57190972363

ResearcherID: P-8233-2015

Адрес для переписки: shalay@omgtu.ru

#### Для цитирования

Корнеев В. С., Шалай В. В. Математическая модель резинкордной оболочки вращения для пневматических амортизаторов // Омский научный вестник. Сер. Авиационно-ракетное и энергетическое машиностроение. 2019. Т. 3, № 1. С. 22–41. DOI: 10.25206/2588-0373-2019-3-1-22-41.

Статья поступила в редакцию 20.02.2018 г.

© В. С. Корнеев, В. В. Шалай

# MATHEMATICAL MODEL OF THE RUBBER-CORD SHELL OF ROTATION FOR PNEUMATIC DAMPERS

V. S. Korneyev, V. V. Shalay

Omsk State Technical University,  
Russia, Omsk, Mira Ave., 11, 644050

The review of the fundamental scientific works on the mechanics of pneumatic tires is given. A mathematical model is proposed for a rubber-cord shell, taking into account the tensile properties of the cord threads and the elastic resistance of the rubber matrix without limiting the magnitude of the deformations, which differs from the mathematical model of the moment-free theory of mesh shells used in pneumatic tires mechanics. The applied loads are assumed to be static and axisymmetric. Equilibrium equations are compiled in the form that excludes the emergence of a singularity at special points and does not require special techniques and tools for integration. To construct the constitutive relations reflecting the structural heterogeneity of the material and described by smooth functions of spatial coordinates, the principle of virtual displacements is used. The order of solving the equations of the mathematical model is indicated.

A critical analysis of the known variants of the theoretical description of the initial geometry of the rubber-cord shell after its manufacture is given. A modified method is proposed, based on the consideration of the process of deformation of the representative element of the workpiece and generally accepted assumptions. The redundancy and inadmissibility of the assumption of the constancy of the pitch between the cords or the assumption of the constancy of the area of the elementary rhombic cell of the workpiece are indicated.

The developed mathematical model is designed to design air springs with optimal performance.

**Keywords:** pneumatic tire mechanics, air springs, rubber-cord shell, mathematical model, calculation method.

## References

1. Akopyan R. A. Pnevmaticheskoye podressorivaniye avtotransportnykh sredstv (voprosy teorii i praktiki) [Pneumatic suspension of vehicles (theory and practice questions)]. In 2 parts. Lviv: Vyshcha shkola Publ. Izdatel'stvo pri L'vovskom universitete Publ., 1979. Part 1. 218 p. (In Russ.).

2. Pevzner Ya. M., Gorelik A. M. Pnevmaticheskoye gidropnevmaticheskoye podveski [Pneumatic and hydro-pneumatic suspensions]. Moscow: Mashgiz Publ., 1963. 319 p. (In Russ.).

3. Ravkin G. O. Pnevmaticheskaya podveska avtomobilya [Air suspension car]. Moscow: Mashgiz Publ., 1962. 289 p. (In Russ.).

4. Gordeyev B. A., Erofeev V. I., Sinev A. V. [et al.]. Sistemy vibrozashchity s ispol'zovaniyem inertsionnosti i dissipatsii reologicheskikh sred [Vibration protection systems using inertia and dissipation of rheological media]. Moscow: FIZMATLIT Publ., 2004. 176 p. ISBN 5-9221-0561-2. (In Russ.).

5. Biderman V. L. Raschety rezinovykh i rezinokordnykh detaley [Calculations of rubber and rubber-cord parts] // Raschety na prochnost' v mashinostroyenii. V 3 t. T. 2. Nekotoryye zadachi prikladnoy teorii uprugosti. Raschety za predelami uprugosti. Raschety na polzuchest' [Strength calculations in mechanical engineering. In 3 parts. Part 2. Some problems of the applied theory of elasticity. Calculations beyond elasticity. Calculations for creep] / Ed. S. D. Ponomarev [et al.]. Moscow: Mashgiz Publ., 1958. P. 487–591. (In Russ.).

6. Biderman V. L. Mekhanika tonkostennykh konstruksiy [Mechanics of thin-walled structures]. Moscow: Mashinostroyeniye Publ., 1977. 488 p. (In Russ.).

7. Biderman V. L., Guslitser R. L., Zakharov S. P. [et al.]. Avtomobil'nyye shiny (konstruktsiya, raschet, ispytaniye, ekspluatatsiya). [Car tires (design, calculation, test, exploitation). Moscow: Goskhimizdat Publ., 1963. 383 p. (In Russ.).

8. Frank F., Hofferberth W. Mechanics of the Pneumatic Tire // Rubber Chemistry and Technology. 1967. Vol. 40, Issue 1. P. 271–322. DOI: 10.5254/1.3539045. (In Engl.).

9. Clark S. K. Mechanics of Pneumatic Tires: monograph. Washington, D.C.: National Bureau of Standards, 1981. 853 p. (In Engl.).

10. Gent A. N., Walter J. D. Pneumatic Tire. NY: Mechanical Engineering Faculty Research, 2006. 854 p. (In Engl.).

11. Koutný F. Geometry and Mechanics of Pneumatic Tires. CZE: Zlín, 2007. 139 p. (In Engl.).

12. Belkin A. E., Mukhin O. N., Sorokin F. D. O modelyakh i metodakh mekhaniki pnevmaticheskikh shin i rezinokordnykh obolochek. Razvitiye idey professora V. L. Bidermana [On models and methods of mechanics of pneumatic tires and rubber-cord shells. Development of the ideas due to Professor V. L. Biderman] // Izvestiya RAN. MTT. *Mechanics of Solids*. 2017. No. 3. P. 6–17. (In Russ.).

13. Tribel'skiy I. A., Shalay V. V., Zubarev A. V. [et al.]. Raschetno-eksperimental'nyye metody proyektirovaniya slozhnykh rezinokordnykh konstruksiy [Computational-experimental methods for designing complex rubber-cord constructions]. Omsk: OmSTU Publ., 2011. 238 p. ISBN 978-5-8149-1077-6. (In Russ.).

14. Korneyev S. A., Tribel'skiy M. I. Raschetnaya model' setchatoy obolochki vrashcheniya dlya rezinokordnogo patrubka [The computational model of rotation lattice shells for rubber-cord branch pipe] // Omskiy nauchnyy vestnik. *Omsk Scientific Bulletin*. 2012. No. 1 (107). P. 101–109. (In Russ.).

15. Korneyev S. A., Sokolovskiy Z. N., Russkikh G. S. [et al.]. Uchet vliyaniya rastyazhimosti nitey korda na raschetnyye parametry rezinokordnykh obolochek [The Influence of Cord's Stretch on Designed Parameters of Rubber-Cord Shells] // *Sovremennyye tekhnologii. Sistemnyy analiz. Modelirovaniye. Modern Technologies. System Analysis. Modeling.* 2012. No. 3 (35). P. 69–76. (In Russ.).
16. Korneyev S. A., Tribelskiy M. I., Penkov I. A. [et al.]. Analiticheskiy metod rascheta tsilindricheskikh rezi-nokordnykh obolochek [Analytical Method for Analysis of Cylindrical Rubber-Cord Shells] // *Sovremennyye tekhnologii. Sistemnyy analiz. Modelirovaniye. Modern Technologies. System Analysis. Modeling.* 2014. No. 2 (42). P. 71–77. (In Russ.).
17. Akasaka T. Elastichnyye kompozity [Elastic Compo-sites] // *Tkannyye konstruktsionnyye kompozity [Woven construction composites]* / Ed T.-I. Chu, F. Ko. Moscow: Mir Publ., 1991. P. 315-363. ISBN 5-03-002094-2. (In Russ.).
18. Chernykh K. F. Nelineynaya teoriya uprugosti v mashinostroitel'nykh raschetakh [Nonlinear theory of elasticity in engineering calculations]. Leningrad: Mashinostroyeniye Publ., 1986. 335 p. (In Russ.).
19. Chernykh K. F., Kabrits S. A., Mikhaylovskiy E. I. [et al.]. Obshchaya nelineynaya teoriya uprugikh obolochek [General non-linear theory of elastic shells] / Eds. K. F. Chernykh, S. A. Kabrits. St. Petersburg: Izdatel'stvo Sankt-Peterburgskogo universiteta Publ., 2002. 385 p. ISBN 5-288-02922-9. (In Russ.).
20. Pogorelov A. V. Differentsial'naya geometriya [Diffe-rential Geometry]. Moscow: Nauka Publ., 1974. 176 p. (In Russ.).
21. Khristianovich S. A. O plasticheskom deformiro-vanii uprochnyayushchikhsya metallov i splavov. Opre-delyayushchiye uravneniya i raschety po nim [About plastic deformation of hardening metals and alloys. Defining equations and calculations for them] // *Izbrannyye raboty.* V 2 kn. Kn. 2: Rechnaya gidravlika. Teoriya fil'tratsii. Aerodinamika i gazovaya dinamika. Gornoye delo. Teoriya plastichnosti. Energetika [Selected works. In 2 bks. Bk. 2: River hydraulics. Filtration theory. Aerodynamics and gas dynamics. Mining. Theory of plasticity. Energy]. Moscow: MIPT Publ., 2000. P. 218–246. (In Russ.).
22. Vol'mir A. S. Nelineynaya dinamika plastinok i obo-lochek [Nonlinear dynamics of plates and shells]. Moscow: Nauka Publ., 1972. 432 p. (In Russ.).
23. Novozhilov V. V., Chernykh K. F., Mikhaylovskiy E. I. Lineynaya teoriya tonkikh obolochek [The linear theory of thin shells]. Leningrad: Politekhnik Publ., 1991. 655 p. ISBN 5-7325-0127-4. (In Russ.).
24. GOST 24221–94. Tkan' kordnaya kapronovaya. Tekhnicheskiye usloviya [Kapron cord fabric. Technical conditions]. Moscow: IPK Izdatel'stvo standartov Publ., 1996. 16 p. (In Russ.).
25. Lur'ye A. I. Nelineynaya teoriya uprugosti [Nonlinear theory of elasticity]. Moscow: Nauka Publ., 1980. 512 p. (In Russ.).
26. Truesdell C. Pervonachal'nyy kurs ratsional'noy mek-haniki sploshnykh sred [A first course in rational continuum mechanics] / trans. from Engl. R. V. Goldshteyn, V. M. Entov; Eds. P. A. Zhilin, A. I. Lur'ye. Moscow: Mir Publ., 1975. 592 p. (In Russ.).
27. Treloar L. Fizika uprugosti kauchuka [Physics of elasticity of rubber] / Ed. E. V. Kuvshinskiy. Moscow: Izdatel'stvo inostrannoy literatury Publ., 1953. 240 p. (In Russ.).

---

**KORNEYEV Vladimir Sergeevich**, Candidate of Techni-cal Sciences, Associate Professor of Fundamentals of the Theory of Mechanics and Automatic Control Department.

SPIN-code: 5866-0890

AuthorID (RSCI): 566718

ORCID: 0000-0003-1694-1190

AuthorID (SCOPUS): 57190977806

Address for correspondence: 79045840307@ya.ru

**SHALAY Viktor Vladimirovich**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Transport, Oil and Gas Storage, Standardization and Certification Department, President of OmSTU.

SPIN-code: 2322-6820

AuthorID (RSCI): 9913

ORCID: 0000-0003-0635-4849

AuthorID (SCOPUS): 35792469000

AuthorID (SCOPUS): 56755298300

AuthorID (SCOPUS): 57190972363

ResearcherID: P-8233-2015

Address for correspondence: shalay@omgtu.ru

#### For citations

Korneyev V. S., Shalay V. V. Mathematical model of rubber-cord shell of rotation for pneumatic dampers // *Omsk Scientific Bulletin. Series Aviation-Rocket and Power Engineering.* 2019. Vol. 3, no. 1. P. 22–41. DOI: 10.25206/2588-0373-2019-3-1-22-41.

Received 20 February 2019.

© V. S. Korneyev, V. V. Shalay