

# ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАБОЧЕГО ПРОЦЕССА ТРУБЫ ГАРТМАНА—ШПРЕНГЕРА

В. И. Кузнецов, В. В. Макаров

Омский государственный технический университет,  
Россия, 644050, г. Омск, пр. Мира, 11

**Рассмотрен вопрос работы трубы Гартмана—Шпренгера. Исследовано влияние параметров набегающего потока газа на его параметры в конце тупиковой полости. Определен механизм передачи энергии от набегающего потока к потоку, вошедшему в тупиковую полость.**

**Приведено доказательство влияния вязкости и касательных напряжений на возникновение передачи кинетической энергии от набегающего потока к потоку, вошедшему в тупиковую полость. Выявлено влияние обмена работой и теплотой на механизм передачи энергии в тупиковой полости трубы Гартмана—Шпренгера.**

**Ключевые слова:** труба Гартмана—Шпренгера, энергообмен, градиент линейных скоростей.

## Введение

Системы термостатирования и различные устройства, разделяющие поток газа на части, используют эффект Гартмана—Шпренгера. Эффект заключается в том, что в конце тупиковой полости температура заторможенного потока становится выше того значения, которое было при входе в тупиковую полость [1, 2].

Дулов В. Г. и Максимов В. П. на основе анализа одномерных нестационарных уравнений газовой динамики на фоне изэтропических продольных колебаний в резонансной трубке в приближении центрированных коротких волн сжатия и разрежения проведены оценки повешенного теплового эффекта Гартмана—Шпренгера в режиме высоких частот. При этом учитывался теплообмен газа в полости с набегающим потоком через открытый конец трубки, а также через стенки резонатора при конечной тепловой проводимости стенок. Методики расчета характеристик резонатора не приведены [3].

## Цель исследования

Определить механизм подвода энергии к газу в тупиковой полости, приводящий к повышению температуры торможения выше максимально возможного при адиабатическом торможении.

## Материал и методы исследования

Полная энергия сплошной среды может изменяться при наличии энергообмена с внешней средой, которое заключается в обмене работой и теплотой. В трубе Гартмана—Шпренгера этот энергообмен может происходить под влиянием сил вязкости, из-за которых возникают касательные напряжения при контакте набегающего потока с потоком газа, вошедшим в тупиковую полость [4, 5].

Возможность обмена работой и теплотой между внешним и внутренним потоками газа в трубе Гартмана—Шпренгера была проверена на экспериментальной установке (рис. 1) [6]. Для верификации используемых в расчетах математической модели трубы

Гартмана—Шпренгера проанализированы исследования других авторов и собственной модели [7–9].

Основываясь на теоретических и экспериментальных исследованиях, как собственных, так и других авторов, предлагается следующая физическая модель рабочего процесса трубы Гартмана—Шпренгера. Набегающий поток движется по касательной к тупиковой полости. Часть набегающего потока газа входит в тупиковую полость. При входе в тупиковую полость скорость газа снижается. Между набегающим потоком и потоком, вошедшим в тупиковую полость, возникают касательные напряжения вызванные вязкостью жидкости. Касательные напряжения передают кинетическую энергию от набегающего потока к потоку, вошедшему в тупиковую полость, силами вязкости за счет разности скоростей. Полная энергия газа в тупиковой полости начинает расти. Рост полной энергии (полного давления и полной температуры) будет идти до тех пор, пока их значения не превысят полную энергию набегающего потока. Происходит выброс газа из тупиковой полости в набегающий поток. Истечение газа из тупиковой полости будет идти до тех пор, пока ее энергия не станет меньше полной энергии набегающего потока.

Далее процесс повторяется.

На базе предложенной физической модели составлена математическая модель.

В трубе Гартмана—Шпренгера происходит повышение полной температуры газа при движении от входа до конца тупиковой полости. По законам механики сплошной среды изменение полной энергии газа (полного давления и полной температуры) может происходить только при обмене работой и теплотой с внешней средой.

В трубе Гартмана—Шпренгера происходит повышение полной температуры газа от входа до конца тупиковой полости [10–11]. Подвода теплоты в тупиковой полости нет, следовательно, должен идти процесс обмена работой с внешней средой. Этот обмен может возникать при подводе кинетической энергии от внешней среды. Кинетическая энергия от внешней среды может подводиться силами вязкости за счет разности линейных скоростей

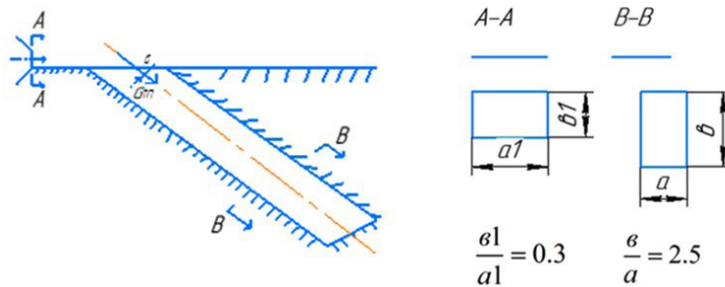


Рис. 1. Схема трубы Гартмана-Шпренгера  
Fig. 1. Scheme of the Hartmann-Sprenger pipe

внешнего потока и потока газа, вошедшего в тупиковую полость. При движении по тупиковой полости скорость движения газа падает, статическое давление растет в соответствии с уравнением Бернулли и после достижения определенной разности давлений в тупиковой полости и во внешнем потоке газ начинает выходить из тупиковой полости наружу. Этот процесс будет идти до тех пор, пока статические давления газов в тупиковой полости и в набегающем потоке не сравняются. Далее процесс повторяется, т.е. часть набегающего потока входит в тупиковую полость, получает кинетическую энергию от набегающего потока, в результате чего растет полное давление и полная температура газа в тупиковой полости. Часть газа в конце тупиковой полости подвергается попеременному сжатию и расширению, но из тупиковой полости не выходит наружу. Это так называемая застойная зона [12].

#### Результаты исследования трубы Гартмана-Шпренгера

В трубе Гартмана – Шпренгера поток газа, входящий в тупиковую полость, снижает свою скорость. Из-за разности скоростей набегающего потока и потока, вошедшего в тупиковую полость, возникают касательные напряжения. Силами вязкости кинетическая энергия передается от набегающего потока газа к потоку, вошедшему в тупиковую полость. Этот процесс идет до тех пор пока давление газа в тупиковой плоскости не станет выше давления набегающего потока. Происходит выброс газа из тупиковой полости. Этот процесс остановится при равенстве давлений газа в тупиковой полости и в набегающем потоке. Далее процесс повторяется. Полная температура газа в конце тупиковой полости после достижения максимального значения и стабилизации процесса подвода теплоты в эту зону и отвода ее в окружающую среду становится постоянной величиной.

**Математическая модель**, описывающая рабочий процесс трубы Гартмана – Шпренгера:

1. Мощность, передаваемая от набегающего потока к потоку, вошедшему в тупиковую полость, касательными напряжениями, возникающими в вязкой жидкости  $N_H = N_{TH}$ , где  $N_H = G_H \cdot L_H$  — мощность набегающего потока;  $N_{TH} = G_{TH} \cdot L_{TH}$  — мощность, подведенная к потоку в тупиковой полости;  $G_{TH}, G_H$  — расход набегающего потока и потока газа, вошедшего в тупиковую полость соответственно;  $L_{TH}, L_H$  — удельная работа, отведенная от набегающего потока и подведенная к потоку в тупиковой полости соответственно, Дж/кг.

$$L_H = c_p \cdot T_{OH} \left( 1 - \frac{1}{(\pi_{TH}^*)^{\frac{k-1}{k}}} \right) \eta_p^*$$

$$L_{TH} = c_p \cdot T_{OH} \left( (\pi_c^*)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) \frac{1}{\eta_c^*}$$

$c_p$  — теплоемкость при постоянном давлении, Дж/кг·К;  $T_{OH}$  — температура заторможенного набегающего потока, К;  $\pi_{TH}^*$  — степень понижения полного давления набегающего потока  $\left( \pi_{TH}^* = \frac{P_{OH}}{P_{OHK}} \right)$ ;  $\pi_c^*$  — степень повышения полного давления потока в тупиковой полости от взаимодействия с набегающим потоком силами вязкости за счет возникновения касательных напряжений.

$$\pi_c^* = \frac{P_{ТПК}^*}{P_{ОХ,ТН}^*}$$

$P_{ТПК}^*$  — полное давление газа в конце тупиковой полости, Па;  $P_{ОХ,ТН}^*$  — полное давление газа на входе в тупиковую полость, Па.

Величина касательных напряжений, с помощью которых кинетическая энергия передается от набегающего потока к потоку в тупиковой полости, определяется разностью давлений конца тупиковой полости и входа в нее:

$$\tau = P_{ТПК}^* - P_{ОХ,ТН}^*, \text{ Па.}$$

Касательные напряжения возникают за счет разности скоростей набегающего потока и потока, вошедшего в тупиковую полость. Количество энергии, которую можно передать с помощью касательных напряжений в вязкой жидкости, зависит от свойств жидкости и длины пути взаимодействия высоконапорного и низконапорного потоков.

Касательные напряжения можно определять эмпирической зависимостью Ж. Буссинеска, по гипотезам Прадтля, Тейлора, А. Ферри, Колмогорова [13].

Расход газа определяется по формуле

$$G = m \cdot F \frac{P^* q(\lambda)}{\sqrt{T^*}} \text{ (кг/с),}$$

где  $m = \sqrt{\frac{k}{R} \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}}$ , (кг·К/Дж)<sup>0.5</sup> — коэффициент (для воздуха  $m = 0,0404$ );  $F$  — площадь;  $P^*$  — полное давление газа, Па;  $T^*$  — полная температура газа, К;  $q(\lambda)$  — приведенный расход.

Полная температура в конце тупиковой полости

$$T_{ТП}^* = T_{ОН}^* \left( 1 + \frac{\pi_c^{*\frac{k-1}{k}} - 1}{\eta_c^*} \right), \text{ К.}$$

Полная температура набегающего потока после завершения энергообмена с потоком, вошедшим в тупиковую полость,

$$T_{ОНК}^* = T_{ОН}^* \left[ 1 + \left( 1 - \frac{1}{\pi_{ТН}^{*\frac{k-1}{k}}} \right) \eta_p^* \right], \text{ К.}$$

Система уравнений замыкается добавлением газодинамических функций  $M$ ,  $\lambda$ ,  $\pi(\lambda)$ ,  $\tau(\lambda)$ ,  $q(\lambda)$ ,  $z(\lambda)$ ,  $\epsilon(\lambda)$ .

На базе замкнутой математической модели составлены две методики расчета трубы Гартмана–Шпренгера:

— методика расчета оптимальных геометрических размеров ТГШ для получения заданной температуры в конце тупиковой полости;

— методика расчета термодинамических параметров трубы Гартмана–Шпренгера при известных геометрических размерах.

Методика расчета оптимальных геометрических размеров ТГШ для получения заданной температуры в конце тупиковой полости.

Исходные данные для расчета:

$G_{\text{компр}} = G_{\text{max}} = G_{Н1}$  кг/с — расход набегающего потока,  $G_{Н1} = 0,2$  кг/с;

$T_{Н1}^* = 288\text{ К}$  — полная температура набегающего потока;

$P_{Н1} = 1,013 \cdot 10^5$  — давление окружающей среды;

$M_{Н1} = 0,579$  — число Маха набегающего потока;

$v1/a1$  — отношение высоты к ширине сопла для истечения набегающего потока;

$v/a$  — отношение высоты к ширине тупиковой полости;

$\frac{G_{Н1}}{G_{ТП}} = 3,5$  — отношение расходов газов набегающего потока и вошедшего в тупиковую полость;

$T_{КТП}^*$  — температура заторможенного потока в конце тупиковой полости К (388 К);

$\delta$  — угол между осью набегающего потока и осью тупиковой полости, град. (30 °);

$k$  — показатель адиабаты (1,4);

$c_p$  — теплоемкость газа при постоянном давлении, Дж/кг·К (1003,5);

$R$  — газовая постоянная, Дж/кг·К (287);

$\mu_0$  — динамическая вязкость газа при стандартных атмосферных условиях, кг/м·с;

$m$  — коэффициент,

$$m = \sqrt{\frac{k}{R} \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \left( \frac{\text{кг} \cdot \text{К}}{\text{Дж}} \right)^{0,5}}.$$

Определить:

$P_{КТП}^*$  — полное давление газа в конце тупиковой полости, Па;

$P_{НК}^*$  — полное давление набегающего потока после завершения энергообмена с газом, вошедшим в тупиковую полость, Па;

$T_{НК}^*$  — полная температура набегающего потока после завершения энергообмена с газом, вошедшим в тупиковую полость, К;

$a1$  — ширина сопла для истечения набегающего потока газа, м;

$v1$  — высота сопла для истечения набегающего потока газа, м;

$a$  — ширина тупиковой полости, м;

$v$  — высота тупиковой полости, м;

$G_{ТН}$  — расход газа через тупиковую полость, кг/с;

$l$  — длина тупиковой полости, м.

Расчет

1. Полное давление набегающего потока

$$P_{Н1}^* = P_{Н1} \left( 1 + \frac{k-1}{2} M_{Н1}^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} = 1,013 \cdot 10^5 (1 + 0,2 \cdot 0,579^2)^{3,5} = 1,013 \cdot 10^5 \cdot 1,067^{3,5} = 1,27132 \cdot 10^5$$

2. Коэффициент скорости набегающего потока

$$\lambda = M_{Н1} \frac{\sqrt{\frac{k+1}{2}}}{\sqrt{1 + \frac{k-1}{2} M_{Н1}^2}} = 0,579 \frac{\sqrt{\frac{2,4}{2}}}{\sqrt{1 + 0,2 \cdot 0,579^2}} = \frac{0,6343}{\sqrt{1,033}} = 0,624$$

3. Приведенный расход набегающего потока

$$q(\lambda_{Н1}) = \lambda_{Н1} \left( 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{Н1}^2 \right)^{\frac{1}{k-1}} \left( \frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}} = 0,624 \left( 1 - \frac{1}{6} \cdot 0,24^2 \right)^{2,5} (1,2)^{2,5} = 0,832$$

4. Площадь среза сопла для истечения набегающего потока

$$F = \frac{G_{Н1} \sqrt{T_{ОН}^*}}{m P_{Н1}^* q(\lambda_{Н1})} = \frac{0,2 \sqrt{288}}{0,0404 \cdot 1,27132 \cdot 10^5 \cdot 0,8323} = \frac{3,394}{4274,8} = 7,931 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

$$5. F_{Н1} = a1 b1 = \frac{a1}{0,3} b1 = \frac{a1^2}{0,3}$$

Высота среза сопла набегающего потока

$$a1 = \sqrt{0,3 F_{Н1}} = \sqrt{0,3 \cdot 7,901 \cdot 10^{-4}} = 1,5425 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

6. Ширина среза сопла набегающего потока

$$a1 = \frac{a1}{0,3} = 5,142 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

7. Расход газа в тупиковой полости

$$G_{ТН} = \frac{G_{Н1}}{3,5} = \frac{0,2}{3,5} = 0,05714 \text{ кг/с}$$

8. Статическая температура набегающего потока

$$T_{Н1} = \frac{T_{Н1}^*}{1 + \frac{k-1}{2} M_{Н1}^2} = \frac{288}{1 + 0,2 \cdot 0,579^2} = 270 \text{ К}$$

9. Скорость звука набегающего потока

$$a_{Н1} = \sqrt{k R T_{Н1}} = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 270} = 329,3 \text{ м/с}$$

10. Скорость набегающего потока

$$v_{Н1} = a_{Н1} M_{Н1} = 329,3 \cdot 0,579 = 190,7 \text{ м/с}$$

11. Плотность набегающего потока

$$\rho_{Н1} = \frac{P_{Н1}}{R T_{Н1}} = \frac{1,013 \cdot 10^5}{287 \cdot 270} = 1,307 \text{ кг/м}^3$$

12. Динамическая вязкость газа набегающего потока (формула Сатерленда)

$$\mu_H = \mu_o \frac{273 + c_\mu}{T_H + c_\mu} \left( \frac{T_H}{273} \right)^{1,5} = 18,1 \cdot 10^{-6} \frac{273 + 117}{270 + 117} \left( \frac{270}{273} \right)^{1,5} = 17,9 \cdot 10^{-6}$$

13. Кинематическая вязкость

$$\nu_H = \frac{\mu_H}{\rho_H} = \frac{17,9 \cdot 10^{-6}}{1,3070} = 1,372 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$$

14. Коэффициент сопротивления при повороте потока на  $\delta = 30^\circ$  [14, 15]:

$$\xi_{пов} = f(F_H, \delta) = 0,07$$

15. Потери полного давления на поворот потока

$$\Delta p_{пов} = \xi_{пов} \rho_H \frac{V_H^2}{2} = 0,07 \cdot 1,307 \frac{190,7^2}{2} = 0,01664 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

16. Полное давление на входе в полость

$$P_{вх}^* = p_H^* - \Delta p_{пов} = 1,2713 \cdot 10^5 - 0,01664 \cdot 10^5 = 1,25466 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

17. Газодинамическая функция давления на входе в полость

$$\pi(\lambda_{вх}) = \frac{p_H}{P_{вх}^*} = \frac{1,013 \cdot 10^5}{1,25466 \cdot 10^5} = 0,80759$$

18. Коэффициент скорости на входе в полость

$$\lambda_{вх} = \sqrt{\left[ 1 + \pi(\lambda_{вх})^{\frac{k-1}{k}} \right] \frac{k+1}{k-1}} = \sqrt{\left[ 1 + 0,80759^{0,286} \right] \frac{2,4}{0,4}} = 0,5964$$

19. Расходная газодинамическая функция на входе в тупиковую полость

$$q(\lambda_{вх}) = \left( \frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda_{вх} \left( 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{вх}^2 \right)^{\frac{1}{k-1}} = 1,2^{2,5} \cdot 0,5964 \left( 1 - \frac{1}{6} \cdot 0,5964^2 \right)^{2,5} = 0,80723$$

20. Площадь тупиковой полости

$$F_{вх} = \frac{G_{ТН} \sqrt{T_H^*}}{0,0404 \cdot 1,25466 \cdot 10^5 \cdot 0,80723} = \frac{G_{ТН} \sqrt{T_H^*}}{m P_{вх}^* q(\lambda_{вх})} = \frac{0,05714 \cdot \sqrt{288}}{4091,708} = 2,367 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

21. Ширина тупиковой полости

$$a = \sqrt{\frac{F_{вх}}{2,5}} = \sqrt{\frac{2,367 \cdot 10^{-4}}{2,5}} = 0,973 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

22. Высота тупиковой полости

$$e = 2,5a = 2,5 \cdot 0,973 \cdot 10^{-2} = 24,33 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

23. Эквивалентный диаметр тупиковой полости

$$d_\ominus = \frac{4F_{вх}}{\lambda} = \frac{4F_{вх}}{2(a+b)} = \frac{4 \cdot 2,367 \cdot 10^{-4}}{2(9,73 \cdot 10^{-3} + 24,33 \cdot 10^{-3})} = 13,90 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

24. Число Рейнольдса набегающего потока

$$Re_H = \frac{V_H d_\ominus}{\nu_H} = \frac{190,7 \cdot 13,9 \cdot 10^{-3}}{1,372 \cdot 10^{-5}} = 193201,9$$

25. Коэффициент сопротивления набегающего потока (формула Блазиуса)

$$\xi_H = \frac{0,3164}{Re_H^{0,25}} = \frac{0,3164}{193201,9^{0,25}} = \frac{0,3164}{20,965} = 0,01509$$

26. Критическая скорость звука на входе в полость

$$a_{кр} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} R T_H^*} = \sqrt{\frac{2,14}{1,4+1} 287 \cdot 288} = 310,5 \text{ м/с}$$

27. Скорость газа на входе в полость

$$V_{вх} = \lambda_{вх} a_{кр} = 0,5964 \cdot 310,5 = 185,182 \text{ м/с}$$

28. Осредненная по длине тупиковой полости скорость звука

$$C_o = \sqrt{k R T_H} = \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 270} = 329,4 \text{ м/с}$$

29. Необходимая степень повышения полного давления в тупиковой полости для получения заданной температуры

$$\pi_c^* = \left[ \left( \frac{T_{КТП}^*}{T_H^*} - 1 \right) \eta_c + 1 \right]^{3,5} = \left[ \left( \frac{348}{288} - 1 \right) 0,85 + 1 \right]^{3,5} = 1,769$$

30. Полное давление в конце тупиковой полости

$$P_{КТП}^* = P_{вх}^* \pi_c^* = 1,25466 \cdot 10^5 \cdot 1,769 = 2,2195 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

31. Величина касательных напряжений, которые повысили давление в тупиковой полости

$$\tau = P_{КТП}^* - P_{вх}^* = (2,21950 - 1,25466) 10^5 = 0,96484 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

32. Длина пути газа в тупиковой полости по линии тока

$$l_{вх} = \frac{2d_\ominus \tau}{\rho_H \xi_H V_H^2} = \frac{2 \cdot 13,9 \cdot 10^{-3} \cdot 9,6484 \cdot 10^4}{1,3076 \cdot 0,01509 \cdot 190,7^2} = 3,738 \text{ м}$$

33. Длина тупиковой полости

$$l = \frac{l_{вх}}{2\pi} = \frac{3,738}{2 \cdot 3,14} = 0,595 \text{ м}$$

34. Удельная работа, подведенная к потоку газа в тупиковой полости

$$L_{ТП} = c_p T_H^* \left( 1 + \frac{\pi_c^{\frac{k-1}{k}} - 1}{\eta_c^*} \right) = 1003,5 \cdot 288 \left( 1 + \frac{1,769 - 1}{0,85} \right) = 349257,6 = 3,492576 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$$

35. Мощность, подведенная к потоку, вошедшему в тупиковую полость, от внешнего потока

$$N_{ТП} = G_{ТП} L_{ТП} = 0,05714 \cdot 3,492576 \cdot 10^5 = 19956,6 \text{ Вт}$$

36. Удельная работа, совершенная набегающим потоком над потоком, вошедшим в тупиковую полость,

$$L_H = L_{ТП} \frac{G_{ТП}}{G_H} = 3,492576 \cdot 10^5 \frac{0,05714}{0,2} = 5701,6 \text{ Дж/кг}$$

37. Степень понижения полного давления набегающего потока газа при энергообмене с потоком, вошедшим в тупиковую полость,

$$\pi_H^* = \left( 1 - \frac{L_H}{c_p T_H^* \eta_H^*} \right)^{\frac{k}{k-1}} = \left( 1 - \frac{5701,6}{1003,5 \cdot 288 \cdot 0,92} \right)^{-3,5} = 1,0788$$

38. Полное давление набегающего потока после завершения энергообмена с газом, вошедшим в тупиковую полость,

$$P_{НК}^* = \frac{P_H^*}{\pi_H^*} = \frac{1,27132 \cdot 10^5}{1,0788} = 1,1785 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

39. Температура набегающего потока газа после завершения энергообмена с газом, вошедшим в тупиковую полость,

$$T_{НК}^* = T_H^* \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{\pi_H^{\frac{k-1}{k}}} \right) \eta_H^* \right] = 288 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{1,07288^{\frac{1,4-1}{1,4}}} \right) 0,92 \right] = 282,3 \text{ К}$$

40. Температура газа в конце тупиковой полости

$$T_{кТП}^* = T_H^* \left[ 1 + \left( \pi_c^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right) \frac{1}{\eta_c^*} \right] = 288 \left[ 1 + (1,769^{0,286} - 1) \frac{1}{0,85} \right] = 288(1 + 0,20847) = 348,0 \text{ К}$$

Таким образом, по данным расчета  $\Delta T_{ТП} = 60^\circ = T_{кТП}^* - T_H^*$ ; по данным [15] —  $\Delta T_{ТП} = 61^\circ$ . Совпадение удовлетворительное.

Расчет окончен.

### Методика расчета термодинамических параметров трубы Гартмана–Шпренгера при известных геометрических размерах

Исходные данные:

$M_H$  — число Маха набегающего потока ( $M_H \leq 1$ );  
 $T_H^*$  — полная температура набегающего потока газа, К;

$P_H$  — давление окружающей среды, Па;  
 $P_H^*$  — полное давление набегающего потока газа, Па;

$a1$  — ширина сопла для истечения набегающего потока, м;

$b1$  — высота сопла для истечения набегающего потока, м;

$\mu_0$  — динамическая вязкость газа набегающего потока при стандартных атмосферных условиях, кг/м·с;

$\delta$  — угол между осями набегающего потока и тупиковой полости, град.;

$a$  — ширина тупиковой полости, м;

$b$  — высота тупиковой полости, м;

$L_{ТП}$  — длина тупиковой полости, м;

$L_{в.л} = 2\pi L_{ТП}$  — длина пути газа по линии тока от входа в тупиковую полость до конца, м;

$d_э$  — эквивалентный диаметр тупиковой полости, м;

$\eta_H^*$  — степень совершенства процесса расширения ( $\eta_H^* = 0,90 - 0,95$ );

$\eta_c^*$  — степень совершенства процесса сжатия ( $\eta_c^* = 0,85 - 0,9$ );

$c_p$  — теплоемкость газа при постоянном давлении, Дж/кг·К;

$k$  — показатель адиабаты;

$R$  — газовая постоянная, Дж/кг·К;

$M$  — коэффициент, (кг·К / Дж)<sup>0,5</sup>;

$$m = \sqrt{\left( \frac{k}{R} \cdot \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k}}}$$

Определить

$T_{кТП}^*$  — температура заторможенного потока газа в конце тупиковой полости, К;

$P_{кТП}^*$  — полное давление газа в конце тупиковой полости, Па;

$P_{НК}^*$  — полное давление набегающего потока газа после завершения энергообмена с газом, вошедшим в тупиковую полость, Па;

$T_{НК}^*$  — температура заторможенного набегающего потока газа после завершения энергообмена с газом, вошедшим в тупиковую полость, К.

Расчет

1. Газодинамическая функция давления набегающего потока газа на срезе сопла

$$\pi(\lambda_H) = \frac{P_H}{P_H^*}$$

2. Коэффициент скорости набегающего потока

$$\lambda_H = \sqrt{\left[ 1 - \pi(\lambda_H)^{\frac{k-1}{k}} \right] \frac{k+1}{k-1}}$$

3. Приведенный расход набегающего потока

$$q(\lambda_H) = \lambda_H \left( 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_H^2 \right)^{\frac{1}{k-1}} \left( \frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}}$$

4. Площадь среза сопла набегающего потока

$$F_H = a1 \cdot b1$$

5. Расход газа набегающего потока

$$G_H = m F_H \frac{P_H^* q(\lambda_H)}{\sqrt{T_H^*}}$$

6. Статическая температура набегающего потока

$$T_H = T_H^* \left( 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_H^2 \right)$$

7. Плотность набегающего потока

$$\rho_H = \frac{P_H}{R T_H}$$

8. Динамическая вязкость газа набегающего потока

$$\mu_H = \mu_0 \frac{273 + c_\mu}{T_H + c_\mu} \left( \frac{T_H}{273} \right)^{1,5}$$

9. Кинематическая вязкость газа набегающего потока

$$\nu_H = \frac{\mu_H}{\rho_H}$$

10. Критическая скорость газа набегающего потока

$$a_{кр} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} RT_H^*}$$

11. Скорость набегающего потока

$$V_H = \lambda_{вх} a_{кр}$$

12. Коэффициент сопротивления движению при повороте потока на  $\delta^\circ$  [14, 15]

$$\xi_{пов} = f(F_H, \delta)$$

13. Потери полного давления на поворот части набегающего потока при входе в тупиковую полость

$$\Delta P_{пов} = \xi_{пов} \rho_H \frac{V_H^2}{2}$$

14. Полное давление части набегающего потока при входе в тупиковую полость

$$P_{вх}^* = P_H^* - \Delta P_{пов}$$

15. Газодинамическая функция давления на входе в тупиковую полость

$$\pi(\lambda_{вх}) = \frac{P_{вх}^*}{P_H^*}$$

16. Коэффициент скорости на входе в тупиковую полость

$$\lambda_{вх} = \sqrt{\left[ \frac{1 - \pi(\lambda_{вх})^{\frac{k-1}{k}}}{\pi(\lambda_{вх})^{\frac{k-1}{k}}} \right]^{\frac{k+1}{k-1}}}$$

17. Расходная газодинамическая функция на входе в тупиковую полость

$$q(\lambda_{вх}) = \left( \frac{k+1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda_{вх} \left( 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_{вх}^2 \right)^{\frac{1}{k-1}}$$

18. Площадь тупиковой полости

$$F_{тп} = ab$$

19. Расход газа в тупиковой полости

$$G_{тп} = m F_{тп} \frac{P_{вх}^* q(\lambda_{вх})}{\sqrt{T_H^*}}$$

20. Эквивалентный диаметр тупиковой полости

$$d_\varnothing = \frac{4F_{тп}}{\chi} = \frac{4F_{тп}}{2(a+b)}$$

21. Число Рейнольдса набегающего потока

$$Re_H = \frac{V_H d_\varnothing}{\nu_H}$$

22. Коэффициент сопротивления набегающего потока (формула Блазиуса) [15]

$$\xi_H = \frac{0,3164}{Re_H^{0,25}}$$

23. Скорость газа на входе в полость

$$V_{вх} = \lambda_{вх} a_{кр}$$

24. Осредненная по длине тупиковой полости скорость звука

$$c_0 = \sqrt{kRT_H^*}$$

25. Величина касательных напряжений при движении газа в тупиковой полости по линии тока

$$\tau = \rho_H \xi_H \frac{l_{вх} V_H^2}{d_\varnothing 2}$$

26. Полное давление газа в конце тупиковой полости

$$P_{ктп}^* = P_{вх}^* - \tau$$

27. Степень повышения полного давления газа в конце тупиковой полости

$$\pi_c^* = \frac{P_{ктп}^*}{P_{вх}^*}$$

28. Температура заторможенного потока газа в конце тупиковой полости

$$T_{ктп}^* = T_H^* \left[ 1 + \left( \pi_c^{*\frac{k-1}{k}} - 1 \right) \frac{1}{\eta_c^*} \right]$$

29. Удельная энергия, подведенная к потоку газа в тупиковой полости

$$L_{тп} = c_p T_H^* \left( 1 + \frac{\pi_c^{*\frac{k-1}{k}} - 1}{\eta_c^*} \right)$$

30. Мощность, подведенная к потоку, вошедшему в тупиковую полость, от внешнего потока силами вязкости с помощью касательных напряжений

$$N_{тп} = G_{тп} L_{тп}$$

31. Удельная энергия, отведенная от набегающего потока с помощью касательных напряжений к потоку, вошедшему в тупиковую полость,

$$L_H = L_{тп} \frac{G_{тп}}{G_H}$$

32. Степень понижения полного давления набегающего потока газа при энергообмене с потоком, вошедшим в тупиковую полость

$$\pi_H^* = \left( 1 - \frac{L_H}{c_p T_H^* \eta_H^*} \right)^{-\frac{k}{k-1}}$$



33. Полное давление набегающего потока после завершения энергообмена с газом, вошедшим в тупиковую полость

$$P_{HK}^* = \frac{P_H^*}{\pi_H^*}$$

34. Температура набегающего потока газа после завершения энергообмена с газом, вошедшим в тупиковую полость

$$T_{HK}^* = T_H^* \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{\pi_H^{*k}} \right) \eta_H^* \right]$$

Расчет окончен.

### Заключение

Представлены результаты теоретических и экспериментальных исследований трубы Гартмана–Шпренгера.

В тупиковой полости циклически происходит повышение давления из-за подвода работы от набегающего потока.

Решение замкнутой математической модели позволило составить две методики расчета трубы Гартмана–Шпренгера: оптимальную геометрию и характеристики термодинамические при известной геометрии.

### Список источников

1. Бочарова А. В., Лебедев М. Г. Аэроакустический эффект Гартмана: Сто лет исследований и текущего состояния вопроса // Инженерный журнал: Наука и инновации. 2018. № 9 (81). DOI: 10.18698/2308-6033-2018-9-1803.
2. Попович С. С. Экспериментальное исследование влияния ударных волн на эффект безмашинного энергоразделения // Наука и образование. 2016. № 3. С. 64–80. DOI: 10.7463/03160835444.
3. Дулов В. Г., Максимов В. П. Термический эффект резонатора Гартмана–Шпренгера в режиме высоких частот // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика, Астрономия. 2005. Вып. 4. С. 79–86.
4. Chung K. M., Lee K. H., Chang K. C. Characteristics of Compressible Flow over Cylindrical Cavities // Journal of Aircraft. 2016. Vol. 53 (5). P. 1565–1567. DOI: 10.2514/1.C033784.
5. Кузнецов В. И., Макаров В. В., Шандер А. Ю. Сходство и различие процессов эффекта Ранка и трубы Гартмана–Шпренгера // Омский научный вестник. Сер. Авиационно-ракетное и энергетическое машиностроение. 2021. Т. 5, № 1. С. 61–70. DOI: 10.25206/2588-0373-2021-5-1-61-70.
6. Кузнецов В. И., Шпаковский Д. Д. Аномальный аэродинамический нагрев тупиковой полости в набегающем потоке // Инженерно-физический журнал. 2000. Т. 73, № 1. С. 160–164.
7. Cirnu C., Stefan A., Balan G. Sonomicribiology of Raw Water at the Treatment by Air-Jet Generators // Journal of

Engineering Studies and Research. 2012. Vol. 18 (2). P. 31–38. DOI: 10.29081/jesr.v18i2.215.

8. Волков К. Н., Емельянов В. Н., Ефремов А. В. [и др.]. Структура течения и колебания давления при взаимодействии сверхзвуковой недорасширенной струи газа с трубной полостью // Журнал технической физики. 2020. Т. 90, вып. 8. С. 1254–1267. DOI: 10.21883/JTF.2020.08.49534.328-19.

9. Кузнецов В. И., Шандер А. Ю. Эффект Гартмана–Шпренгера и его применение на летательных аппаратах // Омский научный вестник. Сер. Авиационно-ракетное и энергетическое машиностроение. 2019. Т. 3, № 2. С. 150–155. DOI: 10.25206/2588-0373-2019-3-2-150-155.

10. Narayan S., Bholanath B., Sundararajan T. [et al.] Acoustic Heating Effects in Hartmann Whistle // International Journal of Aeroacoustics. 2013. Vol. 121 (5-6). P. 557–578. DOI: 10.1260/1475-472X.12.5-6.557.

11. Zapryagaev V., Kiselev N., Gubanov D. Shock-wave structure of supersonic jet flows // Aerospace. 2018. Vol. 5 (2). DOI: 10.3390/aerospace5020060.

12. Emelyanov V. N., Tetarina J. V., Volkov K. N. [et al.] Pressure oscillations and instability of working processes in the combustion chambers of solid rocket motors // Acta Astronautica. 2017. Vol. 135. P. 161–171. DOI: 10.1016/j.actaastro.2016.09.029.

13. Краснов Н. Ф., Кошевой В. Н., Калугин В. Т. Аэродинамика отрывных течений. Москва: Высшая шк., 1988. 351 с. ISBN 5-06-001196-8.

14. Идельчик И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. Москва: Машиностроение, 1975. 559 с.

15. Абрамович Г. Н. Прикладная газовая динамика. Москва: Наука, 1969. 824 с.

**КУЗНЕЦОВ Виктор Иванович**, доктор технических наук, профессор (Россия), профессор кафедры «Авиа- и ракетостроение» Омского государственного технического университета (ОмГТУ), г. Омск.  
SPIN-код: 1763-0468  
AuthorID (РИНЦ): 161955  
ResearcherID: N-9618-2016  
Адрес для переписки: vi.kuznetzov@yandex.ru  
**МАКАРОВ Владимир Вячеславович**, кандидат технических наук, доцент (Россия), доцент кафедры «Авиа- и ракетостроение» ОмГТУ, г. Омск.  
SPIN-код: 9020-9010  
AuthorID (РИНЦ): 947855  
Адрес для переписки: kosmos070969@mail.ru

### Для цитирования

Кузнецов В. И., Макаров В. В. Физико-математическая модель рабочего процесса трубы Гартмана–Шпренгера // Омский научный вестник. Сер. Авиационно-ракетное и энергетическое машиностроение. 2022. Т. 6, № 1. С. 92–100. DOI: 10.25206/2588-0373-2022-6-1-92-100.

Статья поступила в редакцию 08.12.2021 г.

© В. И. Кузнецов, В. В. Макаров

# PHYSICAL AND MATHEMATICAL MODEL OF WORKING PROCESS OF THE HARTMANN–SPRENGER TUBE

V. I. Kuznetsov, V. V. Makarov

Omsk State Technical University,  
Russia, Omsk, Mira Ave., 11, 644050

**The question of the operation of the Hartmann–Sprenger tube is considered. The influence of the parameters of the incident gas flow on its parameters at the end of the dead-end cavity is investigated. The mechanism of energy transfer from the incoming flow to the flow entering the dead-end cavity has been determined.**

**The proof of the influence of viscosity and shear stresses on the occurrence of transfer of kinetic energy from the incident flow to the flow entering the dead-end cavity is given. The influence of the exchange of work and heat on the mechanism of energy transfer in the dead-end cavity of the Hartmann–Sprenger tube is revealed.**

**Keywords:** Hartmann–Sprenger tube, energy exchange, linear velocity gradient.

## References

1. Bocharova A. V., Lebedev M. G. Aeroakusticheskiy effect Gartmana: Sto let issledovaniy i tekushchego sostoyaniya voprosa [The Aero-Acoustic Hartmann Effect: Hundred Years of Research and the Current State of the Matter] // Inzhenernyy zhurnal: Nauka i innovatsii. *Engineering Journal: Science and Innovation*. 2018. No. 9 (81). DOI: 10.18698/2308-6033-2018-9-1803. (In Russ.).
2. Popovich S. S. Eksperimental'noye issledovaniye vliyaniya u darnykh voln na effect bezmashinnogo energorazdeleniya [Experimental Research of Machineless Energy Separation Effect Influenced by Shock Waves] // Nauka i obrazovaniye. *Science and Education*. 2016. No. 3. P. 64–80. DOI: 10.7463/03160835444. (In Russ.).
3. Dulov V. G., Maksimov V. P. Termicheskiy effekt rezonatora Gartmana-Shprengera v rezhime vysokikh chastot [Thermal effect of the Hartmann-Sprenger resonator in a highfrequency regime] // Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika, Astronomiya. *Bulletin of St. Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics, Astronomy*. 2005. Issue 4. P. 79–86. (In Russ.).
4. Chung K. M., Lee K. H., Chang K. C. Characteristics of Compressible Flow over Cylindrical Cavities // *Journal of Aircraft*. 2016. Vol. 53 (5). P. 1565–1567. DOI: 10.2514/1.C033784. (In Engl.).
5. Kuznetsov V. I., Makarov V. V., Shander A. Yu. Skhodstvo i razliche protsessov efekta Ranka i trubyy Gartmana – Shprengera [Similarities and differences between working processes of Rankine effect and the Hartmann–Sprenger tube] // Omskiy nauchnyy vestnik. Ser. Aviatsonno-raketnoye i energeticheskoye mashinostroyeniye. *Omsk Scientific Bulletin. Series Aviation-Rocket and Power Engineering*. 2021. Vol. 5, no. 1. P. 61–70. DOI: 10.25206/2588-0373-2021-5-1-61-70. (In Russ.).
6. Kuznetsov V. I., Shpakovsky D. D. Anomal'nyy aerodinamicheskiy nagrev tupikovoy polosti v nabegayushchem potoke [Anomalous aerodynamic heating of a dead-end cavity in an incoming flow] // Inzhenerno-fizicheskii zhurnal. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2000. Vol. 73, no. 1. P. 160–164. (In Russ.).
7. Cirnu C., Stefan A., Balan G. Sonomicrobiology of Raw Water at the Treatment by Air-Jet Generators // *Journal of Engineering Studies and Research*. 2012. Vol. 18 (2). P. 31–38. DOI: 10.29081/jesr.v18i2.215. (In Engl.).
8. Volkov K. N., Emel'yanov V. N., Efremov A. V. [et al.]. Struktura techeniya i kolebaniya davleniya pri vzaimodeystvii sverkh zvukovoy nedorasshirennoy strui gaza s trubnoy polost'yu [Flow structure and pressure oscillations during the interaction of a supersonic under expanded gas jet with a tubular cavity] // *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki. Journal of Applied Physics*. 2020. Vol. 90, Issue. 8. P. 1254–1267. DOI: 10.21883/JTF.2020.08.49534.328-19. (In Russ.).
9. Kuznetsov V. I., Shander A. Yu. Effekt Gartmana – Shprengera i ego primeneniye na letatel'nykh apparatakh [Hartmann-Sprenger effect and its application on aircraft] // Omskiy nauchnyy vestnik. Ser. Aviatsonno-raketnoye i energeticheskoye mashinostroyeniye. *Omsk Scientific Bulletin. Series Aviation-Rocket and Power Engineering*. 2019. Vol. 3, no. 2. P. 150–155. DOI: 10.25206/2588-0373-2019-3-2-150-155. (In Russ.).
10. Narayan S., Bholanath B., Sundararajan T. [et al.]. Acoustic Heating Effects in Hartmann Whistle // *International Journal of Aeroacoustics*. 2013. Vol. 121 (5-6). P. 557–578. DOI: 10.1260/1475-472X.12.5-6.557. (In Engl.).
11. Zapryagaev V., Kiselev N., Gubanov D. Shock-wave structure of supersonic jet flows // *Aerospace*. 2018. Vol. 5 (2). DOI: 10.3390/aerospace5020060. (In Engl.).
12. Emel'yanov V. N., Tetarina J. V., Volkov K. N. [et al.]. Pressure oscillations and instability of working processes in the combustion chambers of solid rocket motors // *Acta Astronautica*. 2017. Vol. 135. P. 161–171. DOI: 10.1016/j.actaastro.2016.09.029. (In Engl.).
13. Krasnov N. F., Koshevoy V. N., Kalugin V. T. Aerodinamika otrvnykh techeniy [Separated flow aerodynamics]. Moscow, 1988. 351 p. ISBN 5-06-001196-8. (In Russ.).
14. Idel'chik I. E. Spravochnik po gidravlicheskim soprotivleniyam [Handbook of hydraulic resistances]. Moscow, 1975. 559 p. (In Russ.).
15. Abramovich G. N. Prikladnaya gazovaya dinamika [Applied gas dynamics]. Moscow, 1969. 824 p. (In Russ.).

**KUZNETSOV Viktor Ivanovich**, Doctor of Technical Sciences, Professor of Aviation and Rocketry Department, Omsk State Technical University (OmSTU), Omsk.  
SPIN-code: 1763-0468





AuthorID (RSCI): 161955

ResearcherID: N-9618-2016

Correspondence address: vik.kuznetsov@yandex.ru

**MAKAROV Vladimir Vyacheslavovich**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of Aviation and Rocketry Department, OmSTU, Omsk.

SPIN-code: 9846-7090

AuthorID (SCOPUS): 57193513945

ResearcherID: R-6939-2018

Correspondence address: kosmos070969@mail.ru

#### For citations

Kuznetsov V. I., Makarov V. V. Physical and mathematical model of working process of the Hartmann-Sprenger tube // Omsk Scientific Bulletin. Series Aviation-Rocket and Power Engineering. 2022. Vol. 6, no. 1. P. 92–100. DOI: 10.25206/2588-0373-2022-6-1-92-100.

**Received December 08, 2021.**

© **V. I. Kuznetsov, V. V. Makarov**