

ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЕЗИНОКОРДНОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

В. С. Корнеев, В. В. Шалай

Омский государственный технический университет,
Россия, 644050, г. Омск, пр. Мира, 11

Проведена процедура линеаризации ранее построенной математической модели резинокордной оболочки вращения с упругодеформируемыми нитями корда при симметричном нагружении внутренним избыточным давлением и осевой силой. Проанализированы характерные особенности линеаризованной математической модели, особое внимание обращено на правильный выбор ненагруженной отсчётной конфигурации, имеющей место не при нулевом избыточном давлении, а при избыточном давлении, стремящемся к нулю. Отмечено, что наибольший практический интерес линеаризованная математическая модель представляет для аналитического расчёта и проектирования резинокордных патрубков и пневматических амортизаторов рукавного типа с оптимальными рабочими характеристиками.

Ключевые слова: резинокордная оболочка вращения, математическая модель, линеаризация, ненагруженная конфигурация.

Введение

В системах виброзащиты и виброизоляции широко используются пневматические элементы с резинокордными оболочками [1–3], а также резино-гидравлические виброопоры [4]. Конструктивные схемы пневматических элементов и виброопор весьма разнообразны, у большинства из них резинокордные оболочки выполнены в виде оболочек вращения.

Резинокордная оболочка вращения в ненагруженном состоянии имеет по оси длину l_0 , а меридиан её срединной поверхности описывается (в цилиндрической системе координат) уравнениями $r_0(\xi_0)$, $z_0(\xi_0)$ (рис. 1а). Здесь ξ_0 — криволинейная координата произвольной точки меридиана $M_0(r_0, z_0)$, равная длине соответствующей дуги меридиана в отсчётной конфигурации (до нагружения). После нагружения (внутренним избыточным давлением p_u и осевой силой P) срединная поверхность оболочки принимает форму некоторой поверхности вращения с меридианом $r(\xi)$, $z(\xi)$ и длиной l вдоль оси (рис. 1б). Здесь ξ — криволинейная координата произвольной точки меридиана $M(r, z)$, равная длине соответствующей дуги меридиана в актуальной конфигурации (после нагружения). Благодаря осевой симметрии каждая материальная точка в меридианном сечении срединной поверхности оболочки переходит из начального положения M_0 с координатами r_0 и z_0 в конечное положение M с координатами r и z , не выходя за пределы данного меридианного сечения (рис. 1).

Напряжённо-деформированное состояние резинокордной оболочки вращения описывается полной системой уравнений, полученной в [5] и состоящей из четырёх обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dT_1}{d\xi_0} = \lambda_1 \frac{T_2 - T_1}{r} \sin\varphi_1, \quad (1)$$

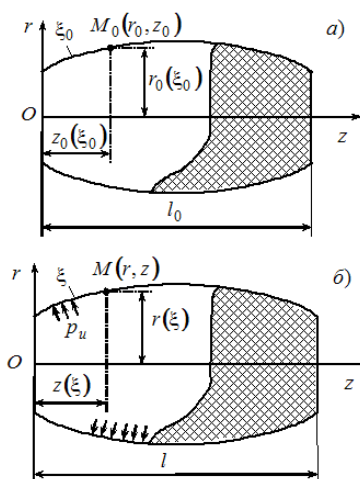


Рис. 1. Срединная поверхность оболочки вращения:
а — до нагружения (отсчётная конфигурация);
б — после нагружения (актуальная конфигурация)
Fig. 1. The median surface of rotation shell:
a — before loading (reference configuration);
b — after loading (actual configuration)

$$\frac{dz}{d\xi_0} = \lambda_1 \cos\varphi_1, \quad (2)$$

$$\frac{dr}{d\xi_0} = \lambda_1 \sin\varphi_1, \quad (3)$$

$$\frac{d\varphi_1}{d\xi_0} = -\lambda_1 \kappa_1 \quad (4)$$

с соответствующими граничными условиями крепления резинокордной оболочки к металлической арматуре, выражений для кривизны меридиана κ_1 и кривизны параллели κ_2 :

$$\kappa_1 = \frac{p_u - \kappa_2 T_2}{T_1},$$

$$\kappa_2 = \frac{\cos \varphi_1}{r}, \quad (5)$$

зависимостей

$$\lambda_2 = \frac{r}{r_0},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \operatorname{tg} \alpha_0, \quad (6)$$

определяющих кратность удлинения параллели λ_2 и величину угла наклона нитей корда к меридиану α и определяющих соотношений

$$T_1 = 2 \frac{k}{\delta_0} \frac{P_\kappa(\lambda_\kappa)}{\lambda_\kappa} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cos^2 \alpha_0 + 2h_0 \chi_p \frac{\Psi_1(\lambda_1, \lambda_2)}{\lambda_1 \lambda_2}, \quad (7)$$

$$T_2 = 2 \frac{k}{\delta_0} \frac{P_\kappa(\lambda_\kappa)}{\lambda_\kappa} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sin^2 \alpha_0 + 2h_0 \chi_p \frac{\Psi_2(\lambda_1, \lambda_2)}{\lambda_1 \lambda_2}, \quad (8)$$

связывающих погонные (на единицу длины) меридианное усилие T_1 и тангенциальное (окружное) усилие T_2 с кратностями удлинения меридиана λ_1 и параллели λ_2 . Функции

$$\Psi_1(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_1} - (\lambda_1 \lambda_2)^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_3} \Big|_{\lambda_3 = (\lambda_1 \lambda_2)^{-1}}, \quad (9)$$

$$\Psi_2(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_2} - (\lambda_1 \lambda_2)^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_3} \Big|_{\lambda_3 = (\lambda_1 \lambda_2)^{-1}} \quad (10)$$

описывают упругие напряжения в резине через упругий потенциал $\Phi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ с учётом условия несжимаемости $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ ($\lambda_3 = h/h_0$ — кратность изменения толщины стенки). Здесь φ_1 — угол между касательной к меридиану и осью вращения оболочки; p_u — внутреннее избыточное давление в оболочке; $P_\kappa(\lambda_\kappa)$ — силовая характеристика нити корда, отражающая зависимость усилия P_κ от кратности удлинения нити корда

$$\lambda_\kappa = \sqrt{\lambda_1^2 \cos^2 \alpha_0 + \lambda_2^2 \sin^2 \alpha_0}, \quad (11)$$

k — число слоёв нитей корда одного направления,

$$\chi_p = 1 - \chi_\kappa,$$

$$\chi_\kappa = \frac{\pi d_\kappa^2}{4} \frac{k}{\delta_0 h_0}, \quad (12)$$

объёмные доли резины и нитей корда соответственно в (несжимаемом) резинокордном композите, d_κ — диаметр нити корда в ненагруженном состоянии, h_0 и h — полутолщина стенки резинокордной оболочки до и после нагружения. Геометрическая форма оболочки в ненагруженном состоянии описывается параметрическими зависимостями $r_0 = r_0(\xi_0)$, $z_0 = z_0(\xi_0)$, а начальный шаг

между нитями корда и начальный угол наклона нитей корда к меридиану — параметрическими зависимостями $\delta_0 = \delta_0(\xi_0)$, $\alpha_0 = \alpha_0(\xi_0)$ соответственно, которые устанавливаются путём прямых измерений специальным образом подготовленных образцов резинокордной оболочки, либо теоретически, исходя из технологии изготовления резинокордной оболочки [5].

Полная система уравнений (1–12), описывающая упругое деформирование резинокордной оболочки, является нелинейной. По этой причине возможно только численное решение соответствующей краевой задачи. С другой стороны, при поиске численного решения нелинейной задачи необходимо располагать «хорошим» начальным приближением, достаточно близким к искомому решению для того, чтобы обеспечить сходимость численного алгоритма и сократить время проведения численных расчётов. Поэтому первый шаг в исследовании нелинейных систем состоит, как правило, в построении приближённой линейной модели, получаемой линеаризацией исходных уравнений. Если в дополнение к этому удастся получить аналитическое решение линеаризованных уравнений¹, то тогда можно проверить адекватность линейной математической модели и уточнить область её применимости.

Помимо этого, приближённое аналитическое решение линеаризованной задачи позволяет, во-первых, быстро и эффективно проводить предварительный анализ работы пневматического элемента в составе той или иной системы виброзащиты и виброизоляции и, во-вторых, ставить и решать задачи оптимального проектирования, связанные с подбором рациональных конструктивных параметров резинокордной оболочки, оценивать её поведение во всём диапазоне изменения конструктивных параметров и, как минимум, делать качественное заключение о целесообразности того или иного технического решения.

В этой связи настоящая статья посвящена выводу линеаризованных уравнений математической модели резинокордной оболочки вращения (1–12) и анализу характерных особенностей.

Теория

Поскольку вся нагрузка, приложенная к резинокордной оболочке, воспринимается практически одними нитями корда, при построении линейной математической модели, ограниченной малыми упругими деформациями, можно пренебречь вкладом резины. В этом случае после отбрасывания последнего члена в правой части (7), (8) получаются упрощённые определяющие соотношения, используемые в безмоментной теории сетчатых оболочек вращения [7–17]:

$$T_1 = 2 \frac{k}{\delta_0} \frac{P_\kappa(\lambda_\kappa)}{\lambda_\kappa} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cos^2 \alpha_0, \quad (13)$$

$$T_2 = 2 \frac{k}{\delta_0} \frac{P_\kappa(\lambda_\kappa)}{\lambda_\kappa} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sin^2 \alpha_0. \quad (14)$$

Если (14) разделить на (13), придём к общеизвестному соотношению между погонными усилиями вдоль меридиана и параллели при симметричном нагружении оболочки:

$$T_2/T_1 = \operatorname{tg}^2 \alpha. \quad (15)$$

Введём следующие представления для геометрических переменных:

$$\begin{aligned} r &= r_0(\xi_0) + u_r, \\ z &= z_0(\xi_0) + u_z, \\ \varphi_1 &= \varphi_1^0(\xi_0) + \Delta\varphi_1, \end{aligned} \quad (16)$$

где u_r , u_z — радиальное и осевое перемещения точек срединной поверхности оболочки при переходе из отсчётной в актуальную конфигурацию соответственно, $\Delta\varphi_1$ — приращение угла наклона меридиана к оси вращения оболочки при указанном переходе (рис. 1). В качестве отсчётной конфигурации возьмём конфигурацию, в которой нет смещения торцов оболочки из её среднего положения ($S \equiv l - l_0 = 0$), нити корда не напряжены, а погонные усилия $T_1 = T_2 = 0$. Последнее имеет место, если внутреннее избыточное давление равно нулю ($p_u = 0$).

Будем исходить из предположения, что первичные переменные T_1 , u_r , u_z , $\Delta\varphi_1$ непрерывным образом зависят от избыточного давления p_u и что

$$\begin{aligned} \lim_{p_u \rightarrow 0} T_1 &= 0, \\ \lim_{p_u \rightarrow 0} u_r &= 0, \\ \lim_{p_u \rightarrow 0} u_z &= 0, \\ \lim_{p_u \rightarrow 0} \Delta\varphi_1 &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Полагаем также, что внутреннее избыточное давление p_u достаточно мало для того, чтобы можно было пренебречь любыми членами в исходных нелинейных уравнениях, кроме тех, которые линейным образом зависят от величин p_u , T_1 , u_r , u_z , $\Delta\varphi_1$ и их производных по независимой переменной ξ_0 .

Преобразуем систему дифференциальных уравнений (1–4) с учётом замены первичных переменных (16), соотношения (15) и вытекающих из (2–4) равенств

$$\begin{aligned} \frac{dz_0(\xi_0)}{d\xi_0} &= \cos[\varphi_1^0(\xi_0)], \\ \frac{dr_0(\xi_0)}{d\xi_0} &= \sin[\varphi_1^0(\xi_0)], \\ \frac{d\varphi_1^0(\xi_0)}{d\xi_0} &= -\kappa_1^0(\xi_0), \end{aligned}$$

где κ_1^0 — кривизна меридиана в отсчётной конфигурации. Получим

$$\frac{dT_1}{d\xi_0} = \lambda_1 \frac{T_1(\operatorname{tg}^2 \alpha - 1)}{r_0(\xi_0) + u_r} \sin[\varphi_1^0(\xi_0) + \Delta\varphi_1], \quad (18)$$

$$\frac{du_z}{d\xi_0} = \lambda_1 \cos[\varphi_1^0(\xi_0) + \Delta\varphi_1] - \cos[\varphi_1^0(\xi_0)], \quad (19)$$

$$\frac{du_r}{d\xi_0} = \lambda_1 \sin[\varphi_1^0(\xi_0) + \Delta\varphi_1] - \sin[\varphi_1^0(\xi_0)], \quad (20)$$

$$\frac{d\Delta\varphi_1}{d\xi_0} = -[\lambda_1 \kappa_1 - \kappa_1^0(\xi_0)]. \quad (21)$$

Для замыкания системы дифференциальных уравнений (18–21) следует добавить определяющие соотношения (13), (15), выражения (5) для кривизны меридиана и параллели, преобразованные выражения для кратностей удлинения меридиана и параллели

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha_0} \lambda_\kappa, \\ \lambda_2 &= \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_0} \lambda_\kappa, \\ \lambda_2 &= \frac{r}{r_0}, \end{aligned} \quad (22)$$

эквивалентные выражениям (6), (11), а также выражение

$$\lambda_\kappa = 1 + \varepsilon_\kappa, \quad (23)$$

связывающее кратность λ_κ и относительное удлинение ε_κ нитей корда. Для точного описания силовой характеристикой нитей корда достаточно ограничиться квадратичной зависимостью

$$P_\kappa = a\varepsilon_\kappa + b\varepsilon_\kappa^2. \quad (24)$$

1. Линеаризация математической модели

Исходя из (16) и представления

$$\alpha = \alpha_0(\xi_0) + \Delta\alpha,$$

в линейном приближении имеем

$$\begin{aligned} \sin \varphi_1 &\cong \sin \varphi_1^0 + \cos \varphi_1^0 \Delta\varphi_1, \\ \cos \varphi_1 &\cong \cos \varphi_1^0 - \sin \varphi_1^0 \Delta\varphi_1, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha &\cong \sin \alpha_0 + \cos \alpha_0 \Delta\alpha, \\ \cos \alpha &\cong \cos \alpha_0 - \sin \alpha_0 \Delta\alpha, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cong \operatorname{tg} \alpha_0 + \frac{\Delta\alpha}{\cos^2 \alpha_0},$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha \cong \operatorname{tg}^2 \alpha_0 + \frac{2\operatorname{tg} \alpha_0 \Delta\alpha}{\cos^2 \alpha_0},$$

$$\frac{1}{r} \cong \frac{1}{r_0} - \frac{u_r}{r_0^2}. \quad (27)$$

С учётом (16), (23), (26) линеаризованные уравнения (22) принимают вид

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\cong 1 + \varepsilon_\kappa - \operatorname{tg} \alpha_0 \Delta\alpha, \\ \lambda_2 &\cong 1 + \varepsilon_\kappa + \operatorname{ctg} \alpha_0 \Delta\alpha, \end{aligned}$$

$$\lambda_2 \cong 1 + \frac{u_r}{r_0}. \quad (28)$$

Последние два уравнения (28) отражают связь между приращением угла наклона нитей корда $\Delta\alpha$, их относительным удлинением ε_κ и радиальным смещением u_r :

$$\Delta\alpha = \left(\frac{u_r}{r_0} - \varepsilon_\kappa \right) \operatorname{tg}\alpha_0. \quad (29)$$

Далее линеаризуем уравнения (15), (24):

$$\begin{aligned} T_2 &\cong T_1 \operatorname{tg}^2\alpha_0, \\ P_\kappa &\cong a\varepsilon_\kappa. \end{aligned} \quad (30)$$

На основании (23), (28), (30) для линеаризованного соотношения (13) имеем

$$T_1 \cong 2\varepsilon_\kappa \frac{ak}{\delta_0} \cos^2\alpha_0. \quad (31)$$

Соотношение (31) позволяет выразить относительное удлинение нитей корда через меридианное усилие:

$$\varepsilon_\kappa \cong \frac{\delta_0 T_1}{2ak \cos^2\alpha_0}. \quad (32)$$

Обратимся теперь к выражениям (5) для кривизны меридиана и параллели. С помощью (25), (27) сначала находим

$$\kappa_2 \cong \frac{\cos\varphi_1^0}{r_0} - \frac{\cos\varphi_1^0}{r_0^2} u_r - \frac{\sin\varphi_1^0}{r_0} \Delta\varphi_1.$$

После этого с учётом (15), (27) получаем

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{p_u}{T_1} - \operatorname{tg}^2\alpha_0 \frac{\cos\varphi_1^0}{r_0} + \operatorname{tg}^2\alpha_0 \frac{\cos\varphi_1^0}{r_0^2} u_r + \\ &+ \operatorname{tg}^2\alpha_0 \frac{\sin\varphi_1^0}{r_0} \Delta\varphi_1 - \frac{2\operatorname{tg}\alpha_0}{\cos^2\alpha_0} \frac{\cos\varphi_1^0}{r_0} \Delta\alpha. \end{aligned} \quad (33)$$

При $p_u = 0$ кривизна $\kappa_1 = \kappa_1^0(\xi_0)$. В силу данного факта из (33) имеем

$$\lim_{p_u \rightarrow 0} \kappa_1 = \lim_{p_u \rightarrow 0} \frac{p_u}{T_1} - \frac{\cos\varphi_1^0}{r_0} \operatorname{tg}^2\alpha_0 = \kappa_1^0$$

или

$$\lim_{p_u \rightarrow 0} \frac{p_u}{T_1} = \kappa_1^0 + \frac{\cos\varphi_1^0}{r_0} \operatorname{tg}^2\alpha_0.$$

Следовательно, по определению предела [18]

$$\frac{p_u}{T_1} = \kappa_1^0 + \frac{\cos\varphi_1^0}{r_0} \operatorname{tg}^2\alpha_0 - A, \quad (34)$$

где A — некоторая величина первого порядка малости:

$$\lim_{p_u \rightarrow 0} A = 0. \quad (35)$$

Подставляя (34) в (33), приходим к выражению

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \kappa_1^0 - A + \operatorname{tg}^2\alpha_0 \frac{\cos\varphi_1^0}{r_0^2} u_r + \\ &+ \operatorname{tg}^2\alpha_0 \frac{\sin\varphi_1^0}{r_0} \Delta\varphi_1 - \frac{2\operatorname{tg}\alpha_0}{\cos^2\alpha_0} \frac{\cos\varphi_1^0}{r_0} \Delta\alpha. \end{aligned} \quad (36)$$

Перейдём к дифференциальному уравнению (18). Благодаря (25), (27), (28) получаем линеаризованное уравнение

$$\frac{dT_1}{d\xi_0} \cong \frac{\sin\varphi_1^0}{r_0} (\operatorname{tg}^2\alpha_0 - 1) T_1. \quad (37)$$

Разделяя переменные в (37), интегрированием находим

$$T_1(\xi_0) \cong T_1(0) \exp\left\{ \int_0^{\xi_0} \frac{\sin\varphi_1^0(\xi_0)}{r_0(\xi_0)} [\operatorname{tg}^2\alpha_0(\xi_0) - 1] d\xi_0 \right\}, \quad (38)$$

где $T_1(0)$ — значение меридианного усилия при $\xi_0 = 0$ (в точке крепления оболочки к металлической арматуре). Если ввести обозначение

$$F_T(\xi_0) = \exp\left\{ \int_0^{\xi_0} \frac{\sin\varphi_1^0(\xi_0)}{r_0(\xi_0)} [\operatorname{tg}^2\alpha_0(\xi_0) - 1] d\xi_0 \right\},$$

выражение (38) можно переписать в компактном виде:

$$T_1(\xi_0) \cong T_1(0) F_T(\xi_0). \quad (39)$$

С другой стороны, согласно (34)

$$T_1 = \frac{p_u}{\kappa_1^0 + \frac{\cos\varphi_1^0}{r_0} \operatorname{tg}^2\alpha_0 - A} \quad (40)$$

или в линейном приближении (по поправке к кривизне меридиана A)

$$T_1 = \frac{p_u}{\kappa_1^0 + \frac{\cos\varphi_1^0}{r_0} \operatorname{tg}^2\alpha_0} + \frac{p_u A}{\left(\kappa_1^0 + \frac{\cos\varphi_1^0}{r_0} \operatorname{tg}^2\alpha_0 \right)^2}. \quad (41)$$

Согласно (35), поправка A является бесконечно малой величиной по избыточному давлению $p_u = 0$. Поэтому в первом приближении (по p_u) из (41) имеем

$$T_1(\xi_0) \cong \frac{p_u}{\kappa_1^0(\xi_0) + \frac{\cos\varphi_1^0(\xi_0)}{r_0(\xi_0)} \operatorname{tg}^2\alpha_0(\xi_0)}. \quad (42)$$

На основании (42) можно записать

$$T_1(0) \cong \frac{p_u}{\kappa_1^0(0) + \frac{\cos\varphi_1^0(0)}{r_0(0)} \operatorname{tg}^2\alpha_0(0)}.$$

Поэтому приближённые зависимости (39), (42) совместимы друг с другом в том случае, если

$$F_T(\xi_0) = \frac{\kappa_1^0(0) + \frac{\cos\varphi_1^0(0)}{r_0(0)} \operatorname{tg}^2\alpha_0(0)}{\kappa_1^0(\xi_0) + \frac{\cos\varphi_1^0(\xi_0)}{r_0(\xi_0)} \operatorname{tg}^2\alpha_0(\xi_0)}. \quad (43)$$

Подстановка выражения (42) в (32) определяет зависимость относительного удлинения нитей корда в первом приближении по давлению:

$$\varepsilon_k \cong \frac{\delta_0 p_u}{2ak \cos^2 \alpha_0 \left(\kappa_1^0 + \frac{\cos \varphi_1^0}{r_0} \operatorname{tg}^2 \alpha_0 \right)}. \quad (44)$$

Замечание. После нахождения зависимости $A(\xi_0)$ выражение (41) можно использовать как приближение второго порядка (по давлению p_u) для меридианного усилия $T_1(\xi_0)$. Более высокую точность обеспечивает прямое применение выражения (40). Подробное изложение вопроса о порядке внесения поправок в приближённые зависимости первого порядка требует отдельного исследования, выходящего за рамки настоящей статьи.

Чтобы получить дифференциальное уравнение для поправки $A(\xi_0)$, перепишем выражение (34) в виде²

$$A = \kappa_1^0 + \frac{\cos \varphi_1^0}{r_0} \operatorname{tg}^2 \alpha_0 - \frac{p_u}{T_1}. \quad (45)$$

Возьмём от (45) производную по ξ_0 и учтём дифференциальное уравнение (18) совместно с (34); придём к следующей цепочке равенств:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{d\xi_0} &= \frac{d}{d\xi_0} \left(\kappa_1^0 + \frac{\cos \varphi_1^0}{r_0} \operatorname{tg}^2 \alpha_0 \right) + \frac{p_u}{T_1} \frac{dT_1}{d\xi_0} = \\ &= \frac{d}{d\xi_0} \left(\kappa_1^0 + \frac{\cos \varphi_1^0}{r_0} \operatorname{tg}^2 \alpha_0 \right) + \\ &+ \lambda_1 \frac{p_u}{T_1} \frac{(\operatorname{tg}^2 \alpha - 1)}{r_0 + u_r} \sin(\varphi_1^0 + \Delta\varphi_1) = \\ &= \frac{d}{d\xi_0} \left(\kappa_1^0 + \frac{\cos \varphi_1^0}{r_0} \operatorname{tg}^2 \alpha_0 \right) + \\ &+ \lambda_1 \left(\kappa_1^0 + \frac{\cos \varphi_1^0}{r_0} \operatorname{tg}^2 \alpha_0 - A \right) \times \\ &\times \frac{(\operatorname{tg}^2 \alpha - 1)}{r_0 + u_r} \sin(\varphi_1^0 + \Delta\varphi_1). \end{aligned}$$

Линеаризуя данное уравнение, с помощью (25), (27–29), (44) получим

$$\begin{aligned} \frac{dA}{d\xi_0} &= \frac{d}{d\xi_0} \left(\kappa_1^0 + \frac{\cos \varphi_1^0}{r_0} \operatorname{tg}^2 \alpha_0 \right) + \\ &+ \left(\kappa_1^0 + \frac{\cos \varphi_1^0}{r_0} \operatorname{tg}^2 \alpha_0 \right) \times \\ &\times \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_0 - 1}{r_0} \sin \varphi_1^0 + \frac{\delta_0 p_u}{2ak \cos^2 \alpha_0} \times \\ &\times \left(\operatorname{tg}^4 \alpha_0 - 2 \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_0}{\cos^2 \alpha_0} - 1 \right) \times \\ &\times \frac{\sin \varphi_1^0}{r_0} - (\operatorname{tg}^2 \alpha_0 - 1) \frac{\sin \varphi_1^0}{r_0} A + \\ &+ \left(\kappa_1^0 + \frac{\cos \varphi_1^0}{r_0} \operatorname{tg}^2 \alpha_0 \right) (\operatorname{tg}^2 \alpha_0 - 1) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times \frac{\cos \varphi_1^0}{r_0} \Delta\varphi_1 + \left(\kappa_1^0 + \frac{\cos \varphi_1^0}{r_0} \operatorname{tg}^2 \alpha_0 \right) \times \\ &\times \left(\frac{2 \operatorname{tg}^2 \alpha_0}{\cos^2 \alpha_0} - \operatorname{tg}^4 \alpha_0 + 1 \right) \frac{\sin \varphi_1^0}{r_0^2} u_r. \end{aligned}$$

Отсюда со ссылкой на пределы (17), (35) следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{p_u \rightarrow 0} \frac{dA}{d\xi_0} &= \frac{d}{d\xi_0} \left(\kappa_1^0 + \frac{\cos \varphi_1^0}{r_0} \operatorname{tg}^2 \alpha_0 \right) + \\ &+ \left(\kappa_1^0 + \frac{\cos \varphi_1^0}{r_0} \operatorname{tg}^2 \alpha_0 \right) \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_0 - 1}{r_0} \sin \varphi_1^0 = 0. \quad (46) \end{aligned}$$

В результате приходим к искомому дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{dA}{d\xi_0} &= - \frac{\delta_0 p_u}{2ak \cos^6 \alpha_0} \frac{\sin \varphi_1^0}{r_0} - (\operatorname{tg}^2 \alpha_0 - 1) \frac{\sin \varphi_1^0}{r_0} A + \\ &+ \left(\kappa_1^0 + \frac{\cos \varphi_1^0}{r_0} \operatorname{tg}^2 \alpha_0 \right) (\operatorname{tg}^2 \alpha_0 - 1) \frac{\cos \varphi_1^0}{r_0} \Delta\varphi_1 + \\ &+ \left(\kappa_1^0 + \frac{\cos \varphi_1^0}{r_0} \operatorname{tg}^2 \alpha_0 \right) \frac{\sin \varphi_1^0}{r_0^2 \cos^4 \alpha_0} u_r. \quad (47) \end{aligned}$$

Сопутствующее равенство (46) определяет дифференциальную связь между геометрическими характеристиками меридиана срединной поверхности оболочки и углом расположения нитей корда в отсчётной конфигурации. Равенство (46) в обязательном порядке должно выполняться, чтобы существовали пределы (17), (35).

Аналогичным образом линеаризуются уравнения (19), (20). Исходя из (25), (28), имеем

$$\begin{aligned} \frac{du_z}{d\xi_0} &= \frac{\delta_0 p_u}{2ak \cos^2 \alpha_0} \frac{(\operatorname{tg}^2 \alpha_0 + 1) \cos \varphi_1^0}{\kappa_1^0 + \frac{\cos \varphi_1^0}{r_0} \operatorname{tg}^2 \alpha_0} - \\ &- \sin \varphi_1^0 \Delta\varphi_1 - \operatorname{tg}^2 \alpha_0 \frac{\cos \varphi_1^0}{r_0} u_r, \quad (48) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{du_r}{d\xi_0} &= \frac{\delta_0 p_u}{2ak \cos^2 \alpha_0} \frac{(\operatorname{tg}^2 \alpha_0 + 1) \sin \varphi_1^0}{\kappa_1^0 + \frac{\cos \varphi_1^0}{r_0} \operatorname{tg}^2 \alpha_0} + \\ &+ \cos \varphi_1^0 \Delta\varphi_1 - \operatorname{tg}^2 \alpha_0 \frac{\sin \varphi_1^0}{r_0} u_r. \quad (49) \end{aligned}$$

Точно так же для уравнения (21) с помощью (36) получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\varphi_1}{d\xi_0} &= - \frac{\delta_0 p_u}{2ak \cos^2 \alpha_0 \left(\kappa_1^0 + \frac{\cos \varphi_1^0}{r_0} \operatorname{tg}^2 \alpha_0 \right)} \times \\ &\times \left[\kappa_1^0 (\operatorname{tg}^2 \alpha_0 + 1) + 2 \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_0}{\cos^2 \alpha_0} \frac{\cos \varphi_1^0}{r_0} \right] + \\ &+ A - \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_0}{r_0} \sin \varphi_1^0 \Delta\varphi_1 + \\ &+ \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_0}{r_0} \left[\kappa_1^0 + \frac{\cos \varphi_1^0}{r_0} \left(\frac{2}{\cos^2 \alpha_0} - 1 \right) \right] u_r. \quad (50) \end{aligned}$$

Таким образом, замкнутая система линеаризованных уравнений состоит из четырёх дифференциальных уравнений (47–50), служащих для определения неизвестных функций $A(\xi_0)$, $u_z(\xi_0)$, $u_r(\xi_0)$, $\Delta\varphi_1(\xi_0)$ по заданным граничным условиям. Так, например, для оболочки с неизменными точками крепления к металлической арматуре (рис. 1) граничные условия можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_r|_{\xi_0=0} &= 0, \\ u_z|_{\xi_0=0} &= 0, \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} u_r|_{\xi_0=\xi_0^*} &= 0, \\ u_z|_{\xi_0=\xi_0^*} &= S, \end{aligned} \quad (52)$$

где ξ_0^* — криволинейная координата той точки меридиана, в которой закреплена оболочка справа (рис. 1); $S = l - l_0$ относительное смещение торцов оболочки (рис. 1). В случае если резинокордная оболочка обладает плоскостью симметрии $z_0 = l_0/2$ в ненагруженном состоянии (рис. 1), то граничные условия (52) можно заменить эквивалентными граничными условиями

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_1|_{\xi_0=\xi_0^k} &= 0, \\ u_z|_{\xi_0=\xi_0^k} &= S/2, \end{aligned}$$

которые более удобны при интегрировании системы уравнений (47–50). Здесь $\xi_0^k = \xi_0^*/2$ — криволинейная координата точки меридиана, расположенной на экваторе оболочки посередине её длины (рис. 1).

Обсуждение результатов

Исходная нелинейная математическая модель (1–12) обладает одной характерной особенностью. Дело в том, что геометрия меридиана оболочки «по чертежу», имеющая место после изготовления при нулевом избыточном давлении $p_u = 0$, может существенно отличаться от геометрии меридиана при стремлении избыточного давления к нулевому пределу $p_u \rightarrow 0$. Так, например, «по чертежу» полумеридиан резинокордной оболочки баллонного типа состоит из прямолинейного участка A_0B_0 и четверти окружности B_0K_0 (рис. 2). В точке крепления A_0 при начальном значении $\varphi_1 = 90^\circ$ приращение угла наклона меридиана к оси вращения составляет $\Delta\varphi_1 = 16,0^\circ$ при избыточном давлении $p_u = 10^{-4}$ бар (или 10 Па) (рис. 2). Поэтому если в качестве отсчётной конфигурации берётся конфигурация³ при $p_u = 0$ (положение 1 меридиана на рис. 2), то тогда не будут выполняться предельные равенства (17), которые лежат в основе процедуры линеаризации. В частности, не будут удовлетворяться равенства (43), (46), которым должна соответствовать «правильная» геометрия меридиана оболочки в отсчётной конфигурации. Указанные требования выполняются только в том случае, если в качестве отсчётной конфигурации взять предельную конфигурацию, имеющую место



Рис. 2. Меридиан срединной поверхности РКО модели Н-50 при $S = 0$:

- 1 — избыточное давление $p_u = 0$;
- 2 — избыточное давление $p_u = 10$ Па;
- A_0 — точка крепления оболочки к металлической арматуре;
- B_0 — точка перехода от прямой линии к окружности ($p_u = 0$);
- K_0 — точка экватора ($p_u = 0$)

Fig. 2. The meridian of the middle surface of the RKO model N-50 at $S = 0$:

- 1 — overpressure $p_u = 0$;
- 2 — overpressure $p_u = 10$ Pa;
- A_0 — point of attachment of the casing to metal fittings;
- B_0 — transition point from a straight line to a circle ($p_u = 0$);
- K_0 — equator point ($p_u = 0$)

при $p_u \rightarrow 0$ (положение 2 меридиана на рис. 2). Недостатком данной конфигурации является то, что она наперёд неизвестна, соответствующие геометрические характеристики меридиана приходится предварительно оценивать, используя численные методы: рассчитывать на ПЭВМ и аппроксимировать результаты так, чтобы выполнялись равенства (43), (46).

Несовпадение конфигураций оболочки при $p_u = 0$ и $p_u \rightarrow 0$ является следствием того, что исходная математическая модель (1–12) базируется на безмоментной теории резинокордных оболочек. При учёте сопротивления изгибным деформациям данная особенность не возникает. Однако в последнем случае математическая модель сильно усложняется, что не совсем оправданно, так как для пневматических элементов практическое значение имеет поведение резинокордной оболочки при достаточно больших давлениях (1 бар и выше), для которых приближения безмоментной теории вполне достаточно [7–17].

Обоих отмеченных особенностей лишён случай, когда меридиан оболочки в ненагруженном состоянии является прямой линией. Данный слу-

чай соответствует резинокордной оболочке, которая в технической литературе называется резинокордным патрубком [19, 20]. Резинокордные патрубки применяются не только для соединения трубопроводов, но и в качестве так называемых пневматических амортизаторов рукавного типа [14], рукавных амортизаторов растяжения [21] в системах виброзащиты и виброизоляции.

Заключение

Линеаризованные уравнения (47–50) представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка с переменными коэффициентами. Вследствие переменности коэффициентов получить общее аналитическое решение не представляется возможным, кроме частного случая, когда коэффициенты являются постоянными величинами [22–24].

Более существенной является другая характерная особенность рассматриваемой краевой задачи, проиллюстрированная на примере резинокордной оболочки баллонного типа (рис. 2). Прямолинейный участок меридиана A_0B_0 под действием ненулевого (даже бесконечно малого) избыточного давления должен значительно искривиться, чтобы стало возможным достижение соответствующего положения равновесия. Поэтому геометрия меридиана при $p_u = 0$ сильно отличается от геометрии меридиана при стремлении избыточного давления к нулевому пределу $p_u \rightarrow 0$.

Обеих отмеченных особенностей лишён частный случай, когда меридиан оболочки в ненагруженном состоянии является прямой линией. В технических приложениях данные оболочки используются в качестве резинокордных патрубков для соединения трубопроводов [19, 20], в системах виброзащиты и виброизоляции — как пневматические амортизаторы рукавного типа [14] или рукавные амортизаторы растяжения [21]. В последующем исследовании будет показано, что для перечисленных резинотехнических изделий можно получить аналитическое решение линеаризованной математической модели, которое представляет практический интерес для проектирования резинокордных оболочек вращения с оптимальными рабочими характеристиками.

Примечания

¹Как отмечал Н. Е. Жуковский, «задача учёного составлять такие уравнения, которые можно интегрировать» [6].

²С логической точки зрения запись (45) является определением величины A .

³Обратим внимание, что в отсчётной конфигурации смещение торцов оболочки отсутствует: $S = l - l_0 = 0$ (рис. 1).

Список источников

1. Акоюн Р. А. Пневматическое поддресоривание автотранспортных средств (вопросы теории и практики). В 2 ч. Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1979. Ч. 1. 218 с.

2. Певзнер Я. М., Горелик А. М. Пневматические и гидропневматические подвески. М.: Машгиз, 1963. 319 с.

3. Равкин Г. О. Пневматическая подвеска автомобиля. М.: Машгиз, 1962. 289 с.

4. Гордеев Б. А., Ерофеев В. И., Синев А. В. [и др.]. Системы виброзащиты с использованием инерционности и диссипации реологических сред. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 176 с. ISBN 5-9221-0561-2.

5. Корнеев В. С., Шалай В. В. Математическая модель резинокордной оболочки вращения для пневматических амортизаторов // Омский научный вестник. Сер. Авиационно-ракетное и энергетическое машиностроение. 2019. Т. 3, № 1. С. 22–41. DOI: 10.25206/2588-0373-2019-3-1-22-41.

6. Новожилов В. В., Черных К. Ф., Михайловский Е. И. Линейная теория тонких оболочек. Л.: Политехника, 1991. 655 с. ISBN 5-7325-0127-4.

7. Бидерман В. Л. Расчеты резиновых и резинокордных деталей // Расчеты на прочность в машиностроении. В 3 т. Т. 2. Некоторые задачи прикладной теории упругости. Расчеты за пределами упругости. Расчеты на ползучесть / под ред. С. Д. Пономарева [и др.]. М.: Машгиз, 1958. С. 487–591.

8. Бидерман В. Л. Механика тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.

9. Бидерман В. Л., Гуслицер Р. Л., Захаров С. П. [и др.]. Автомобильные шины (конструкция, расчёт, испытание, эксплуатация). М.: Госхимиздат, 1963. 383 с.

10. Frank F., Hofferberth W. Mechanics of the Pneumatic Tire // Rubber Chemistry and Technology. 1967. Vol. 40, Issue 1. P. 271–322. DOI: 10.5254/1.3539045.

11. Clark S. K. Mechanics of Pneumatic Tires: monograph. Washington D. C.: U. S. Department of Transportation, National Highway Traffic Safety Administration, 1981. 853 p.

12. Gent A. N., Walter J. D. The Pneumatic Tire. U. S. Department of Transportation, National Highway Traffic Safety Administration, Washington D. C., 2006. 701 p.

13. Koutný F. Geometry and Mechanics of Pneumatic Tires. CZE: Zlín, 2007. 139 p.

14. Трибельский И. А., Шалай В. В., Зубарев А. В. [и др.]. Расчётно-экспериментальные методы проектирования сложных резинокордных конструкций: моногр. Омск: Изд-во ОмГТУ, 2011. 238 с. ISBN 978-5-8149-1077-6.

15. Корнеев В. С., Трибельский М. И. Расчётная модель сетчатой оболочки вращения для резинокордного патрубка // Омский научный вестник. 2012. № 1 (107). С. 101–109.

16. Корнеев В. С., Соколовский З. Н., Русских Г. С., Корнеев В. С., Трибельский М. И. Учёт влияния растяжимости нитей корда на расчётные параметры резинокордных оболочек // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2012. № 3 (35). С. 69–76.

17. Корнеев В. С., Трибельский М. И., Пеньков И. А., Корнеев В. С. Аналитический метод расчёта цилиндрических резинокордных оболочек // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2014. № 2 (42). С. 71–77.

18. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. М.: Наука, 1970. Т. 1. 608 с.

19. Патрубки // ФГУП «ФНПЦ «Прогресс». URL: <http://www.progress-omsk.ru/constructor.php?act=group1> (дата обращения: 15.04.2019).

20. Резинокордные компенсационные патрубки // ООО НПП «Сибрезинотехника». URL: <http://srti.ru/Katalog/?id=35> (дата обращения: 15.04.2019).

21. Русских Г. С., Онуфриенко А. В., Глазкова Е. Ю. Расчет резинокордного амортизатора растяжения // Омский научный вестник. 2015. № 3 (143). С. 90–94.

22. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.

23. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1970. 332 с.

24. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980. 232 с.

КОРНЕЕВ Владимир Сергеевич, кандидат технических наук, доцент кафедры «Основы теории механики и автоматического управления».

SPIN-код: 5866-0890

AuthorID (РИНЦ): 566718

ORCID: 0000-0003-1694-1190

AuthorID (SCOPUS): 57190977806

Адрес для переписки: 79045840307@ya.ru

ШАЛАЙ Виктор Владимирович, доктор технических наук, профессор (Россия), заведующий кафедрой «Нефтегазовое дело, стандартизация и метрология», президент ОмГТУ.

SPIN-код: 2322-6820

AuthorID (РИНЦ): 9913

ORCID: 0000-0003-0635-4849

AuthorID (SCOPUS): 35792469000

AuthorID (SCOPUS): 56755298300

AuthorID (SCOPUS): 57190972363

ResearcherID: P-8233-2015

Адрес для переписки: shalay@omgtu.ru

Для цитирования

Корнеев В. С., Шалай В. В. Линеаризованная математическая модель резинокордной оболочки вращения // Омский научный вестник. Сер. Авиационно-ракетное и энергетическое машиностроение. 2019. Т. 3, № 2. С. 15–24. DOI: 10.25206/2588-0373-2019-3-2-15-24.

Статья поступила в редакцию 23.04.2019 г.

© В. С. Корнеев, В. В. Шалай

LINEARIZED MATHEMATICAL MODEL OF RUBBER-CORD SHELL OF ROTATION

V. S. Korneyev, V. V. Shalay

Omsk State Technical University,
Russia, Omsk, Mira Ave., 11, 644050

The procedure of linearization of the previously constructed mathematical model of a rubber-cord shell of rotation with elastically deformable cord threads under symmetric loading with internal excessive pressure and axial force is performed. The characteristic specialty of the linearized mathematical model is analyzed, special attention is paid to the correct choice of the unloaded reference configuration, which takes place not at zero excess pressure, but at excess pressure tending to zero. It is noted that the linearized mathematical model is of the greatest practical interest for analytical calculation and design of rubber-cord branch pipes and pneumatic sleeve-type shock absorbers with optimal performance characteristics.

Keywords: rubber-cord shell of rotation, mathematical model, linearization, unloaded configuration.

References

1. Akopyan R. A. Pnevmaticheskoye podressorivaniye avto-transportnykh sredstv (voprosy teorii i praktiki) [Pneumatic suspension of vehicles (theory and practice questions)]. In 2 parts. Lviv: Vishcha shkola Publ. Izdatel'stvo pri L'vovskom universitete Publ., 1979. Part 1. 218 p. (In Russ.).
2. Pevzner Ya. M., Gorelik A. M. Pnevmaticheskiye i gidropnevmaticheskiye podveski [Pneumatic and hydropneumatic suspensions]. Moscow: Mashgiz Publ., 1963. 319 p. (In Russ.).
3. Ravkin G. O. Pnevmaticheskaya podveska avtomobilya [Air suspension car]. Moscow: Mashgiz Publ., 1962. 289 p. (In Russ.).
4. Gordeyev B. A., Erofeev V. I., Sinev A. V. [et al.]. Sistemy vibrozashchity s ispol'zovaniyem inertsionnosti i dissipatsii reologicheskikh sred [Vibration protection systems using inertia and dissipation of rheological media]. Moscow: FIZMATLIT Publ., 2004. 176 p. ISBN 5-9221-0561-2. (In Russ.).
5. Korneyev V. S., Shalay V. V. Matematicheskaya model' rezinokordnoy obolochki vrashcheniya dlya pnevmaticheskikh amortizatorov [Mathematical model of the rubber-cord shell of rotation for pneumatic dampers] // Omskiy nauchnyy vestnik. Ser. Aviatzionno-raketnoye i energeticheskoye mashinostroyeniye. *Omsk Scientific Bulletin. Series Aviation-Rocket and Power Engineering*. 2019. Vol. 3, no. 1. P. 22–41. DOI: 10.25206/2588-0373-2019-3-1-22-41. (In Russ.).
6. Novozhilov V. V., Chernykh K. F., Mikhaylovskiy E. I. Lineynaya teoriya tonkikh obolochek [The linear theory of thin shells]. Leningrad: Politekhnik Publ., 1991. 655 p. ISBN 5-7325-0127-4. (In Russ.).
7. Biderman V. L. Raschety rezinovykh i rezinokordnykh detaley [Calculations of rubber and rubber-cord parts] // Raschety na prochnost' v mashinostroyenii. V 3 t. T. 2. Nekotoryye zadachi prikladnoy teorii uprugosti. Raschety za predelami uprugosti. Raschety na polzuchest' [Strength calculations in mechanical engineering. In 3 parts. Part 2. Some problems of the applied theory of elasticity. Calculations beyond elasticity. Calculations for creep] / Eds. S. D. Ponomarev [et al.]. Moscow: Mashgiz Publ., 1958. P. 487–591. (In Russ.).
8. Biderman V. L. Mekhanika tonkostennykh konstrukt-siy [Mechanics of thin-walled structures]. Moscow: Mashinostroyeniye Publ., 1977. 488 p. (In Russ.).
9. Biderman V. L., Guslitser R. L., Zakharov S. P. [et al.]. Avtomobil'nyye shiny (konstruktsiya, raschet, ispytaniye, eks-pluatatsiya) [Car tires (design, calculation, test, exploitation)]. Moscow: Goskhimizdat Publ., 1963. 383 p. (In Russ.).
10. Frank F., Hofferberth W. Mechanics of the Pneumatic Tire // Rubber Chemistry and Technology. 1967. Vol. 40, Issue 1. P. 271–322. DOI: 10.5254/1.3539045. (In Engl.).
11. Clark S. K. Mechanics of Pneumatic Tires: monograph. Washington D. C.: U. S. Department of Transportation, National Highway Traffic Safety Administration, 1981. 853 p. (In Engl.).
12. Gent A. N., Walter J. D. The Pneumatic Tire. U. S. Department of Transportation, National Highway Traffic Sa-fety Administration, Washington D. C., 2006. 701 p. (In Engl.).
13. Koutný F. Geometry and Mechanics of Pneumatic Tires. CZE: Zlín, 2007. 139 p. (In Engl.).
14. Tribel'skiy I. A., Shalay V. V., Zubarev A. V. [et al.]. Raschetno-eksperimental'nyye metody proyektirovaniya slo-zhnykh rezinokordnykh konstrukt-siy [Computational-experi-mental methods for designing complex rubber-cord con-structions]. Omsk: OmSTU Publ., 2011. 238 p. ISBN 978-5-8149-1077-6. (In Russ.).
15. Korneyev S. A., Tribelskiy M. I. Raschetnaya model' setchatoy obolochki vrashcheniya dlya rezinokordnogo pat-rubka [The computational model of rotation lattice shells for rubber-cord branch pipe] // Omskiy nauchnyy vestnik. *Omsk Scientific Bulletin*. 2012. No. 1 (107). P. 101–109. (In Russ.).
16. Korneyev S. A., Sokolovskiy Z. N., Russkikh G. S., Korneyev V. S., Tribelskiy M. I. Uchet vliyaniya rastyazhivosti nitey korda na raschetnyye parametry rezinokordnykh obolochek [The Influence of Cord's Stretch on Designed Parameters of Rubber-Cord Shells] // Sovremennyye tekhnologii. Sistemnyy analiz. Modelirovaniye. *Modern Technologies. System Analysis. Modeling*. 2012. No. 3 (35). P. 69–76. (In Russ.).
17. Korneyev S. A., Tribelskiy M. I., Penkov I. A., Kor-neyev V. S. Analiticheskiy metod rascheta tsilindricheskikh rezinokordnykh obolochek [Analytical Method for Analysis of Cylindrical Rubber-Cord Shells] // Sovremennyye tekhnologii. Sistemnyy analiz. Modelirovaniye. *Modern Technologies. System Analysis. Modeling*. 2014. No. 2 (42). P. 71–77. (In Russ.).
18. Fiktengol'ts G. M. Kurs differentsial'nogo i integra-l'nogo ischisleniya [Course of differential and integral

calculus]. In 3 vols. Moscow: Nauka Publ., 1970. Vol. 1. 608 p. (In Russ.).

19. Patrubki [Nozzles]. URL: <http://www.progress-omsk.ru/constructor.php?act=group1> (accessed: 15.04.2019). (In Russ.).

20. Rezinokordnye kompensacionnye patrubki [Rubber-cord compensation nozzles]. URL: <http://srti.ru/Katalog/?id=35> (accessed: 15.04.2019). (In Russ.).

21. Russkih G. S., Onufrienko A. V., Glazkova E. Yu. Raschet rezinokordnogo amortizatora rastyazheniya [Calculation of rubber-cord stretching damper] // Omskiy nauchnyy vestnik. *Omsk Scientific Bulletin*. 2015. Vol. 3 (143). P. 90–94. (In Russ.).

22. Kamke E. Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam [Handbook of ordinary differential equations]. Moscow: Nauka Publ., 1976. 576 p. (In Russ.).

23. Pontryagin L. S. Obyknovennye differentsial'nye uravneniya [Ordinary differential equations]. Moscow: Nauka Publ., 1970. 332 p. (In Russ.).

24. Tihonov A. N., Vasil'eva A. B., Sveshnikov A. G. Differentsial'nye uravneniya [Differential equations]. Moscow: Nauka Publ., 1980. 232 p. (In Russ.).

KORNEYEV Vladimir Sergeevich, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of Fundamentals of the Theory of Mechanics and Automatic Control Department.

SPIN-code: 5866-0890

AuthorID (RSCI): 566718

ORCID: 0000-0003-1694-1190

AuthorID (SCOPUS): 57190977806

Address for correspondence: 79045840307@ya.ru

SHALAY Viktor Vladimirovich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Transport, Oil and Gas Storage, Standardization and Certification Department, President of OmSTU.

SPIN-code: 2322-6820

AuthorID (RSCI): 9913

ORCID: 0000-0003-0635-4849

AuthorID (SCOPUS): 35792469000

AuthorID (SCOPUS): 56755298300

AuthorID (SCOPUS): 57190972363

ResearcherID: P-8233-2015

Address for correspondence: shalay@omgtu.ru

For citations

Korneyev V. S., Shalay V. V. Linearized mathematical model of rubber-cord shell of rotation // *Omsk Scientific Bulletin. Series Aviation-Rocket and Power Engineering*. 2019. Vol. 3, no. 2. P. 15–24. DOI: 10.25206/2588-0373-2019-3-2-15-24.

Received 23 April 2019.

© V. S. Korneyev, V. V. Shalay