

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК АНГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ДУФФИНГА

Б. А. Калашников¹, В. В. Бохан^{1,2}, В. Е. Смолко¹

¹Омский государственный технический университет,
Россия, 644050, г. Омск, пр. Мира, 11

²АО «Федеральный научно-производственный центр «Прогресс»,
Россия, 644018, г. Омск, ул. 5-я Кордная, 4

В статье приведены экспериментальные осциллограммы явлений бифуркации в слабодемпфированном вязким трением осцилляторе Дуффинга. Точки бифуркации находятся путём численного решения гармонически линеаризованного уравнения движения относительно квадрата частоты и квадрата амплитуды. Предложены приближённые безразмерные выражения для амплитуд и соответствующих им частот в точках бифуркации. Приведено сравнение экспериментальных и теоретических амплитудно-частотных характеристик и их значений в этих точках.

Ключевые слова: осциллятор Дуффинга, степень нелинейности, гармоническая линеаризация, коэффициент относительного затухания, амплитудно-частотная характеристика, амплитуда и частота точек бифуркации, точки перескоков.

1. Введение

Осциллятор Дуффинга — одна из основных моделей нелинейной динамики [1; 2, с. 161] — изучается более 100 лет. В этой системе возникает «замечательное явление» [3, с. 241] — скачки амплитуды при квазистационарном изменении частоты. При увеличении её от нуля до некоторого значения происходит срыв амплитуды колебаний (скачок) с верхней ветви резонансной кривой на нижнюю. При уменьшении частоты от некоторого значения, превышающего в несколько раз частоту срыва вниз, амплитуда скачком увеличивается до значения на верхней ветви резонансной кривой. Возникающие разрывы рассматриваются как бифуркации седло-узлов типа [4], когда управляющий параметр — частота возбуждения — принимает критические значения в решении кубического уравнения относительно квадрата амплитуды колебаний или квадратного уравнения относительно квадрата частоты возбуждения [5]. Бифуркации являются нежелательными в ряде технических устройств, например, в мембранно-ленточном регуляторе паровых турбин [6, 7]. В работе [8] указывается, что нелинейные явления часто воспринимаются как опасные с общей тенденцией избегать или контролировать их. Это привело к поиску различных подходов и инструментов, разрабатываемых для ограничения возможных вредных последствий таких явлений.

В работах [1, с. 170; 9, с. 233] приведены поверхности амплитуды колебаний в функции амплитуды и частоты силы возбуждения, построенные при некоторых значениях коэффициента относительного затухания. В трёхмерном пространстве параметров явление перескока называется катастрофой типа складки. На этих поверхностях при некоторых сочетаниях амплитуды силы возбуждения и её частоты наблюдается предсказанное теорией существование трёх амплитуд колебаний. Аналитические

выражения для амплитуд и частот перескока в работах [1, 3, 9] получены не были.

Такие выражения, полученные методом многих масштабов, приведены в работе [4] и методом гармонического баланса в работе [10]. Они найдены в предположении, что квадрат коэффициента относительного затухания существенно меньше единицы.

В данной статье установлено, что эти результаты эквивалентны разложению квадрата безразмерной частоты возбуждения в ряд Тейлора в окрестности нулевого значения квадрата этого коэффициента. В статье [10] установлена эквивалентность результатов работ [4] и [10], причём в [4] отмечается, что для нелинейностей более высокого порядка требуется более общий и простой метод, в качестве которого предлагается использовать метод результатов Сильвестра [11].

В данной статье решено не только квадратное уравнение относительно квадрата частоты возбуждения, но и кубичное относительно квадрата амплитуды, что позволило дать оценку точности формул для параметров перескоков. Основная цель предлагаемой работы — получение выражений для амплитуд и частот перескоков без предположения о малости коэффициента относительного затухания, подтверждение их экспериментально и сравнение с результатами работы [10].

2. Экспериментальная часть

2.1. Экспериментальный стенд.

Установка представляет собой тележку массой $m = 3...10$ кг, которая может перемещаться только в горизонтальном направлении в пределах $\pm 0,2$ м. Длина вертикальной недеформируемой пружины жёсткостью $c = 10000 \frac{H}{м}$ меньше постоянного расстояния $l = 0,3$ м между опорными подшипниками

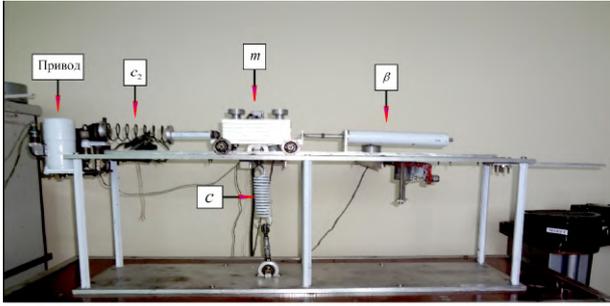


Рис. 1. Общий вид экспериментального стенда
Fig. 1. General scheme of experimental stand

на величину начального натяжения $s = 0..0,03$ м; жёсткость боковой пружины $c_2 = 1200 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ (рис. 1).

Демпфирующий элемент β условно представляет собой непотенциальные силы, возникающие при колебаниях массы m за счёт внутреннего трения в материале пружин, конструкционного трения и сопротивления воздуха. Характеристика диссипативной силы, создаваемой этими факторами, представляется в виде $f(\dot{x}) = \beta_0 \dot{x} + \beta_1 \dot{x} + \beta_2 |\dot{x}| \dot{x}$ — суммы сухого, линейного и квадратичного трения. Коэффициент эквивалентного вязкого линейного трения, найденный методом энергетического баланса, составляет величину $\beta \cong 4,4 \frac{\text{Н}}{\text{м/с}}$ [12]. Гармоническое кинематическое возбуждение $y = a_y \cos \omega t$ постоянной амплитуды $a_y = 0,008$ м в диапазоне частот $0..40 \text{ с}^{-1}$ создаётся электромеханическим приводом.

Измерение обобщённой координаты (ОК) x производится датчиком потенциометрического типа с последующей записью её через мостовую схему и многофункциональную плату аналогового и цифрового ввода/вывода ЛА-70М4 на жёсткий диск компьютера с последующей обработкой в пакете *Maple*.

Установка позволяет изучать и другие задачи линейной и нелинейной динамики. Например, получать экспериментальные данные по частотам и формам главных колебаний механической системы (МС) с двумя степенями свободы или определять коэффициенты $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ нелинейной функции демпфирования $f(\dot{x})$.

В схеме экспериментального стенда, необходимой для математического моделирования явлений перескока, линейная жёсткость боковой пружины $c_2 = kc, k > 0, \beta$ — эквивалентный коэффициент неупругого сопротивления (рис. 2).

2.2. Результаты эксперимента.

В ходе эксперимента выполнялась запись на жёсткий диск компьютера 19-ти осциллограмм на дискретных частотах кинематического возбуждения на интервалах времени 5..8 с с шагом дискретизации $\sim 0,02$ с. Отсчёты перемасштабировались в пакете *Maple* и выводились на печать; частота возбуждения находилась как $\omega = \frac{2\pi}{T_{av}}$, где период находился как среднее максимального их числа на интервале времени записи.

Типичные осциллограммы на безразмерных частотах $\omega \equiv \frac{\omega}{\omega_c} = 0,67; 1,056; 1,157; 1,365; 1,11$ приведены на рис. 3–7 ($\omega_c = \frac{c_1 + c_2}{m} = 20,7 \text{ с}^{-1}$ — собственная частота системы; $c_1 = c \frac{s}{l} = 10000 \cdot \frac{0,009}{0,3} = 300 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$).

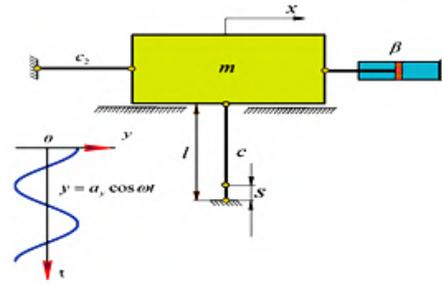


Рис. 2. Динамическая модель механической системы типа Дуффинга; длина недеформированной пружины $l-s$
Fig. 2. Dynamic model of a mechanical system of the Duffing type; length of the undeformed spring $l-s$

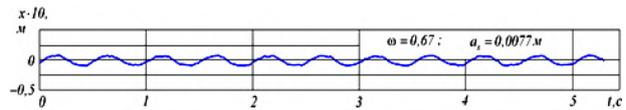


Рис. 3. В дорезонансной зоне колебаний на безразмерной частоте возбуждения № 1

$$\omega = 0,67 < \omega_d = 1,21$$

Fig. 3. In the pre-resonance oscillation zone at dimensionless excitation frequency № 1

$$\omega = 0,67 < \omega_d = 1,21$$

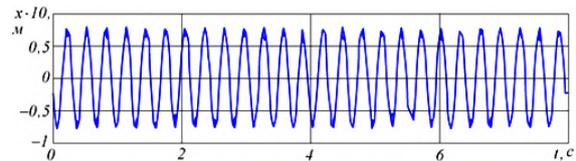


Рис. 4. В дорезонансной зоне колебаний на частоте возбуждения № 5

$$\omega = 1,056 < \omega_d = 1,21; a_x = 0,0768 \text{ м}$$

Fig. 4. In the pre-resonance oscillation zone at dimensionless excitation frequency № 5

$$\omega = 1,056 < \omega_d = 1,21; a_x = 0,0768 \text{ м}$$

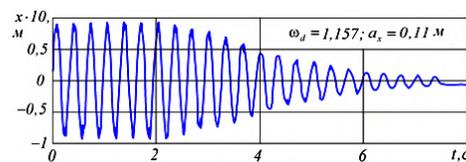


Рис. 5. На частоте перескока вниз № 9
Fig. 5. At the jump-down frequency № 9

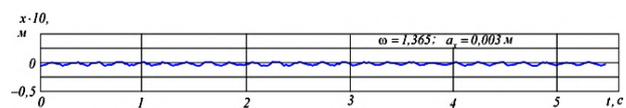


Рис. 6. В зарезонансной зоне колебаний на частоте возбуждения № 19

$$\omega \cong 1,365 > \omega_d = 1,11$$

Fig. 6. In the post-resonance oscillation zone at excitation frequency № 19

$$\omega \cong 1,365 > \omega_d = 1,11$$

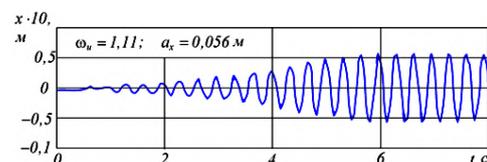


Рис. 7. На частоте перескока вверх № 17
Fig. 7. At the jump-up frequency № 17

На осциллограммах: a_x — амплитуда колебаний; ω_d, ω_u — безразмерные частоты перескоков вниз и вверх.

Достаточно сильное возмущение осциллятора в до- и зарезонансных зонах колебаний не приводит к перескокам: после непродолжительного переходного процесса колебания возвращаются к невозмущённому стационарному состоянию.

3. Математическое моделирование

Потенциал осциллятора Дуффинга с натяжением вертикальной пружины (рис. 2)

$$V = \frac{1}{2} \frac{c(\sqrt{x^2 + l^2} - l + s)^2 - cs^2 + kcx^2}{cl^2}. \quad (1)$$

Перемасштабируя с использованием обобщённой координаты $x \equiv \frac{X}{l}$ и натяжения $S \equiv \frac{S}{l}$ точный потенциал (1), получим

$$V = \frac{1}{2}(1+k)x^2 + (s-1)(\sqrt{x^2+1}) - 1. \quad (2)$$

Дифференцируя (2), по ОК x , получим точную характеристику восстанавливающей силы

$$f = \left(1 - \frac{1-s}{\sqrt{1+x^2}} + k\right)x. \quad (3)$$

Раскладывая (2) в ряд по степеням ОК x и удерживая члены не выше 4-й степени, получим приближённое выражение для потенциала МС (рис. 8)

$$V = \frac{1}{2}(s+k)x^2 + \frac{1}{8}(1-s)x^4. \quad (4)$$

Дифференцируя (4), найдём выражения для безразмерной позиционной силы

$$f = \frac{dV}{dx} = (s+k)x + \frac{1-s}{2}x^3 \equiv c_1x + c_3x^3 \quad (5)$$

и безразмерной нелинейной жёсткости

$$c_{nl} = \frac{d^2V}{dx^2} = c_1 + 3c_3x^2, \quad (6)$$

где

$$c_1 = s + k, \quad c_3 = \frac{1-s}{2}. \quad (7)$$

Если $s = 0$, то из (5) следует, что позиционная сила в особой точке векторного поля — центре — с координатой $x_c = 0$ равна нулю $f = 0$, а $c_{nl} = c_1$ — линейной жёсткости динамической модели на рис. 8.

С использованием безразмерной координаты $x \equiv \frac{X}{l}$ уравнение вынужденного движения линейно демпфированного осциллятора (рис. 2) при гармоническом возбуждении запишется в виде

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + c(s+k)x + c\frac{1-s}{2}x^3 = cka_y \cos \omega t. \quad (8)$$

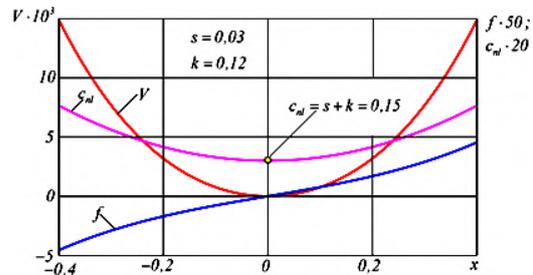


Рис. 8. Потенциал (4), восстанавливающая сила (5) и нелинейная жёсткость (6)

Fig. 8. Potential (4), restoring force (5), and nonlinear stiffness (6)

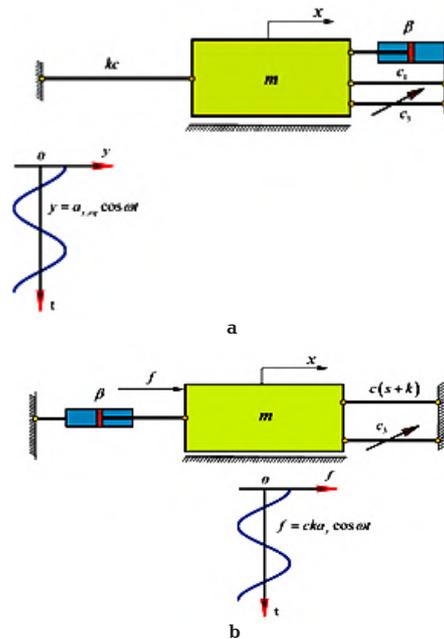


Рис. 9. Нелинейные динамические модели осциллятора Дуффинга:

a — при кинематическом возбуждении;
b — при эквивалентном силовом возбуждении

Fig. 9. Nonlinear dynamic models of the Duffing oscillator:

a — under kinematic excitation;
b — under equivalent force excitation

Уравнение (8) соответствует модели на рис. 9.

Вводя с использованием собственной частоты в особой точке векторного поля (8) — центре

$$\omega_c = \sqrt{\frac{c(s+k)}{m}} \quad (9)$$

безразмерное собственное время системы $\tau = \omega_{cl}t$, безразмерные скорость $x' = \frac{\dot{x}}{\omega_c}$ и ускорение $x'' = \frac{\ddot{x}}{\omega_c^2}$ и подставляя их в (8), получим уравнение движения в безразмерном виде

$$x'' + 2\zeta x' + 1 \cdot x + \epsilon x^3 = a_{y,eq} \cos \omega \tau, \quad (10)$$

где $\zeta = \frac{\beta}{2m\omega_c}$ — коэффициент относительного затухания;

$\epsilon = \frac{1-s}{2(s+k)} \equiv \frac{c_3}{c_1}$ — коэффициент, характеризующий степень нелинейности восстанавливающей силы; c_1 и c_3 определяются по (7);

$\omega \equiv \frac{\omega}{\omega_c} k$ — безразмерная частота возбуждения;
 $a_{y,eq} = \frac{\omega_c}{s+k} a_y$ — эквивалентная амплитуда кинематического возбуждения.

В производных x' и x'' штрихи означают дифференцирование безразмерного x по безразмерному времени τ .

Единица перед линейным членом восстанавливающей силы в (10); есть квадрат безразмерной собственной частоты системы, что обусловлено соответствующим введением собственного времени τ .

Безразмерная амплитуда восстанавливающей силы в (10) найдётся как сумма амплитуд линейной восстанавливающей силы и гармонически линеаризованного кубического члена ϵx^3

$$a_f(a_x) = 1 \cdot a_x + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \epsilon (a_x \cos \psi)^3 \cos \psi d\psi = a_x + \frac{3}{4} \epsilon a_x^3,$$

где $\psi = \omega \tau$ — фаза колебаний.

Квадрат безразмерной частоты свободных колебаний найдётся как

$$\omega_f^2(a_x) = \frac{a_f}{a_q} = 1 + \frac{3}{4} \epsilon a_x^2. \quad (11)$$

Теперь линеаризованное уравнение движения (10) можно переписать в виде

$$x'' + 2\zeta x' + \omega_f^2(a_x) x = a_{y,eq} \cos \omega \tau.$$

По форме это уравнение отличается от линейного только тем, что в нём вместо единицы — квадрата *собственной* частоты при ОК x — вписан множитель $\omega_f^2(a_x)$ — квадрат частоты *свободных* колебаний линеаризованной системы. Поэтому можно воспользоваться выражениями для амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) линейной системы [3, с. 108; 13], заменив в них единицу на $\omega_f^2(a_x)$. Для модели на рис. 9 при возбуждении за боковую пружину её АЧХ абсолютных перемещений записывается в виде

$$W_{x-y}(\omega) = \frac{a_q}{a_{y,eq}} = \frac{1}{\sqrt{[\omega_f^2(a_x) - \omega^2]^2 + 4\zeta^2 \omega^2}}. \quad (12)$$

Поскольку частота свободных колебаний $\omega_f(a_x)$ зависит от неизвестной амплитуды абсолютных колебаний a_x , то, в отличие от выражения для линейной МС, соотношение (12) есть не формула для АЧХ, а уравнение для нахождения амплитуды a_x .

Возведём обе части АЧХ (12) в квадрат. Получим неявную зависимость амплитуды a_x от частоты возбуждения ω :

$$a_x^2 \{ [\omega_f^2(a_x) - \omega^2]^2 + 4\zeta^2 \omega^2 \} = a_{y,eq}^2. \quad (13)$$

По (11) квадрат частоты свободных колебаний $\omega_f^2(a_x)$ изменяется как a_x^2 , поэтому (13) является кубическим относительно квадрата амплитуды a_x^2 . Решив (13), можно получить АЧХ абсолютных колебаний.

Однако в рассматриваемом случае поступим иначе: найдём зависимость частоты возбуждения от амплитуды $\omega = \omega(a_x)$, т. к. (13) является квадратным относительно ω^2 и поэтому решается элемен-

тарно. Подставив (11) в (13), получим биквадратное уравнение

$$\omega^4 - 2 \left(1 + \frac{3}{4} \epsilon a_x^2 - 2\zeta^2 \right) \omega^2 + \left[\left(1 + \frac{3}{4} \epsilon a_x^2 \right)^2 - \frac{a_{y,eq}^2}{a_x^2} \right] = 0.$$

Выражения для двух корней последнего уравнения имеют вид

$$\omega_{1,2}^2 = \left(1 + \frac{3}{4} \epsilon a_x^2 - 2\zeta^2 \right) \pm \sqrt{\frac{a_{y,eq}^2}{a_x^2} - 4\zeta^2 \left(1 + \frac{3}{4} \epsilon a_x^2 - \zeta^2 \right)}. \quad (14)$$

Если из МС удалить вертикальную пружину, то коэффициенты выражения для корней (14) примут вид

$$\omega_{1,2}^2 = (1 - 2\zeta^2) \pm \sqrt{\frac{a_y^2}{a_x^2} - 4\zeta^2(1 - \zeta^2)}.$$

Они могут быть получены непосредственно из АЧХ линейной системы

$$W_{x-y}(\omega) \equiv \frac{a_q}{a_y} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2}}$$

при её возбуждении за пружину. Рассматривая это выражение как уравнение и решая его относительно квадрата частоты возбуждения, получим

$$\omega_{1,2}^2 = (1 - \zeta^2) \pm \sqrt{\frac{a_y^2}{a_x^2} - 4\zeta^2(1 - \zeta^2)}.$$

Первое слагаемое $(1 - \zeta^2)$ есть абсцисса максимума АЧХ абсолютных перемещений. При этом следует иметь в виду, что при переходе к линейной системе произойдёт увеличение коэффициента относительного затухания ζ из-за уменьшения жёсткости $c(s+k)$, т. к. надо положить натяжение вертикальной пружины $s = 0$.

4. Результаты теоретического и экспериментального определения параметров особенностей АЧХ

Квадратный корень из первого слагаемого в (14)

$$\omega_f(a_x) = \sqrt{1 + \frac{3}{4} \epsilon a_x^2 - 2\zeta^2} \quad (15)$$

есть скелетная кривая МС (линия 1 на рис. 10), незначительно смещённая малым линейным демпфированием влево. Второе слагаемое определяет величины отклонений вправо и влево от скелетной кривой (ветви АЧХ на рис. 10).

Перейдём к теоретическому определению выражений для частот и амплитуд перескоков (рис. 10). Квадрат частоты возбуждения ω_a^2 , на которой обе ветви АЧХ смыкаются и происходит срыв вниз, находится при обращении подкоренного выражения в (14) в нуль

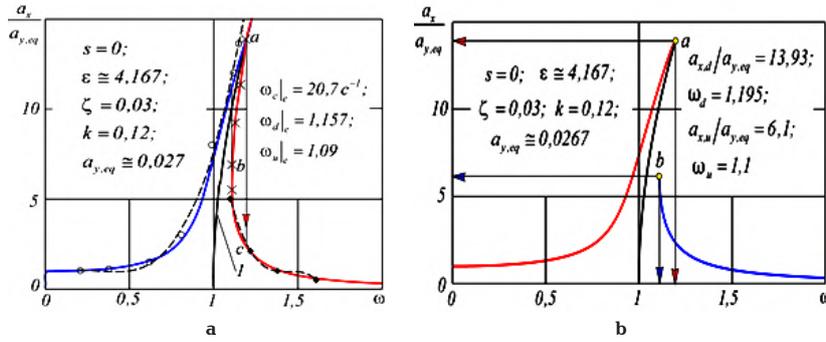


Рис. 10. а — АЧХ МС на рис. 9а по (14) (сплошная кривая); аппроксимация экспериментальных точек «амплитуда–частота» по методу наименьших квадратов (штриховая); кружков на левой ветви, ромбов на правой ветви, кресты — точки неустойчивых амплитуд; 1 — скелетная кривая по (15); б — АЧХ по (13)
 Fig. 10. The amplitude-frequency response (AFR) of the MS in Fig. 9a according to (14) (solid curve); approximation of experimental «amplitude-frequency» points using the least squares method (dashed): circles on the left branch, diamonds on the right branch, crosses — points of unstable amplitudes; 1 — backbone curve according to (15); б — AFR according to (13)

$$\omega_d^2 = \frac{a_{y,eq}^2}{a_x^2} - 4\zeta^2 \left(1 + \frac{3}{4} \varepsilon a_x^2 - \zeta^2 \right) = 0.$$

Решая это уравнение относительно амплитуды, найдём её максимальное значение на частоте ω_d

$$a_{x,d} = \left[-\frac{2(1-\zeta^2)}{3\varepsilon} + \sqrt{\frac{4(1-\zeta^2)^2}{9\varepsilon^2} + \frac{a_{y,eq}^2}{3\varepsilon\zeta^2}} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (16)$$

При равном нулю демпфировании ($\zeta = 0$) амплитуда колебаний $a_{x,max} = \infty$.

Подставляя (16) в выражение для квадрата скелетной кривой (15), получим частоту перескока на нижнюю ветвь АЧХ при увеличении частоты возбуждения от нуля

$$\omega_d = \left[1 - 2\zeta^2 + \frac{1-\zeta^2}{2\varepsilon} \left[\left(1 + \frac{3\varepsilon a_{y,eq}^2}{4\zeta^2(1-\zeta^2)} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (17)$$

На нижней ветви АЧХ при уменьшении частоты возбуждения до нуля демпфирование несущественно влияет на параметры нижней точки бифуркации — частоту и амплитуду перескока вверх [3, 4]. В связи с этим при $\zeta = 0$ в (14) зависимость частоты возбуждения от амплитуды на правой ветви АЧХ примет вид

$$\omega_1 = \left(1 + \frac{3}{4} \varepsilon a_x^2 + \frac{a_{y,eq}}{a_x} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (18)$$

Знак (+) перед корнем в (14) выбран в связи с тем, что для правой ветви к скелетной кривой необходимо прибавлять слагаемое, обусловленное возбуждением.

Дифференцируя ω_1 по амплитуде a_x и приравняв производную нулю $\frac{d\omega_1}{da_x} = 0$, найдём значение амплитуды перескока вверх

$$a_{x,u} \approx 0,874 \sqrt[3]{\frac{a_{y,eq}}{\varepsilon}}. \quad (19)$$

Таблица 1. К сравнительному анализу теоретических и экспериментальных значений особенностей АЧХ
 Table 1. To the comparative analysis of theoretical and experimental values of the features of the AFR

Пере-скок	АЧХ, частота	Значение АЧХ по (16), (19), частот по (17), (20)	Значения АЧХ, эксперимент	Погрешность, %
Вниз	$a_{x,d}/a_{y,eq}$	13,93	13,83	-0,7
	ω_d	1,20	1,157	-9,2
Вверх	$a_{x,u}/a_{y,eq}$	6,08	5	-21,5
	ω_u	1,12	1,09	-2,4

Частоту перескока вверх найдём, подставляя (19) в выражение для правой ветви АЧХ (18),

$$\omega_u \approx \left(1 + 0,572 \frac{\sqrt[3]{a_{y,eq}^2 \varepsilon^4}}{\varepsilon^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (20)$$

Подставляя в (16), (17), (19), (20) параметры МС $\varepsilon \approx 4,167$, $\zeta \approx 0,03$ и возбуждения $a_{y,eq} \approx 0,0267$, получим амплитуды и частоты перескока вниз и вверх. Разделив амплитуды $a_{x,d}$ и $a_{x,u}$ на амплитуду кинематического возбуждения $a_{y,eq}$ получим АЧХ (табл. 1).

К сравнительному анализу теоретических и экспериментальных значений особенностей АЧХ

Приведенные в табл. 1 значения для особенностей АЧХ практически совпадают с численным решением уравнения (14) относительно квадрата амплитуды и квадрата частоты.

5. Обсуждение результатов

1. Незначительные отклонения частот перескоков в сторону увеличения от собственной частоты линейной системы обусловлены начальным натяжением и установкой боковой пружины, оказывающих линеаризующее действие. Незначительная разница частот ω_d и ω_u обусловлена пренебрежением демпфированием при выводе формулы для ω_u , которое в этом случае не смещает ω_u в сторону меньших частот.

2. АЧХ, полученная разложением (14) в ряд Тейлора в окрестности $\zeta^2 = 0$, как в [10], даёт значение $\frac{a_{x,d}}{a_{y,eq}} \cong 18$, что превышает экспериментальное значение (табл. 1) примерно на 30 %; при этом частота перескока вниз ω_d практически не изменилась. Выполнять аналогичную процедуру для параметров перескока вверх на правой ветви АЧХ не имеет смысла, т. к. формулы (19), (20) получены при коэффициенте относительного затухания $\zeta = 0$. Таким образом, разложение в ряд даёт меньшую точность для параметров перескока вниз даже при небольшом демпфировании.

3. Значения амплитуд и частот точек перескока, полученные решением кубического уравнения относительно квадрата амплитуды $\frac{a_{x,d}}{a_{y,eq}} \cong 13,89$, $\omega_d = 1,2$ и $\frac{a_{x,u}}{a_{y,eq}} \cong 6,2$, $\omega_u = 1,2$, показывают, что предлагаемые формулы (16), (17) и (19), (20) дают погрешность по амплитуде и частоте вниз $\sim 0,3\%$ и $\sim 12,5\%$, а по амплитуде и частоте вверх $\sim 1,6\%$, $\sim 9\%$ соответственно.

6. Выводы

1. Получены выражения для параметров перескоков без предположения о малости коэффициента относительного затухания с погрешностью не более $\sim 1,6\%$ по амплитудам и не более $\sim 12,5\%$ по частотам.

2. Экспериментально подтверждена допустимость применения предложенных формул с погрешностью порядка $\sim 20\%$.

3. Формулы для параметров перескока вниз, полученные с использованием разложения в ряд по степеням квадрата относительного коэффициента затухания, незначительно упрощают соответствующие выражения, полученные без использования предположения о малости. Погрешность при расчёте амплитуды перескока вниз с использованием разложения в ряд составляет $\sim 30\%$. Значение частоты перескока вниз при этом практически не изменилось.

Список источников

1. Duffing G. Erzwungene Schwingungen bei veranderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung. Vieweg, Braunschweig, 1918. 134 S. DOI: 10.1002/zamm.19210010109.
2. Nayfeh A. H., Mook D. T. Nonlinear Oscillations. Wiley, New York, 1979, 718 p.
3. Магнус К. Колебания: Введение в исследование колебательных систем: пер. с нем. Москва: Мир, 1982. 304 с.
4. Malatkar P., Nayfeh A. H. Calculation of the jump frequencies in the response of a s.d.o.f. non-linear systems // Journal of Sound and Vibration. 2002. Vol. 254 (5). P. 1005–1011. DOI: 10.1006/jsvi.2001.4104.
5. Markakis M. P. The jump phenomenon associated with the dynamics of the duffing equation // Physics Open. 2020. Vol. 5. 100042. DOI: 10.1016/j.physo.2020.100042.
6. Веллер В. Н. Регулирование и защита паровых турбин. Москва: Энергоатомиздат, 1985. 104 с.
7. Кириллов И. И. Автоматическое регулирование паровых турбин и газотурбинных установок. Ленинград: Машиностроение, 1988. 447 с.

8. Ramlan R., Brennan M. J., Kovacic I. [et al.]. Exploiting knowledge of jump-up and jump-down frequencies to determine the parameters of a Duffing oscillator // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2016. Vol. 37. P. 282–291. DOI: 10.1016/j.cnsns.2016.01.017.

9. Jordan D. W., Smith P. Nonlinear ordinary differential equations. 4th ed., Oxford: University Press, 2007. 560 p. ISBN 978-0-19-920824-1; ISBN 978-0-19-920825-8.

10. Brennan M. J., Kovacic I., Carrella A. [et al.]. On the jump-up and jump-down frequencies of the Duffing oscillator // Journal of Sound and Vibration. 2008. Vol. 318. P. 1250–1261. DOI: 10.1016/j.jsv.2008.04.032.

11. Chionh E., Goldman R. Elimination and resultants. Part 1: Elimination and bivariate resultants // IEEE Computer Graphics and Applications. 1995. Vol. 15, Issue 1. P. 69–77. DOI: 10.1109/38.364967.

12. Калашников Б. А., Бохан В. В., Пеньков К. В. Экспериментальное определение нелинейной функции демпфирования механических систем // Омский научный вестник. 2024. № 3 (191). С. 5–13. DOI: 10.25206/1813-8225-2024-191-5-13. EDN: GRFNGU.

13. Калашников Б. А. Прикладные методы теории колебаний в расчётах механических систем и конструкций. Омск: Изд-во ОмГТУ, 2022. 238 с. ISBN 978-5-8149-3570-0. EDN: HAJSQP.

КАЛАШНИКОВ Борис Александрович, доктор технических наук, доцент (Россия), профессор кафедры «Авиа- и ракетостроение» Омского государственного технического университета (ОмГТУ), г. Омск.

SPIN-код: 7574-1323

ORCID: 0000-0002-9946-3480

AuthorID (SCOPUS): 6701318766

ResearcherID: M-9643-2014

Адрес для переписки: bkalashnikov1@yahoo.com

БОХАН Владимир Викторович, кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры «Основы теории механики и автоматического управления» ОмГТУ, г. Омск; старший научный сотрудник АО «Федеральный научно-производственный центр «Прогресс», г. Омск.

SPIN-код: 3625-7966

AuthorID (РИНЦ): 747705

ORCID: 0000-0003-0690-381X

Researcher ID: P-3030-2017

Адрес для переписки: vladimir_bohan@mail.ru

СМОЛКО Валерия Евгеньевна, магистрант гр. СММ-241 факультета транспорта, нефти и газа ОмГТУ, г. Омск.

SPIN-код: 6112-9457

ORCID: 0009-0007-0117-4271

Адрес для переписки: smolko.valeria143@gmail.com

Для цитирования

Калашников Б. А., Бохан В. В., Смолко В. Е. Экспериментально-теоретическое исследование особенностей амплитудно-частотных характеристик ангармонического осциллятора Дуффинга // Омский научный вестник. Сер. Авиационно-ракетное и энергетическое машиностроение. 2024. Т. 8, № 3. С. 13–20. DOI: 10.25206/2588-0373-2024-8-3-13-20.

Статья поступила в редакцию 03.08.2024 г.

© Б. А. Калашников, В. В. Бохан, В. Е. Смолко

EXPERIMENTAL AND THEORETICAL STUDY OF THE FEATURES OF THE AMPLITUDE-FREQUENCY RESPONSE FEATURES OF THE ANHARMONIC DUFFING OSCILLATOR

B. A. Kalashnikov¹, V. V. Bokhan^{1,2}, V. E. Smolko¹

¹Omsk State Technical University,
Russia, Omsk, Mira Ave., 11, 644050

²JSC «Federal Research and Production Center «Progress»,
Russia, Omsk, 5th Kordnaya St., 4, 644018

In this paper, experimental waveforms of the bifurcation phenomena in a Duffing oscillator weakly damped by viscous friction. The bifurcation points are found by solving the numerical solution of a harmonically linearized system with respect to the square of the frequency and the square of the amplitude. Approximate dimensionless expressions for amplitudes and their corresponding frequencies at the bifurcation points are proposed. The comparison of experimental and theoretical amplitude-frequency characteristics and their values at these points is given.

Keywords: Duffing oscillator, degree of nonlinearity, harmonic linearization, relative attenuation coefficient, amplitude-frequency response, amplitude and frequency of bifurcation points, jump points.

References

1. Duffing G. *Erzwungene Schwingungen bei veranderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung* [Forced Oscillations with Variable Natural Frequency and their Technical Significance]. Vieweg, Braunschweig, 1918. 134 s. DOI: 10.1002/zamm.19210010109. (In Germ.).
2. Nayfeh A. H., Mook D. T. *Nonlinear Oscillations*. Wiley, New York, 1979, 718 p. (In Engl.).
3. Magnus K. *Kolebaniya: Vvedeniye v issledovaniye kolebatel'nykh sistem: per. s nem.* [Introduction to the Investigation of oscillatory systems: trans. from Germ.]. Moscow, 1982. 304 p. (In Russ.).
4. Malatkar P., Nayfeh A. H. Calculation of the jump frequencies in the response of a s.d.o.f. non-linear systems // *Journal of Sound and Vibration*. 2002. Vol. 254 (5). P. 1005–1011. DOI: 10.1006/jsvi.2001.4104. (In Engl.).
5. Markakis M. P. The jump phenomenon associated with the dynamics of the duffing equation // *Physics Open*. 2020. Vol. 5. 100042. DOI: 10.1016/j.physo.2020.100042. (In Engl.).
6. Veller V. N. *Regulirovaniye i zashchita parovykh turbin* [Regulation and protection of steam turbines]. Moscow, 1985. 104 p. (In Russ.).
7. Kirillov I. I. *Avtomaticheskoye regulirovaniye parovykh turbin i gazoturbinykh ustanovok* [Automatic control of steam turbines and gas turbine installations]. Leningrad, 1988. 447 p. (In Russ.).
8. Ramlan R., Brennan M. J., Kovacic I. [et al.]. Exploiting knowledge of jump-up and jump-down frequencies to determine the parameters of a Duffing oscillator // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2016. Vol. 37. P. 282–291. DOI: 10.1016/j.cnsns.2016.01.017. (In Engl.).
9. Jordan D. W., Smith P. *Nonlinear ordinary differential equations*. 4th ed., Oxford: University Press, 2007. 560 p. ISBN 978-0-19-920824-1; ISBN 978-0-19-920825-8. (In Engl.).
10. Brennan M. J., Kovacic I., Carrella A. [et al.]. On the jump-up and jump-down frequencies of the Duffing oscillator // *Journal of Sound and Vibration*. 2008. Vol. 318. P. 1250–1261. DOI: 10.1016/j.jsv.2008.04.032. (In Engl.).
11. Chionh E., Goldman R. Elimination and resultants. Part 1: Elimination and bivariate resultants // *IEEE Computer Graphics and Applications*. 1995. Vol. 15, Issue 1. P. 69–77. DOI: 10.1109/38.364967. (In Engl.).
12. Kalashnikov B. A., Bokhan V. V., Penkov K. V. *Eksperimental'noye opredeleniye nelineynoy funktsii dempfirovaniya mekhanicheskikh sistem* [Determining the nonlinear damping function using experiments] // *Omskiy nauchnyy vestnik. Omsk Scientific Bulletin*. 2024. No. 3 (191). P. 5–13. DOI: 10.25206/1813-8225-2024-191-5-13. EDN: GRFNGU. (In Russ.).
13. Kalashnikov B. A. *Prikladnyye metody teorii kolebaniy v raschetakh mekhanicheskikh sistem i konstruksiy* [Applied methods of vibration theory in calculations of mechanical systems and structures]. Omsk: OmSTU Publ., 2022. 238 p. ISBN 978-5-8149-3570-0. EDN: HAJSQP. (In Russ.).

KALASHNIKOV Boris Aleksandrovich, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Professor of Aircraft and Rocket Building Department, Omsk State Technical University (OmSTU), Omsk.
SPIN-code: 7574-1323
ORCID: 0000-0002-9946-3480
AuthorID (SCOPUS): 6701318766
ResearcherID: M-9643-2014
Correspondence address: bkalashnikov1@yahoo.com
BOKHAN Vladimir Victorovich, Senior Lecturer of Fundamentals of Mechanics Theory and Automatic Control Department, OmSTU, Omsk; Senior Researcher, JSC «Federal Research and Production Center «Progress», Omsk.
SPIN-code: 3625-7966



AuthorID (RSCI): 747705
ORCID: 0000-0003-0690-381X
ResearcherID: P-3030-2017

Correspondence address: vladimir_bohan@mail.ru
SMOLKO Valeria Evgenyevna, Undergraduate, gr.
СММ-241 of Transport, Oil and Gas Faculty, OmSTU,
Omsk.

SPIN-code: 6112-9457

ORCID: 0009-0007-0117-4271

Correspondence address: smolko.valeria143@gmail.
com

For citations

Kalashnikov B. A., Bokhan V. V., Smolko V. E. Experimental and theoretical study of the features of the amplitude-frequency response features of the anharmonic Duffing oscillator // Omsk Scientific Bulletin. Series Aviation-Rocket and Power Engineering. 2024. Vol. 8, no. 3. P. 13–20. DOI: 10.25206/2588-0373-2024-8-3-13-20.

Received August 03, 2024.

© **B. A. Kalashnikov, V. V. Bokhan, V. E. Smolko**