

УСТОЙЧИВОСТЬ ГИБРИДНОГО КОМПОЗИТНОГО СТЕРЖНЯ В УСЛОВИЯХ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР

Ю. В. Немировский^{1,2}, Д. В. Моховнёв²

¹Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христановича СО РАН,
Россия, 630090, г. Новосибирск, ул. Институтская, 4/1

²Новосибирский государственный технический университет,
Россия, 630073, г. Новосибирск, пр. Карла Маркса, 20

Поставлена задачи устойчивости стержня, изготовленного из двух материалов при термосиловом нагружении за пределами упругости. Закон деформирования материалов аппроксимируется кубическим полиномом по всей диаграмме деформаций, что значительно упрощает постановку задачи устойчивости. Учитывается влияние температуры на закон деформирования. Процесс потери устойчивости рассматривается в рамках концепции продольно-поперечного нагружения Ф. Р. Шенли. Задача устойчивости сводится к решению линейного однородного дифференциального уравнения с линейными однородными граничными условиями. Приведены примеры расчёта критических параметров термосилового нагружения.

Ключевые слова: устойчивость стержней, пластичность, композитные конструкции, температурное нагружение.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-01-00038).

Введение

Стержневые конструкции составляют основу многих инженерных сооружений, используемых в различных отраслях машино-судо-авиастроения, строительной индустрии и объектах космической техники. Сейчас к ним предъявляются очень жёсткие экономические и эксплуатационные требования по надёжному функционированию в процессе длительных и достаточно высоких уровней внешних нагрузок и температур. При этом важная практическая проблема заключается в установлении предельно допустимых уровней внешних воздействий, гарантирующих их устойчиво надёжную эксплуатацию. Одной из важнейших фундаментальных проблем для установления таких предельно допустимых уровней внешних воздействий является решение проблемы устойчивого деформирования стержневого элемента в условиях продольного сжатия или продольно-поперечного сжатия. Правильное решение задач устойчивости приводит к снижению материалоемкости стержневых конструкций и к увеличению их прочности и долговечности. С другой стороны, обеспечивает гарантийный сертификат изделия, поскольку на практике при выходе за пределы установленных критических уровней внешних воздействий в конструкции начинают активно развиваться неконтролируемые перемещения и скрытые формы разрушений.

Обзор и анализ многочисленных публикаций проблемы устойчивости стержней из однородных материалов изложен в широко известных монографиях [1–4]. Анализ многих новых ре-

зультатов, полученных в последнее десятилетие, нашёл отражение в недавно вышедших монографиях [5, 6].

В работе [5] обсуждается вопрос о корректности квазистатической постановки задачи устойчивости и подробно изучается поведение упругопластического сплошного стержня из однородного материала. Установлено, что под действием касательно-модульной нагрузки стержень неустойчив. Установлено условие корректности постановки Ф. Р. Шенли [7, 8] для материалов с любой диаграммой $\sigma - \epsilon$.

Поскольку в реальных сооружениях отдельно взятый стержневой элемент работает не изолированно, а во взаимодействии с другими связанными с ним элементами, то в монографии [6] разработан принципиально новый подход об устойчивости стержней с разгружаемыми и догружаемыми связями и впервые установлено, что у пластической неизолированной системы может существовать не одно, а целое множество критических состояний, обусловленных взаимодействием сопрягаемых элементов. На основе этих исследований были разработаны рекомендации по управлению процессами неупругого деформирования сжато-изогнутых стержней для существенного повышения их устойчивости.

Постановка задачи

В настоящее время проблема повышения несущей способности и устойчивости стержневых элементов решается на путях создания новых типов композитных конструкций. В этом случае важную роль регулятора может играть

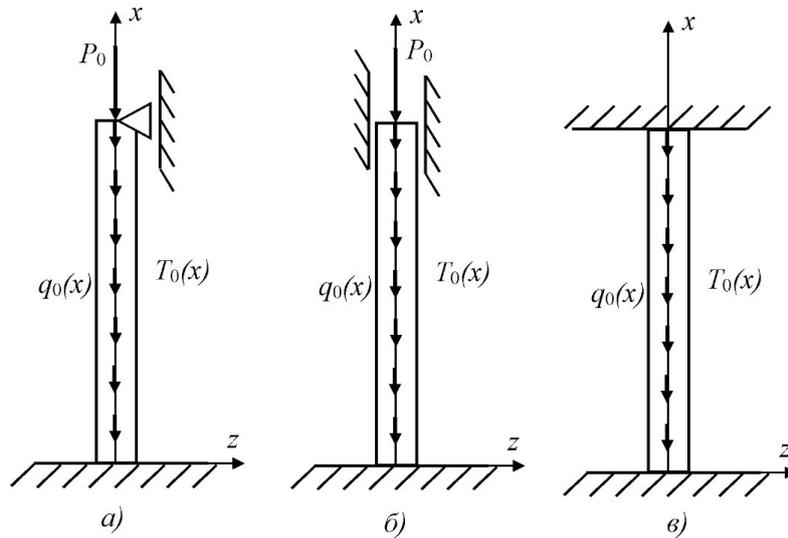


Рис. 1. Расчётные схемы
Fig. 1. Calculation schemes

подбор соответствующих фазовых материалов, и в данной работе рассмотрен один из возможных подходов для решения этой проблемы.

Теория

Рассмотрим композитный стержень длиной l , состоящий из двух фаз (рис. 1, 2). Оси z и y являются осями симметрии поперечных сечений фаз (рис. 2). Свойства материалов фаз могут меняться вдоль оси стержня x . Закон деформирования материалов фаз считается одинаковым как для растяжения, так и для сжатия и аппроксимируется полиномом третьей степени: $\sigma = A \cdot \varepsilon + B \cdot \varepsilon^3$,

где $A = \left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$ — модуль Юнга. Коэффициент B

определяется из условия, что предел прочности σ^* является максимальным напряжением на

диаграмме (рис. 3): $\left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon^*} = 0$; $\sigma(\varepsilon^*) = \sigma^*$, где [9]

ε^* — предельная деформация, соответствующая

пределу прочности. Таким образом, $\varepsilon^* = \frac{3\sigma^*}{2A}$;

$B = -\frac{4}{27} \frac{A^3}{(\sigma^*)^2}$. С учётом температурных деформаций закон деформирования примет вид: $\sigma =$

$= A \cdot (\varepsilon - \varepsilon^T) + B \cdot (\varepsilon - \varepsilon^T)^3$, где ε^T — температурная деформация. Заметим, что A , B и ε^T являются функциями температуры: $A = A(T)$, $B = B(T)$ и $\varepsilon^T = \varepsilon^T(T)$. Таким образом, для каждой фазы:

$$\sigma_i = A_i \cdot (\varepsilon - \varepsilon_i^T) + B_i \cdot (\varepsilon - \varepsilon_i^T)^3, \quad i = 1, 2. \quad (1)$$

Вдоль оси стержня действует распределённая нагрузка интенсивностью $q_0(x)$ (рис. 1). Это может быть сила тяжести, приведённая к осевой линии стержня. Будем считать стержни достаточно тонкими, так что в точках общего поперечного сечения стержня температура одинакова $T_0 = T_0(x)$.

Рассмотрим следующие условия закрепления стержня. Нижний конец — жёстко заделан и три варианта закрепления верхнего конца: а) подвижный шарнир, б) подвижная заделка, в) жёсткая заделка (рис. 1). В случаях а) и б) на верхнем конце стержня приложена сжимающая сила P_0 .

В данных условиях стержень будет испытывать деформации сжатия. Однако прямолинейная форма равновесия стержня может оказаться неустойчивой, если нагрузка (силовая и температурная) превысит некоторое предельное (критическое) значение и стержень перейдёт в устойчивое искривлённое состояние. Для определения критического состояния будем использовать концепцию продолжающегося нагружения Ф. Р. Шенли [7, 8], считая, что стержень переходит из прямолинейного состояния в изогнутое при возрастании нагрузки (силовой и температурной) на малые величины. Причём для минимальной нагрузки, при которой возможен такой переход, в процессе догружения во всех точках стержня деформации растут, то есть на диаграмме напряжений всюду происходит догрузка. Поэтому связь между напряжениями и деформациями в фазовых материалах при догружении остаётся прежней, определяемой формулой (1).

Для постановки задачи устойчивости необходимо написать основные соотношения прямолинейного и изогнутого состояний стержня, а затем, используя эти соотношения, получить зависимости для возмущённых величин, где возмущение вызвано переходом от прямолинейного состояния к изогнутому состоянию в процессе догружения.

Прямолинейное состояние стержня.

Все величины, относящиеся к прямолинейному состоянию будем снабжать нижним индексом «0». В силу того, что фазы имеют общий центр симметрии (рис. 2) и в точках общего поперечного сечения двух фаз температура одинакова, деформацией сечения можно пренебречь и принять гипотезу плоских сечений. Тогда все точки

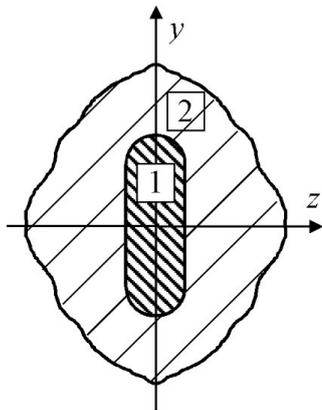


Рис. 2. Поперечное сечение
Fig. 2. Cross-section

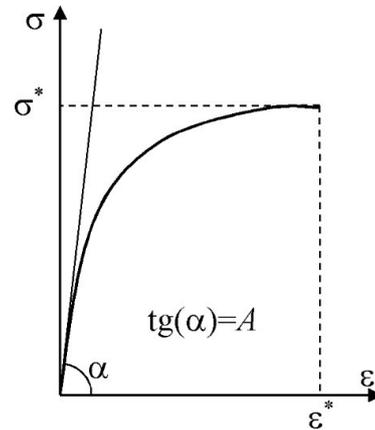


Рис. 3. Диаграмма деформирования
Fig. 3. Stress-strain diagram

поперечного сечения смещаются на одну и ту же величину $u_0(x)$ по оси x . Линейная деформация в направлении оси x равна:

$$e_0(x) = \frac{du_0}{dx}. \quad (2)$$

В пределах каждой фазы в поперечном сечении будут действовать постоянные нормальные напряжения:

$$\sigma_{0i} = A_{0i} \cdot (e_0 - \varepsilon_{0i}^T) + B_{0i} \cdot (e_0 - \varepsilon_{0i}^T)^3, \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

Продольная сила:

$$N_0 = \sum_{i=1}^2 \sigma_{0i} F_i = \sum_{i=1}^2 [A_{0i} \cdot (e_0 - \varepsilon_{0i}^T) + B_{0i} \cdot (e_0 - \varepsilon_{0i}^T)^3] F_i, \quad (4)$$

где F_i — площадь поперечного сечения i -ой фазы. Дифференциальное уравнение равновесия имеет вид [4]:

$$\frac{dN_0}{dx} = q_0. \quad (5)$$

Запишем граничные условия для всех трёх вариантов закрепления:

$$\begin{aligned} \text{а) } & u_0(0) = 0 \quad N_0(l) = -P_0; \\ \text{б) } & u_0(0) = 0 \quad N_0(l) = -P_0; \\ \text{в) } & u_0(0) = 0 \quad u_0(l) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

В граничных условиях (а) и (б) N_0 можно выразить через производную u_0 по формулам (4) и (2).

Рассмотрим условия закрепления (а) и (б) (рис. 1). Интегрируя (5) и учитывая граничные условия (6.а) и (6.б), запишем продольную силу:

$$N_0 = -\int_x^l q_0(x) dx - P_0. \quad (7)$$

Из (4) получим кубическое уравнение для определения деформаций:

$$(e_0)^3 + a(e_0)^2 + b e_0 + c = 0, \quad (8)$$

где

$$a = -3 \frac{\sum_{i=1}^2 B_{0i} \varepsilon_{0i}^T F_i}{\sum_{i=1}^2 B_{0i} F_i};$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^2 [A_{0i} + 3B_{0i} (\varepsilon_{0i}^T)^2] F_i}{\sum_{i=1}^2 B_{0i} F_i};$$

$$c = -\frac{\sum_{i=1}^2 [A_{0i} \varepsilon_{0i}^T + B_{0i} (\varepsilon_{0i}^T)^3] F_i + N_0}{\sum_{i=1}^2 B_{0i} F_i}. \quad (9)$$

Если напряжения в фазах по модулю не превышают предела прочности, уравнение (8) имеет три действительных корня. Для того чтобы определить, какой из корней будет деформацией оси, рассмотрим график зависимости продольной силы от деформации оси (рис. 4), определяемый формулой (4). Это кубическая зависимость и область значений деформаций, соответствующих напряжениям в материалах фаз, не превышающих свои пределы прочности, находится между двумя вершинами графика (рис. 4). Таким образом, два крайних корня (8) соответствуют деформациям, при которых материал хотя бы одной из фаз разрушился. Значит, искомой деформацией при сохранении обеих фаз будет средний корень. Он определяется по тригонометрической формуле Виета [10]:

$$e_0 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos\left(\frac{\phi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{a}{3}, \quad (10)$$

где

$$p = -\frac{a^2}{3} + b;$$

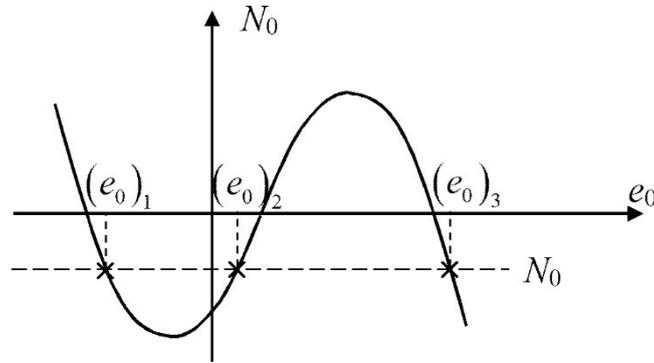


Рис. 4. Корни кубического полинома
Fig. 4. Roots of a cubic polynomial

$$\phi = \arccos \left(-\frac{\mu}{2} \left(\frac{3}{-p} \right)^{\frac{3}{2}} \right);$$

$$\mu = 2 \left(\frac{a}{3} \right)^3 - \frac{ab}{3} + c. \quad (11)$$

Распределение температуры по длине стержня $T_0(x)$ известно. Тогда механические коэффициенты A_{0i} и B_{0i} , а также температурные деформации ε_{0i}^T , зависящие от температуры, превращаются в известные функции от x и параметров температурного и силового нагружений. Определив по формуле (10) деформации, находим перемещения:

$$u_0(x) = \int_0^x e_0(x) dx. \quad (12)$$

Если распределённая нагрузка отсутствует ($q_0 = 0$), то из (7) следует, что:

$$N_0 = -P_0 = const. \quad (13)$$

Кроме того, если температура, механические коэффициенты и поперечное сечение не меняется по длине стержня, то из формул (9)–(11) следует, что деформация e_0 не зависит от x и, в соответствии с формулой (12), перемещение изменяется линейно.

Рассмотрим условия закрепления (в) (рис. 1). Проще всего решить задачу, рассматривая её как случаи (а) и (б), где P_0 неизвестная реакция. Задавая P_0 , находим перемещение верхнего конца и, варьируя P_0 , добиваемся, чтобы это перемещение было равным нулю. Наиболее просто задача решается, когда температура, механические коэффициенты и поперечное сечение не меняются по длине стержня, а распределённая нагрузка отсутствует. Тогда коэффициенты кубического уравнения (9) не зависят от x , а следовательно, не зависят от x и деформация e_0 , являющаяся корнем этого уравнения: $e_0 = const$. Из формулы (12) получим, что перемещение верхнего конца стержня $u_0(l) = e_0 l$. Но, в соответствии с гранич-

ным условием (б.в), $u_0(l) = 0$. Тогда перемещения и деформации во всех сечениях стержня равны нулю

$$\begin{aligned} e_0 &= 0; \\ u_0 &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

и, в соответствии с (4), продольная сила вычисляется по формуле:

$$N_0 = -\sum_{i=1}^2 [A_{0i} \cdot \varepsilon_{0i}^T + B_{0i} \cdot (\varepsilon_{0i}^T)^3] F_i. \quad (15)$$

Изогнутое состояние стержня.

Снабдим все величины, характеризующие изгиб, нижним индексом « b ». Предположим, что изгиб будет происходить в плоскости zx (рис. 1). Примем гипотезу плоских сечений при изгибе. Тогда продольная деформация произвольной точки сечения определяется формулой (вне зависимости от фазы):

$$\varepsilon_b = e_b + z \cdot \kappa_b. \quad (16)$$

Здесь e_b — деформация оси стержня, κ_b — кривизна оси стержня. Положительное направление кривизны показано на рис. 5. Сама кривизна выражается через прогиб (перемещение по оси z) по формуле:

$$\kappa_b = -\frac{d^2 w}{dx^2}. \quad (17)$$

Учитывая (1) и (16), выразим напряжения в фазах через κ_b и e_b :

$$\begin{aligned} \sigma_{bi} &= A_{bi} \cdot (\varepsilon_b - \varepsilon_{bi}^T) + B_{bi} \cdot (\varepsilon_b - \varepsilon_{bi}^T)^3 = \\ &= A_{bi} \cdot (e_b + z \cdot \kappa_b - \varepsilon_{bi}^T) + B_{bi} \cdot (e_b + z \cdot \kappa_b - \varepsilon_{bi}^T)^3 = \\ &= z^3 [B_{bi}] \kappa_b^3 + z^2 [3B_{bi} (e_b - \varepsilon_{bi}^T)] \kappa_b^2 + \\ &\quad + z [A_{bi} + 3B_{bi} (e_b - \varepsilon_{bi}^T)] \kappa_b + \\ &\quad + [A_{bi} (e_b - \varepsilon_{bi}^T) + B_{bi} (e_b - \varepsilon_{bi}^T)^3], \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (18)$$

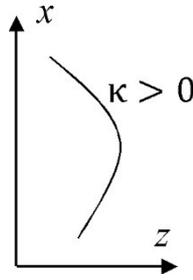


Рис. 5. Положительное направление кривизны
Fig. 5. The positive direction of curvature

Выразим изгибающий момент относительно оси y (рис. 2) через деформационные характеристики стержня κ_b и e_b :

$$M_b = \sum_{i=1}^2 \int_{F_i} z \sigma_{bi} dF = \kappa_b^3 \cdot \sum_{i=1}^2 [I_i^{(4)} B_{bi}] + \kappa_b^2 \cdot 3 \sum_{i=1}^2 [I_i^{(3)} B_{bi} (e_b - \varepsilon_{bi}^T)] + \kappa_b \cdot \sum_{i=1}^2 I_i^{(2)} [A_{bi} + 3B_{bi} (e_b - \varepsilon_{bi}^T)^2] + \sum_{i=1}^2 I_i^{(1)} [A_{bi} (e_b - \varepsilon_{bi}^T) + B_{bi} (e_b - \varepsilon_{bi}^T)^3], \quad (19)$$

где интегрирование ведётся по площадям поперечных сечений фаз. Здесь были введены обозначения:

$$I_i^{(k)} = \int_{F_i} z^k dF. \quad (20)$$

Это геометрическая характеристика сечения фазы. Назовём её моментом площади k -ой степени. При $k = 1$ это статический момент сечения i -ой фазы относительно оси y , при $k = 2$ — момент инерции сечения i -ой фазы относительно оси y . Для поперечных сечений, у которых ось y является осью симметрии $I_i^{(k)} = 0$ при нечётных k . В таком случае выражение для изгибающего момента упростится:

$$M_b = \kappa_b^3 \cdot \sum_{i=1}^2 [I_i^{(4)} B_{bi}] + \kappa_b \times \sum_{i=1}^2 I_i^{(2)} [A_{bi} + 3B_{bi} (e_b - \varepsilon_{bi}^T)^2]. \quad (21)$$

Выразим продольную силу в сечении через κ_b и e_b :

$$N_b = \sum_{i=1}^2 \int_{F_i} \sigma_{bi} dF = \kappa_b^3 \cdot \sum_{i=1}^2 [I_i^{(3)} B_{bi}] + \kappa_b^2 \cdot 3 \sum_{i=1}^2 [I_i^{(2)} B_{bi} (e_b - \varepsilon_{bi}^T)] + \kappa_b \cdot \sum_{i=1}^2 I_i^{(1)} [A_{bi} + 3B_{bi} (e_b - \varepsilon_{bi}^T)^2] + \sum_{i=1}^2 F_i [A_{bi} (e_b - \varepsilon_{bi}^T) + B_{bi} (e_b - \varepsilon_{bi}^T)^3]. \quad (22)$$

Учитывая, что в силу симметрии сечения $I_i^{(3)} = I_i^{(1)} = 0$, получим:

$$N_b = \kappa_b^2 \cdot 3 \sum_{i=1}^2 [I_i^{(2)} B_{bi} (e_b - \varepsilon_{bi}^T)] + \sum_{i=1}^2 F_i [A_{bi} (e_b - \varepsilon_{bi}^T) + B_{bi} (e_b - \varepsilon_{bi}^T)^3]. \quad (23)$$

Деформация оси и перемещения связаны соотношением [2]:

$$e_b = \frac{du_b}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw_b}{dx} \right)^2. \quad (24)$$

Запишем два уравнения продольного изгиба стержня [4]:

$$\frac{dN_b}{dx} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dw_b}{dx} \frac{dM_b}{dx} \right) - q_b = 0, \quad \frac{d^2 M_b}{dx^2} + \frac{d}{dx} \left(\frac{dw_b}{dx} N_b \right) = 0. \quad (25)$$

Рассмотрим граничные условия.

На нижнем конце для всех трёх расчётных схем а), б), в) запишем:

$$u_b(0) = 0; \quad w_b(0) = 0; \quad \left. \frac{dw_b}{dx} \right|_{x=0} = 0. \quad (26)$$

Запишем граничные условия на верхнем конце:

$$\begin{aligned} \text{а) } N_b(l) &= -P_b; \quad w_b(l) = 0; \quad M_b(l) = 0; \\ \text{б) } N_b(l) &= -P_b; \quad w_b(l) = 0; \quad \left. \frac{dw_b}{dx} \right|_{x=l} = 0; \\ \text{в) } u_b(l) &= 0; \quad w_b(l) = 0; \quad \left. \frac{dw_b}{dx} \right|_{x=l} = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

В граничных условиях (27) N_b и M_b выражаются через u_b и w_b по формулам (23), (24) и (21), (24), (17) соответственно.

Переход от прямолинейного состояния стержня к изогнутому состоянию.

Представим все величины изогнутого стержня как те же величины прямолинейного стержня плюс возмущения, вызванные догружением:

$$\begin{aligned} N_b &= N_0 + N; \\ M_b &= M; \\ q_b &= q_0 + q; \\ T_b &= T_0 + T; \\ P_b &= P_0 + P; \\ u_b &= u_0 + u; \\ w_b &= w; \\ A_{bi} &= A_{0i} + A_i; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{bi} &= B_{0i} + B_i; \\
 \varepsilon_{bi}^T &= \varepsilon_{0i}^T + \varepsilon_i^T; \\
 e_b &= e_0 + e; \\
 e &= \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2; \\
 \kappa_b &= \kappa = -\frac{d^2w}{dx^2}.
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

Подставим написанные выше величины в формулы для искривлённого стержня, учитывая выражения для прямолинейного стержня. Догрузение будем считать бесконечно малым, так что слагаемые, содержащие квадраты и более высокие степени возмущённых величин, учитываться не будут.

Подставляя (28) в (25) и учитывая (5), получим дифференциальные уравнения продольного изгиба для возмущённого состояния:

$$\begin{aligned}
 \frac{dN}{dx} - q &= 0; \\
 \frac{d^2M}{dx^2} + \frac{d}{dx} \left(\frac{dw}{dx} N_0 \right) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

Подставляя (28) в (26) и (27) и учитывая (6), получим граничные условия для возмущённого состояния:

для всех расчётных схем а), б), в):

$$\begin{aligned}
 u(0) &= 0; \\
 w(0) &= 0; \\
 \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} &= 0. \\
 \text{а) } N(l) &= -P; \quad w(l) = 0; \quad M(l) = 0; \\
 \text{б) } N(l) &= -P; \quad w(l) = 0; \quad \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=l} = 0; \\
 \text{в) } u(l) &= 0; \quad w(l) = 0; \quad \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=l} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

Подставляя (28) в (22) и учитывая (4), получим возмущённую осевую силу:

$$\begin{aligned}
 N &= \sum_{i=1}^2 F_i \cdot [A_{0i}(e - \varepsilon_i^T) + A_i(e_0 - \varepsilon_{0i}^T) + \\
 &+ 3B_{0i}(e_0 - \varepsilon_{0i}^T)^2(e - \varepsilon_i^T) + B_i(e_0 - \varepsilon_{0i}^T)^3].
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

Подставляя (28) в (21), получим возмущённый изгибающий момент:

$$M = \kappa \cdot \sum_{i=1}^2 I_i^{(2)} [A_{0i} + 3B_{0i}(e_0 - \varepsilon_{0i}^T)^2] = K_0 \cdot \kappa, \tag{32}$$

где

$$K_0 = \sum_{i=1}^2 I_i^{(2)} [A_{0i} + 3B_{0i}(e_0 - \varepsilon_{0i}^T)^2] \tag{33}$$

— жёсткость стержня на изгиб. Причём можно заметить, что выражение в квадратных скобках

это тангенциальный модуль упругости в i -ой фазе:

$$A_{0i} + 3B_{0i}(e_0 - \varepsilon_{0i}^T)^2 = \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i}.$$

Постановка задачи устойчивости.

Подставляя (32) во второе дифференциальное уравнение (29), получим *дифференциальное уравнение устойчивости*:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left\{ K_0 \frac{d^2w}{dx^2} \right\} - \frac{d}{dx} \left\{ N_0 \frac{dw}{dx} \right\} = 0. \tag{34}$$

Здесь нужно учитывать, что величины K_0 и N_0 в общем случае являются функциями x и параметров силового и температурного нагружений.

Подставив (32) в (30), запишем граничные условия к уравнению устойчивости:

для всех расчётных схем а), б), в):

$$\begin{aligned}
 w(0) &= 0; \quad \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = 0. \\
 \text{а) } w(l) &= 0; \quad \left. \frac{d^2w}{dx^2} \right|_{x=l} = 0; \\
 \text{б) } w(l) &= 0; \quad \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=l} = 0; \\
 \text{в) } w(l) &= 0; \quad \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=l} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

Обсуждение результатов

Наиболее просто задача решается, когда K_0 и N_0 не зависят от x . Это возможно при следующих условиях:

$$\begin{aligned}
 q_0 &= 0; \\
 T_0 &= const; \\
 F_i &= const; \\
 I_i^{(2)} &= const.
 \end{aligned}$$

Тогда уравнение устойчивости (34) переписывается в виде:

$$\frac{d^4w}{dx^4} + \gamma^2 \frac{d^2w}{dx^2} = 0, \tag{36}$$

где

$$\gamma^2 = -\frac{N_0}{K_0} = const. \tag{37}$$

Видим, что уравнение устойчивости (36) и граничные условия (35) для слоистого неупругого стержня и однородного линейно-упругого стержня совпадают с точностью до обозначений. Следовательно, совпадут и формы потери устойчивости и коэффициенты γ . Отличие будет только в формуле, выражающей γ через параметры нагружения. Коэффициент γ можно выразить

через коэффициент приведённой длины ν , значение которого зависит от условий закрепления стержня:

$$\gamma = \frac{\pi}{\nu l}. \quad (38)$$

Для схем закрепления а) и в) (рис. 1) $\nu \approx 0,6992$, для схемы б) $\nu = 0,5$.

Примем далее, что $\epsilon_{0i}^T = \alpha_{0i} \cdot (T_0 - \theta_0)$, где α_{0i} — коэффициент температурного расширения i -ой фазы, θ_0 — температура естественного состояния и что, механические характеристики A_{0i} и B_{0i} не зависят от температуры.

Для удобства вычислений введём безразмерные характеристики:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{0i} &= \frac{A_{0i}}{\sigma_i}; \\ \bar{B}_{0i} &= \frac{B_{0i}}{\sigma_i}; \\ \bar{\sigma}_i &= \frac{\sigma_i}{\sigma_{\min}}; \\ \bar{F}_i &= \frac{F_i}{F}; \\ \bar{N}_0 &= \frac{N_0}{F \cdot \sigma_{\min}}; \\ \bar{P}_0 &= \frac{P_0}{F \cdot \sigma_{\min}}; \\ \bar{I}_i^{(2)} &= \frac{I_i^{(2)}}{I^{(2)}}; \\ \bar{K}_0 &= \frac{K_0}{I^{(2)} \cdot \sigma_{\min}}; \\ \bar{T}_0 &= \frac{T_0}{T_{\min}}; \\ \bar{\theta}_0 &= \frac{\theta_0}{T_{\min}}; \\ \bar{\alpha}_{0i} &= \alpha_{0i} T_{\min}, \end{aligned} \quad (39)$$

где $F = F_1 + F_2$; $I^{(2)} = I_1^{(2)} + I_2^{(2)}$; $\sigma_{\min} = \min(\sigma_1, \sigma_2)$; $T_{\min} = \min(T_1, T_2)$.

Здесь T_i — температура плавления материала i -ой фазы.

Тогда из (37) — (39) следует:

$$-\frac{\bar{N}_0}{\bar{K}_0} = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2, \quad (40)$$

где λ — гибкость стержня:

$$\lambda = \nu l \sqrt{\frac{F}{I^{(2)}}}. \quad (41)$$

Продольная сила (4) и жёсткость стержня (33) в безразмерном виде запишутся:

$$\bar{N}_0 = \sum_{i=1}^2 \left\{ \bar{F}_i \bar{\sigma}_i \left[\bar{A}_{0i} \cdot (e_0 - \bar{\alpha}_{0i} \cdot (\bar{T}_0 - \bar{\theta}_0)) + \bar{B}_{0i} \cdot (e_0 - \bar{\alpha}_{0i} \cdot (\bar{T}_0 - \bar{\theta}_0))^3 \right] \right\}, \quad (42)$$

$$\bar{K}_0 = \sum_{i=1}^2 \left\{ \bar{I}_i^{(2)} \bar{\sigma}_i \left[\bar{A}_{0i} + 3\bar{B}_{0i} (e_0 - \bar{\alpha}_{0i} \cdot (\bar{T}_0 - \bar{\theta}_0))^2 \right] \right\}. \quad (43)$$

Деформация оси e_0 , необходимая для вычисления жёсткости (43), определяется формулами (10) — (11), где коэффициенты кубического уравнения запишутся через безразмерные параметры следующим образом:

$$\begin{aligned} a &= -3 \frac{\sum_{i=1}^2 \bar{B}_{0i} \bar{\alpha}_{0i} (\bar{T}_0 - \bar{\theta}_0) \bar{F}_i \bar{\sigma}_i}{\sum_{i=1}^2 \bar{B}_{0i} \bar{F}_i \bar{\sigma}_i}; \\ b &= \frac{\sum_{i=1}^2 [\bar{A}_{0i} + 3\bar{B}_{0i} (\bar{\alpha}_{0i} (\bar{T}_0 - \bar{\theta}_0))^2] \bar{F}_i \bar{\sigma}_i}{\sum_{i=1}^2 \bar{B}_{0i} \bar{F}_i \bar{\sigma}_i}; \\ c &= - \frac{\sum_{i=1}^2 [\bar{A}_{0i} \bar{\alpha}_{0i} (\bar{T}_0 - \bar{\theta}_0) + \bar{B}_{0i} (\bar{\alpha}_{0i} (\bar{T}_0 - \bar{\theta}_0))^3] \bar{F}_i \bar{\sigma}_i + \bar{N}_0}{\sum_{i=1}^2 \bar{B}_{0i} \bar{F}_i \bar{\sigma}_i}. \end{aligned} \quad (44)$$

Если фигуры, контуры которых ограничивают поперечные сечения фаз, являются подобными с коэффициентом подобия η ($\eta < 1$), то:

$$\begin{aligned} \bar{F}_1 &= \eta^2; \\ \bar{F}_2 &= 1 - \eta^2; \\ \bar{I}_1^{(2)} &= \eta^4; \\ \bar{I}_2^{(2)} &= 1 - \eta^4. \end{aligned} \quad (45)$$

Данные для расчётов представлены в табл. 1. Рассмотрим схемы закрепления стержня на рис. 1.

Схемы 1.а и 1.б.

Из (13) и (39) следует, что:

$$\bar{N}_0 = -\bar{P}_0. \quad (46)$$

Задавая параметры силового и температурного нагружения \bar{P}_0 и \bar{T}_0 , по формулам (10), (11), (44) с учётом (46) можно вычислить деформацию оси e_0 и рассматривать её как функцию параметров нагружения:

$$e_0 = e_0(\bar{P}_0, \bar{T}_0). \quad (47)$$

Тогда и жёсткость можно представить как функцию параметров нагружения:

$$\bar{K}_0 = \bar{K}_0(\bar{P}_0, \bar{T}_0) = \sum_{i=1}^2 \left\{ \bar{I}_i^{(2)} \bar{\sigma}_i \left[\bar{A}_{0i} + 3\bar{B}_{0i} \left(e_0(\bar{P}_0, \bar{T}_0) - \bar{\alpha}_{0i} \cdot (\bar{T}_0 - \bar{\theta}_0) \right)^2 \right] \right\}. \quad (48)$$

Из (40) получаем уравнение для определения критических параметров нагружения:

Таблица 1. Механические характеристики материалов
Table 1. Mechanical characteristics of materials

№ материала фазы	A_{0i} , МПа	$\sigma_{i,}$, МПа	α_{0i} , 1/°C	$T_{i,}$, °C
1 (сталь 08)	$2 \cdot 10^5$	330	$15 \cdot 10^{-6}$	1400
2 (титан ВТ1-00)	$1 \cdot 10^5$	400	$8.9 \cdot 10^{-6}$	1660

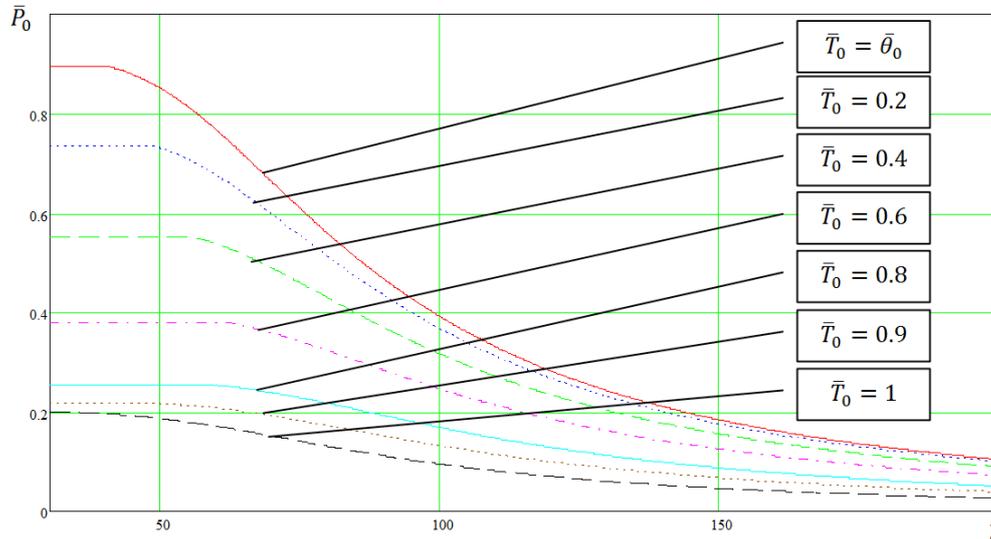


Рис. 6. Графики предельного параметра сжимающей силы в зависимости от гибкости стержня
Fig. 6. Graphs of the limiting parameter of the compressive force depending on the flexibility of the rod

$$\frac{\bar{P}_0}{K_0(\bar{P}_0, \bar{T}_0)} = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2. \quad (49)$$

$$P'(\bar{T}_0) = -\sum_{i=1}^2 \bar{F}_i \bar{\sigma}_i'(\bar{T}_0). \quad (52)$$

На рис. 6 представлены графики параметра критической силы $\bar{P}_0 = \frac{P_0}{F \cdot \sigma_{\min}} = \frac{P_0}{P_{eq}}$ в зависимости от гибкости стержня λ при его нагреве на различные температуры, задаваемые параметром \bar{T}_0 . Здесь P_{eq} — предельная сила из условий прочности эквивалентного стержня, имеющего геометрические размеры композитного стержня и выполненного из материала фазы с меньшим пределом прочности. Сверху графики ограничены безразмерной предельной силой $\bar{P}'(\bar{T}_0)$ из условий прочности композитного стержня для соответствующей температуры. Она определяется следующим образом:

1) вычисляется предельная сжимающая деформация оси:

$$e'(\bar{T}_0) = \max_{i=1,2} (-\varepsilon_i + \bar{\alpha}_{0i} \cdot (\bar{T}_0 - \bar{\theta}_0)); \quad (50)$$

2) определяются безразмерные напряжения в фазах при предельной деформации (50):

$$\bar{\sigma}_i'(\bar{T}_0) = \bar{A}_{0i} \cdot (e'(\bar{T}_0) - \bar{\alpha}_{0i} \cdot (\bar{T}_0 - \bar{\theta}_0)) + \bar{B}_{0i} \cdot (e'(\bar{T}_0) - \bar{\alpha}_{0i} \cdot (\bar{T}_0 - \bar{\theta}_0))^3; \quad (51)$$

3) определяется безразмерная предельная сила при заданном параметре температуры:

Для расчётов коэффициент подобия границ фаз был принят равным $\eta = \frac{4}{5}$.

Схема 1.в.

Подставляя (14) в (42) и (43), получаем выражения для продольной силы и жёсткости для данной схемы:

$$\bar{N}_0(\bar{T}_0) = -\sum_{i=1}^2 \left\{ \bar{F}_i \bar{\sigma}_i' \left[\bar{A}_{0i} \bar{\alpha}_{0i} (\bar{T}_0 - \bar{\theta}_0) + \bar{B}_{0i} \cdot (\bar{\alpha}_{0i} (\bar{T}_0 - \bar{\theta}_0))^3 \right] \right\} < 0, \quad (53)$$

$$\bar{K}_0(\bar{T}_0) = \sum_{i=1}^2 \left\{ \bar{F}_i^{(2)} \bar{\sigma}_i' \left[\bar{A}_{0i} + 3\bar{B}_{0i} (\bar{\alpha}_{0i} \cdot (\bar{T}_0 - \bar{\theta}_0))^2 \right] \right\} > 0. \quad (54)$$

Подставляя (53) и (54) в (40), получаем уравнение, связывающее критический параметр температуры \bar{T}_0 и гибкость стержня λ :

$$-\frac{\bar{N}_0(\bar{T}_0)}{\bar{K}_0(\bar{T}_0)} = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2. \quad (55)$$

На рис. 7 представлен график зависимости параметра критической температуры \bar{T}_0 от гибкости λ для различных коэффициентов подобия границ фаз η . Сверху графики ограничены предельной безразмерной температурой

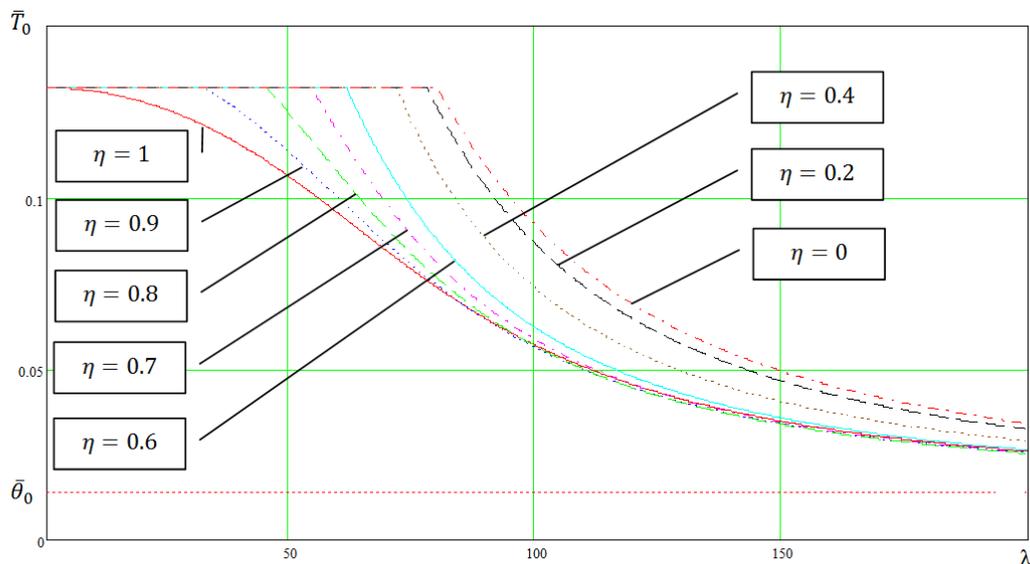


Рис. 7. Графики предельного параметра температуры в зависимости от гибкости стержня
 Fig. 7. Graphs of the temperature limit parameter depending on the flexibility of the rod

$$\bar{T}^* = \min_{i=1,2} \left(\frac{\varepsilon_i}{\bar{\alpha}_{0i}} + \bar{\theta}_0 \right), \quad (56)$$

при достижении которой в материале одной из фаз сжимающие напряжения превысят по модулю предел прочности.

Выводы и заключение

Представленный в работе метод решения задачи устойчивости за пределами упругости для гибридного композитного стержня при температурном и силовом воздействиях достаточно прост и сводится к решению линейного однородного дифференциального уравнения с линейными однородными граничными условиями. Простота постановки задачи устойчивости делает возможным определять критические параметры термосилового нагружения в инженерной практике для оценки надёжности и рационального подбора материалов фаз. В работе был продемонстрирован пример расчёта по предложенному методу, показавший его эффективность. Важно отметить, что предложенная постановка задачи устойчивости стержня позволяет учитывать влияние температуры на механические свойства материала.

Список источников

1. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1946. 532 с.
2. Алфутов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1991. 333 с. ISBN 5-217-01322-2.
3. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1987. 352 с.
4. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1967. 984 с.
5. Ванько В. И. Очерки об устойчивости элементов конструкций: моногр. 2-е изд. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2015. 224 с. ISBN 978-5-7038-4127-3.
6. Зубчанинов В. Г. Устойчивость и пластичность. В 2 т. Т. 1. Устойчивость. М.: Физматлит, 2007. 448 с. ISBN 978-5-9221-0732-7.

7. Shanley F. R. Inelastic Column Theory // Journal Aeronautical Sciences. 1947. Vol. 14, no. 5. P. 261 – 267.

8. Shanley F. R. The Column Paradox // Journal Aeronautical Sciences. 1946. Vol. 13, no. 12. P. 261 – 267.

9. Немировский Ю. В. Прогнозирование нелинейного деформирования гибридных композитных материалов // Проблемы нелинейной механики деформируемого твёрдого тела: тр. II Междунар. конф. Казань, 2009. С. 261 – 263. ISBN 978-5-98180-748-0.

10. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 832 с.

НЕМИРОВСКИЙ Юрий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор (Россия), главный научный сотрудник, лаборатория №4 «Физика быстропротекающих процессов», Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христановича Сибирского отделения РАН, г. Новосибирск; профессор кафедры «Прочность летательных аппаратов» Новосибирского государственного технического университета (НГТУ).

Адрес для переписки: nemirov@itam.nsc.ru

МОХОВНЁВ Дмитрий Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прочность летательных аппаратов» НГТУ.

SPIN-код: 5521-6655

ORCID: 0000-0001-9088-7810

Адрес для переписки: mohovnov@yandex.ru;

mohovnyov@corp.nstu.ru

Для цитирования

Немировский Ю. В., Моховнён Д. В. Устойчивость гибридного композитного стержня в условиях высоких температур // Омский научный вестник. Сер. Авиационно-ракетное и энергетическое машиностроение. 2019. Т. 3, № 4. С. 16 – 25. DOI: 10.25206/2588-0373-2019-3-4-16-25.

Статья поступила в редакцию 30.10.2019 г.

© Ю. В. Немировский, Д. В. Моховнён

STABILITY OF HYBRID COMPOSITE ROD TO HIGH TEMPERATURES

Yu. V. Nemirovskiy^{1,2}, D. V. Mokhovnev²

¹Siberian Branch of Russian Academy of Sciences Khristianovich Institute
of Theoretical and Applied Mechanics,
Russia, Novosibirsk, Institutskaya St., 4/1, 630090

²Novosibirsk State Technical University,
Russia, Novosibirsk, K. Marx Ave., 20, 630073

The problem of stability of a rod made of two materials under temperature and force loading beyond the limits of elasticity is posed. The deformation law of materials is approximated by a cubic polynomial over the entire deformation diagram, which greatly simplifies the formulation of the stability problem. The influence of temperature on the deformation law is taken into account. The process of loss of stability is considered in the framework of the concept of continuous loading by F. R. Shanley. The stability problem is reduced to solving a linear homogeneous differential equation with linear homogeneous boundary conditions. Examples of the calculation of the critical parameters of thermal and force loading are given.

Keywords: stability of rods, plasticity, composite structures, temperature loading.

References

1. Timoshenko S. P. Ustoychivost' uprugikh sistem [Stability of elastic systems]. Moscow: Gostekhizdat Publ., 1946. 532 p. (In Russ.).

2. Alfutov N. A. Osnovy rascheta na ustoychivost' uprugikh sistem [Bases of calculation on stability of elastic systems]. 2nd ed. Moscow.: Mashinostroyeniye Publ., 1991. 333 p. ISBN 5-217-01322-2. (In Russ.).

3. Panovko Ya. G., Gubanova I. I. Ustoychivost' i kolebaniya uprugikh sistem [Stability and oscillations of elastic systems]. Moscow: Nauka Publ., 1987. 352 p. (In Russ.).

4. Volmir A. S. Ustoychivost' deformiruyemykh sistem [Stability of deformable systems]. Moscow: Nauka Publ., 1967. 984 p. (In Russ.).

5. Vanko V. I. Ocherki ob ustoychivosti elementov konstruksiy [Essays on the stability of structural elements]. Moscow, 2015. 224 p. ISBN 978-5-7038-4127-3. (In Russ.).

6. Zubchaninov V. G. Ustoychivost' i plastichnost'. V 2 t. T. 1. Ustoychivost' [Stability and plasticity. In 2 vols. Vol. 1. Stability]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2007. 448 p. ISBN 978-5-9221-0732-7. (In Russ.).

7. Shanley F. R. Inelastic Column Theory // Journal Aeronautical Sciences. 1947. Vol. 14, no. 5. P. 261–267. (In Engl.).

8. Shanley F. R. The Column Paradox // Journal Aeronautical Sciences. 1946. Vol. 13, no. 12. P. 261–267. (In Engl.).

9. Nemirovskiy Yu. V. Prognozirovaniye nelineynogo deformirovaniya gibridnykh kompozitnykh materialov [Prediction of nonlinear deformation of hybrid composite materials] // Problemy nelineynoy mekhaniki deformiruyemogo tverdogo tela. *Problemy nelineynoy mekhaniki deformiruyemogo tverdogo tela*. Kazan, 2009. P. 261–263. ISBN 978-5-98180-748-0. (In Russ.).

10. Korn G., Korn T. Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov [Handbook of mathematics for scientists and engineers]. Moscow: Nauka Publ., 1974. 832 p. (In Russ.).

NEMIROVSKIY Yuriy Vladimirovich, Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor (Russia), Chief Researcher of Laboratory No. 4 Physics of Fast Processes, Siberian Branch of RAS Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Russia, Novosibirsk; Professor of Aircraft Construction Department, Novosibirsk State Technical University (NSTU), Russia, Novosibirsk.

Address for correspondence: nemirov@itam.nsc.ru
MOKHOVNEV Dmitriy Vladimirovich, Candidate of Physico-Mathematical Sciences, Associate Professor of Aircraft Construction Department, (NSTU), Russia, Novosibirsk.

SPIN-code: 5521-6655

ORCID: 0000-0001-9088-7810

Address for correspondence: mohovnov@yandex.ru; mohovnov@corp.nstu.ru

For citations

Nemirovskiy Yu. V., Mokhovnev D. V. Stability of hybrid composite rod to high temperatures // Omsk Scientific Bulletin. Series Aviation-Rocket and Power Engineering. 2019. Vol. 3, no. 4. P. 16–25. DOI: 10.25206/2588-0373-2019-3-4-16-25.

Received 30 October 2019.

© Yu. V. Nemirovskiy, D. V. Mokhovnev