

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 519.2:004.421.5:004.7

В. Н. ЗАДОРОВЫЙ

Омский государственный
технический университет

ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ТЯЖЕЛЫМИ ХВОСТАМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НА GPSS WORLD. МЕТОД ARAND

Рассматриваются проблемы построения адекватных математических моделей обслуживания фрактального трафика, актуальные для современной теории проектирования компьютерных сетей. Для решения проблемы корректной реализации распределений с тяжелыми хвостами предлагается метод ARAND (Accurate RAND). Выявляются дефекты механизма продвижения времени в GPSS World. Разрабатываются рекомендации по моделированию на GPSS фрактальных систем массового обслуживания.

Ключевые слова: фрактальный трафик, теория массового обслуживания, имитационное моделирование, генераторы случайных чисел.

1. Введение. Имитационное моделирование (ИМ) на GPSS World [1] систем массового обслуживания (СМО), характеризуемых распределениями с тяжелыми хвостами (РТХ), затрудняют следующие неочевидные, но серьезные проблемы:

— короткий период имеющихся в GPSS генераторов стандартных случайных чисел (ГСЧ), недостаточный для реализации длинных прогонов;

— дефекты механизма продвижения времени в GPSS, приводящие к некорректности оценок, получаемых при длинных прогонах;

— несовместимость разных ГСЧ при длинных прогонах;

— искажение РТХ при их реализации в ИМ [2].

Первые три проблемы всплывают и при моделировании на GPSS «классических» СМО,

характеризуемых распределениями с легкими хвостами (РАХ), если нужны длинные прогоны [3]. Проблема искажения РТХ характерна и для других систем ИМ, хотя проявляется в них менее заметно благодаря более высокой, чем в GPSS, разрядности используемых ГСЧ.

В статье приводятся результаты исследования вышеуказанных проблем и разрабатывается методика ИМ СМО с РТХ на GPSS World, обеспечивающая высокую точность получаемых оценок. Предлагается ГСЧ ARAND (Accurate RAND), обеспечивающий корректную реализацию РТХ в любых системах ИМ.

2. О длине периода генераторов случайных чисел GPSS. Встроенные в GPSS World ГСЧ, согласно [1], основаны «на мультипликативно-конгруэнтном алгоритме Лемера с максимальным периодом. Алгоритм генерирует псевдослучайные числа в открытом интервале от 0 до 2 147 483 647 и до самоповторения генерирует $2^{31} - 2 = 2\,147\,483\,646$ уникальных псевдослучайных чисел. Дополнительно в GPSS World используется шаг перемешивания». Однако несложные, хотя и трудоемкие эксперименты, выполненные на GPSS World, показали следующее.

1. Последовательность псевдослучайных чисел на выходе процедуры Uniform(1,0,1) — первого ГСЧ в GPSS World — начинает самоповторяться с числа номер 2 048 000 000 = $2^{11} \times 10^6$, т.е. длина его периода равна 2 047 999 999 = $8\,863 \times 743 \times 311$. Эти числа, как и указано в [1], принимают значения от 0,000000 до 0,999999 (все разряды дробной части после шестого равны нулю).

2. Периоды длиной 2 047 999 999 чисел имеют также ГСЧ Uniform(2,0,1), Uniform(3,0,1) и Uniform(4,0,1). Эти ГСЧ выдают последовательность чисел из одно-

го и того же направленного кольца (при этом номер j ГСЧ Uniform($j,0,1$) определяет, какой элемент кольца становится началом последовательности [1]).

Таким образом, сведения о ГСЧ GPSS World, приведенные в [1], не вполне соответствуют действительности. Но порядок длины периода ГСЧ указан верно.

Знание длины периода используемых ГСЧ необходимо для корректной организации длинных прогонов имитационных моделей.

3. Дефекты времени в GPSS World. В статье [3] приведены результаты моделирования на GPSS системы М/М/1 с интенсивностью входящего потока $\lambda = 1$ и коэффициентом загрузки $\rho = 0,9$. Средняя длина очереди $L = 8,1$ и среднее время ожидания $w = 8,1$ для этой системы известны точно. Результаты ИМ этой СМО при различной длине прогона, выраженной (средним) числом N заявок, поступающих за моделируемое время T_M , представлены в табл. 1.

Во второй строке таблицы приведены абсолютные погрешности полученных имитационных оценок \hat{w} времени w . В третьей (последней) строке приведена допустимая погрешность, соответствующая правилу трех сигм: она найдена методом, предложенным в [3] для выборки с коррелирующими элементами w_i . В GPSS-модели интервалы поступления и обслуживания заявок заданы блоками GENERATE (Exponential(1,0,1)) и ADVANCE (Exponential(1,0,0.9)). Реализующая экспоненциальную случайную величину (с.в.) функция Exponential($j,0,E$) использует очередное число, выдаваемое ГСЧ Uniform($j,0,1$) (обозначим его через z), преобразует его по формуле $x = -E \cdot \ln(z)$ (попадающиеся нулевые значения z пропускаются), и возвращает x .

Таблица 1

Результаты моделирования системы М/М/1 на GPSS World

Показатель	Число испытаний $N = \lambda T_M$				
	1 млн	10 млн	100 млн	1 млрд	2 млрд
Оценка среднего времени ожидания	8,332	8,061	8,087	8,043	7,799
Фактическая погрешность оценки	0,232	0,039	0,013	0,057	0,301
Допустимая погрешность («три сигмы»)	0,404	0,064	0,040	0,006	0,004

Таблица 2

Характеристики отрицательных значений времени ожидания

Абсолютное время AC1	Число случаев $w_i < 0$	Сумма всех $w_i < 0$	Среднее значение отрицательных w_i
1×10^8	344	-9,87597	-0,028709
2×10^8	4961	-294,378	-0,059338
3×10^8	23470	-2085,86	-0,088873
4×10^8	69841	-8161,87	-0,116864
5×10^8	161040	-23295,5	-0,144657
6×10^8	317228	-54594,3	-0,172098
7×10^8	557714	-110980	-0,198991
8×10^8	901127	-202575	-0,224802
9×10^8	1354436	-337396	-0,249104
10^9	1920013	-522135	-0,271943

```

GENERATE (Exponential(1,0,1))
ASSIGN 1,AC1
QUEUE 1
SEIZE 1
DEPART 1
SAVEVALUE 1+, ((AC1-P1)#(AC1<P1))
SAVEVALUE 2+, (AC1<P1)
ADVANCE (Exponential(1,0,0.9))
RELEASE 1
TERMINATE

GENERATE 100000000
SAVEVALUE W_NEG, (X1/X2)
TERMINATE 1

START 1
RESET
START 1
RESET
.....
START 1

```

Рис. 1. Программа, выявляющая наличие обратного хода времени в GPSS World

GENERATE	(Exponential(1,0,1))
QUEUE	1
SEIZE	1
DEPART	1
ADVANCE	(Exponential(1,0,0.9))
RELEASE	1
TERMINATE	
GENERATE	100000000
TERMINATE	1
START	1
CLEAR	
START	1
CLEAR	
.....	
START	1

Рис. 2. Метод увеличения объема выборки при ИМ СМО с РЛХ

Описанный М/М/1-тест показал, что, независимо от номера j применяемого ГСЧ, при длине прогона $N > 100 \div 200$ млн результаты ИМ некорректны (табл. 1), в соответствии с чем в [3] дана рекомендация такие прогоны не использовать.

Однако настоятельная необходимость длинных прогонов при ИМ СМО с РЛХ требует *выяснения причин* смещения оценок, возрастающего с ростом длины прогона (табл. 1). Выполненные для этого эксперименты (описанные ниже) привели к открытию малоприятного факта: механизм продвижения времени в GPSS World имеет скрытые дефекты.

На рис. 1 представлена программа, выполнение которой доказывает наличие дефектов времени в GPSS World. В ходе выполнения этой программы, моделирующей СМО М/М/1, ячейка 1 накапливает сумму всех *отрицательных значений* w_i времени ожидания транзактов. В ячейке 2 подсчитывается число отрицательных w_i . Среднее значение отрицательных w_i вычисляется в ячейке W_NEG. Значения ячеек выводятся после каждого из 10 отрезков длинного прогона, запускаемых командами START. В каждом отрезке прогона модельное время АС1 продвигается вперед на 100 млн единиц времени.

Результаты выполнения этой программы представлены в табл. 2.

Незначительное удлинение программы позволяет выяснить, что первый транзакт с отрицательным временем ожидания — это транзакт с номером 21 693 107. Он входит в очередь в момент модельного времени 21 693 041,901 257, затем выходит из нее в момент 21 693 041,894 325, который меньше времени входа на $\Delta_1 = 0,006\ 932$ (т.е. время «идет вспять»). Заметим, что в среднем отрицательные w_i растут (по модулю) пропорционально времени АС1 (табл. 2), а частота появления отрицательных w_i и модуль их суммы растут примерно пропорционально четвертой-пятой степени времени АС1. Наличие отрицательных w_i доказывает некорректность работы планировщика транзактов со списками событий. В целом же искажаются и положительные w_i . Эксперименты показывают, что вместе с длиной прогона растут искажения и других оценок вероятностно-временных характеристик (ВВХ): средней длины очереди, вероятности потери заявки (при ограниченной длине очереди) и т.д.

С внешними проявлениями описанного дефекта разработчики GPSS World, по-видимому, столкнулись, но сам дефект не распознали. Мы можем судить об этом по тому, например, как в [1] (с. 306)

смутно замечается, что использование команды RESET «может привести к некоторой систематической ошибке в области наименьших значений». Однако табл. 2 ясно показывает, что первые 344 отрицательных w_i появляются в нашем тесте задолго до выполнения первой команды RESET, так что она здесь ни при чем. Проверки показывают, что обратный ход времени не обусловлен также и погрешностями округления.

Экспериментально мы установили, что в AnyLogic [4] такого дефекта нет.

4. Реализация длинных прогонов при моделировании СМО с РЛХ. Объем выборки при моделировании СМО с РЛХ на GPSS World можно все же увеличить до пропускания через модель 1 млрд транзактов (т.е. до 2 млрд обращений к ГСЧ Uniform), не опасаясь ущерба от дефектов модельного времени. Для этого длинный прогон достаточно разбить командами CLEAR и START на 10 независимых прогонов умеренной длины, составляющей 100 млн транзактов, как это показано в варианте М/М/1-теста на рис. 2.

При этом дефекты модельного времени не успевают причинить заметный вред, поскольку абсолютное модельное время «своевременно» обнуляется командами CLEAR. Кроме того, благодаря быстрому затуханию переходных процессов (ПП) в СМО с РЛХ, все прогоны умеренной длины дают корректные оценки стационарных ВВХ. А так как эти оценки независимы, то, усредняя их, нетрудно оценивать точность получаемого при усреднении результата.

Например, погрешность получаемой таким образом итоговой оценки для w в СМО М/М/1 при $\rho = 0,9$ (см. рис. 2) находится в допустимых пределах. Отдельные 10 прогонов длины 100 млн единиц времени дают для w оценки $\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_{10} = 8,120, 8,070, 8,070, 8,111, 8,078, 8,134, 8,128, 8,113, 8,087, 8,118$. Каждая оценка отклоняется от точного значения 8,1 менее чем на максимально допустимую правилом трех сигм величину 0,04 (для прогонов такой длины). *Накапливаемые* по прогонам средние $\hat{W}_k = (1/k) \sum_{i=1}^k \hat{w}_i$, — это десять оценок $\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_{10} = 8,120, 8,095, 8,087, 8,093, 8,090, 8,097, 8,102, 8,103, 8,103, 8,101, 8,103$. Их отклонения от 8,1 также не превышают порогов, определяемых для них как $0,04/\sqrt{k}$. Метод можно применять при любом номере j ГСЧ (на рис. 2 $j = 1$).

В прогонах умеренной длины дефекты модельного времени на точности оценок стационарных ВВХ еще не сказываются. И уже не сказывается возобновление ПП после каждого CLEAR, поскольку в СМО с РЛХ ПП весьма непродолжительны. Однако для СМО с РЛХ этот метод может потребовать доработки, ведь в них даже при небольших ρ ПП могут длиться очень долго [5].

5. Несовместимость ГСЧ GPSS World в длинных прогонах. Можно попытаться увеличить длину прогона вдвое (до 2 млрд транзактов), затрачивая на каждый транзакт не два обращения к первому Uniform (по одному в блоках GENERATE и ADVANCE, см. рис. 2), а только одно, например, в блоке GENERATE; а в блоке ADVANCE обращаться ко второму Uniform.

На самом же деле, используя в программе на рис. 2 блоки GENERATE (Exponential(1,0,1)) и ADVANCE (Exponential(2,0,0.9)), мы, по причине некой *интерференции* последовательностей первого и второго Uniform, уже в первом прогоне (выполненном по первой команде START), получим для w неприемлемую оценку 7,898. Ее погрешность

$|7,898 - 8,1| = 0,202$ более чем в пять раз превышает максимально допустимую 0,04 (см. табл. 1 и рис. 2).

Множество дополнительных экспериментов показало, что в длинных прогонах любые ГСЧ GPSS World с разными номерами в общем случае несовместимы. При этом величина искажения результатов ИМ СМО из-за интерференции последовательностей разных ГСЧ зависит от средней длины очереди, от вероятностных распределений, задающих СМО, от ряда других факторов и в общем случае непредсказуема.

6. Реализация длинных прогонов при моделировании СМО с РТХ. При моделировании СМО с РТХ наиболее подходящей организацией имитационного эксперимента на GPSS становится реализация r независимых прогонов длины $N \leq 100$ млн заявок. Учитывая, что на каждый транзакт приходится два обращения к ГСЧ, а общее число обращений не должно превышать длины периода ГСЧ $2047999999 \approx 2\,048$ млн, имеем ограничение:

$$r \cdot N \leq 1,024 \times 10^9. \quad (1)$$

Если ПП вычисляемой оценки (например, \hat{w}) заканчивается достаточно быстро, то все ее реализации (например, $\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_r$), полученные в разных прогонах, затем усредняются, причем независимость этих реализаций позволяет обычным образом строить доверительный интервал для итоговой оценки. Если ПП вычисляемой оценки к концу прогонов не заканчиваются, то можно усреднить все r полученных ПП и найти по усредненному ПП оценку стационарного значения показателя методом степенного прогноза [5].

Так, при ИМ СМО Ра/М/1 с параметрами Парето-распределения $K = 1$, $\alpha = 1,1$ (т.е. со средним временем 11 между приходами заявок) и при среднем времени обслуживания 4,4 (т.е. при коэффициенте загрузки $\rho = 4,4/11 = 0,4$) сформулированные выше рекомендации были реализованы следующим образом. Выполнено $r = 901$ прогонов длины $T = 110\,000$ единиц времени. Всего приходит в среднем $rN = r(T/11) = 901 \times 110\,000/11 = 9,01$ млн заявок, и ограничение (1) выполняется. В ходе каждого прогона значения ПП оценки \hat{w} (т.е. системного числового атрибута QT1) записывались в 2000 точек отсчета $t_i = 55, 110, \dots, 110000$, равномерно расставленных в модельное время t . Результат QT1(t) усреднения всех 901 ПП графически представлен на рис. 3.

Как видно из рис. 3, ПП здесь заканчивается достаточно быстро, и для оценки стационарного w можно просто взять последнее значение усредненного QT1, составившее здесь 118,4. Этот результат

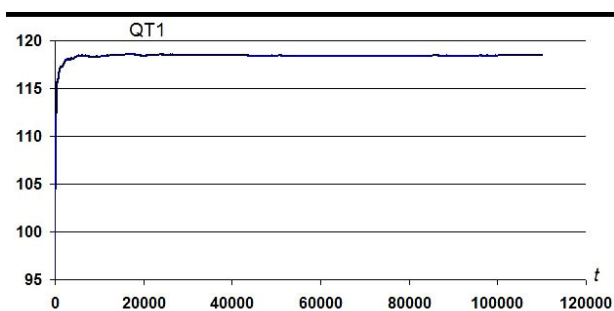


Рис. 3. Усредненный ПП оценки для w в СМО Ра/М/1 при $\lambda = 1/11$, $\rho = 0,4$

отличается от точного значения $w = 118,5$, найденного численным методом, описанным в [5], лишь на 0,07 %.

Такая хорошая точность оценок, получаемых при рекомендуемой здесь организации ИМ, обеспечивается, в частности, тем, что при использовании независимых прогонов отсутствует положительная корреляция между усредняемыми величинами (в силу их независимости). Заметим, что при ИМ этой же СМО (на AnyLogic), в прогоне с длиной 1 млрд. заявок, на два порядка превышающей суммарную длину (9,01 млн заявок) выполненных на GPSS независимых прогонов, для w получена оценка 114,2, имеющая погрешность 4,4 % (почти на два порядка худшую). Таким образом, приведенный ко времени выигрыш в точности оценки составил около $100 \cdot (100)^2 = 10^6$ раз.

7. Метод ARAND: решение проблемы искажения РТХ в ИМ. В описанном выше эксперименте на GPSS транзакты генерировались блоком GENERATE (Pareto(1,1,1.1)). Естественно, при этом моменты распределения Парето $F(t) = 1 - (K/t)^\alpha$ существенно смещались [2]. Но это не сказалось на точности расчета w , поскольку в СМО Ра/М/1 величина w не зависит от моментов интервала поступления заявок, а определяется его преобразованием Лапласа. Точные расчеты (опускаемые здесь из-за недостатка места) показывают, что дискретизация 6-разрядным ГСЧ распределения времени между приходами заявок не приводит к изменению величины w в моделируемой системе Ра/М/1 в пределах первых пяти-шести значащих цифр.

Что касается оценок средней длины очереди L и коэффициента загрузки ρ , то они оказываются сильно смещенными. Поскольку ГСЧ Uniform выдает в GPSS 6-разрядные числа, то реализуемая функцией Pareto(1,1,1.1) время между приходами заявок имеет среднее 8,0297, а не 11 [6]. Соответственно, оценка для ρ сходится в рассматриваемой СМО не к точному значению $4,4/11 = 0,4$, а к величине $4,4/8,0297 = 0,548$ (в описанном выше эксперименте на GPSS оценка для ρ получилась равной 0,546). При моделировании этой системы на AnyLogic, где ГСЧ реализует 15-разрядные числа, оценка для ρ сходится к $4,4/10,549 \approx 0,417$. Это значение смещено относительно 0,4 на 4,3 %.

В [7] для решения проблемы искажений РТХ в ИМ предложен метод генерации с.в. с РТХ, названный каскадным. Приведем наиболее простую и точную его основу, не указанную в [7], — метод ARAND (Accurate RAND) генерации стандартных случайных чисел, представленный на рис. 4.

Метод ARAND преобразует обычные n -разрядные стандартные случайные числа (ССЧ)

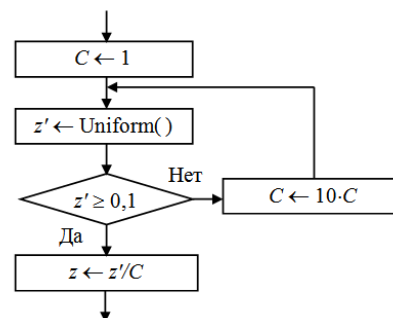


Рис. 4. Схема метода ARAND

z' в такие ССЧ z , которые, сколь бы малы они ни были, имеют n значащих цифр. Благодаря этому, с.в. с РТХ, реализуемые путем обратного преобразования хвоста распределения, тоже имеют n точных значащих цифр, и проблема искажения РТХ устраняется (подтверждающие это расчеты приведены в [7]). Например, обращая хвост распределения

Парето $\bar{F}(t) = 1 - F(t) = (K/t)^\alpha$, получаем для генерации с.в. x , распределенной по Парето, формулу $x = Kz^{-1/\alpha}$, и, если z генерируется методом ARAND, то моменты с.в. x не смещаются. На рис. 5 приведена процедура, реализующая для GPSS World метод ARAND на языке Plus. Здесь Arg — это номер ГСЧ Uniform.

Первые 10 чисел на выходе ГСЧ Uniform(1,0,1) таковы: 0.842366, 0.777717, 0.880991, 0.260493, 0.463553, **0.083898**, **0.022383**, **0.948592**, 0.344245, 0.929906. При обращениях к процедуре ARAND(1) они преобразуются в числа 0.842366, 0.777717, 0.880991, 0.260493, 0.463553, **0.00948592**, 0.344245, 0.929906. Из-за потери части чисел исходной последовательности z' длина периода у ГСЧ ARAND в среднем в 1/0,9 раз меньше, чем у исходного ГСЧ. Период ГСЧ ARAND(1) содержит 1843200000 чисел, наименьшее из них равно 6.54026e-11.

Обращение к процедуре ARAND() осуществляется так же, как и к другим PLUS-процедурам [1]. Например, для генерации потока транзактов с временем между ними, распределенным по Парето с параметрами $K = 1$, $\alpha = 1,1$, можно записать блок GENERATE следующим образом:

GENERATE (1 # ARAND(1)^(-1/1.1))

Описанный в п. 6 эксперимент на GPSS в случае такого использования ГСЧ ARAND дает надежный степенной прогноз стационарного ρ , равный 0,397, ошибка которого по отношению к точному значению $\rho = 0,4$ составляет 0,8 %. Таким образом, с помощью процедуры ARAND (6-разрядной) получена оценка почти на порядок более точная, чем предельно достижимая оценка 0,417, обеспечиваемая (например, в AnyLogic) стандартным 15-разрядным ГСЧ.

8. Выводы. Модельное время в GPSS World иногда течет вспять, т.е. событиям-следствиям, имитируемым после наступления событий-причин, приписываются меньшие значения времени, чем событиям-причинам. Соответствующие ошибки оценок ВВХ растут во времени с большим ускорением и становятся неприемлемыми при длине прогона модели СМО более 100 млн заявок. При этом генераторы класса Uniform, с точки зрения равномерности распределения и статистической неза-

висимости, достаточно качественны и могут быть использованы по всей длине их периода, составляющей 2047999999.

С учетом этого в статье предложен метод организации длинных прогонов СМО с РТХ, не допускающий существенного влияния дефектов времени на точность оценок и ускоряющий на несколько порядков получение высокоточных оценок за счет разбиения длинных прогонов на достаточно большое число независимых прогонов умеренной длины.

Проблемы искажения РТХ, возникающие из-за ограниченной разрядности стандартных ГСЧ, полностью устраняются при использовании предложенного в статье метода ARAND и процедуры, реализующей его в GPSS World.

Библиографический список

1. Руководство пользователя по GPSS World : пер. с англ. / Под ред. К. В. Кудашова. — Казань : Мастер Лайн, 2002. — 384 с.
2. Задорожный, В. Н. Проблемы генерации случайных величин с фрактальными распределениями / В. Н. Задорожный, О. И. Кутузов // Омский научный вестник. Сер. Приборы, машины и технологии. — 2012. — № 3 (113) — С. 20–24.
3. Задорожный, В. Н. О качестве программных генераторов случайных чисел / В. Н. Задорожный // Омский научный вестник. Сер. Приборы, машины и технологии. — 2009. — № 2 (80). — С. 199–205.
4. Карпов, Ю. Г. Имитационное моделирование систем. Введение в моделирование с AnyLogic 5 / Ю. Г. Карпов. — СПб. : БХВ-Петербург, 2005. — 400 с.
5. Zadorozhnyi, V. N. Simulation modeling of fractal queues / V. N. Zadorozhnyi // Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines. Dynamics 2014. — Proceedings, 2015. PROCEEDINGS RUSSIA, OMSK, NOVEMBER 11-13, 2014 P. 1–4
6. Задорожный, В. Н. Проблемы и техника моделирования фрактальных очередей / В. Н. Задорожный, О. И. Кутузов // Имитационное моделирование. Теория и практика : материалы 6-й Всерос. конф. В 2 т. Т. 1. — Казань : ФЭН, Академия наук РТ, 2013. — С. 143–148.
7. Задорожный, В. Н. Каскадный метод реализации распределений с тяжелыми хвостами / В. Н. Задорожный. — Омский научный вестник. Сер. Приборы, машины и технологии. — 2015. — № 2 (140). — С. 222–226.

ЗАДОРЖНЫЙ Владимир Николаевич, доктор технических наук, доцент (Россия), профессор кафедры автоматизированных систем обработки информации и управления.

Адрес для переписки: zwn2015@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 15.09.2015 г.

© В. Н. Задорожный

Алтайский
государственный университет,
г. БарнаулИнститут теплофизики
им. С. С. Кутателадзе СО РАН,
г. Новосибирск

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ДАВЛЕНИЯ ВНЕШНЕЙ СРЕДЫ НА ДИНАМИКУ ЖИДКОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

В работе изложены результаты исследования нестационарной задачи о динамике слоя вязкой несжимаемой жидкости со свободными границами в сферически симметричной постановке. Предполагается, что динамика сферического слоя определяется тепловыми и инерционными факторами. Построен численный алгоритм решения задачи. Представлены результаты численных экспериментов для жидкого стекла, содержащего пузырек углекислого газа. Изучено влияние давления внешней среды на процесс формирования микробаллонов и распределение температуры в них.

Ключевые слова: сферический слой, вязкая жидкость, свободная граница, численный алгоритм, математическое моделирование, теплоперенос.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №14-08-00163) и Минобрнауки России (идентификатор проекта RFMEFI61314X0011).

Введение. Интерес к исследованию динамики сферических слоев жидкостей связан с задачами формирования микробаллонов и с необходимостью исследования свойств новых материалов. Микросферы, или микробаллоны, применяются, например, как сенсориализаторы эмульсионных взрывчатых веществ или в качестве элементов сферопласта — композитного материала, состоящего из определенного типа смолы с внедренными в нее полыми микросферами из стекла [1, 2]. Построению математической модели динамики сферического слоя жидкости, содержащего газовый пузырек, посвящены работы [3–5]. В [3] была доказана разрешимость задачи в полной постановке в малом по времени. В [4] построен численный алгоритм решения задачи при условии, что преобладающее влияние на динамику оболочки оказывает процесс диффузии (диффузионное приближение), а в работе [5] приведено подробное доказательство теорем существования и единственности гладкого решения для тепловой задачи.

Данная работа посвящена численному исследованию динамики сферического слоя вязкой несжимаемой жидкости, содержащего внутри себя газовый пузырек, и распределения температуры в нем в зависимости от различных значений давления внешней среды. Предполагается, что газ нерастворим в жидкости, учитывается зависимость от температуры коэффициентов вязкости и теплопроводности. В качестве математической модели, описывающей процессы внутри жидкости, используются уравнения Навье–Стокса и переноса тепла, внутри газового пузырька выполняется

уравнение Менделеева–Клапейрона, связывающее давление, плотность и абсолютную температуру [3–6].

Постановка задачи. Пусть вязкая несжимаемая жидкость заполняет сферический слой $R_1(t) < r < R_2(t)$ с внутренней свободной поверхностью $r = R_1(t)$ и внешней свободной поверхностью $r = R_2(t)$. Задача рассматривается в условиях кратковременной невесомости, что позволяет изучать динамику слоя в случае сферической симметрии. Таким образом, только радиальная компонента скорости жидкости отлична от нуля, и все физические величины зависят от расстояния от начала координат и изменяются со временем.

В ходе решения задачи определяются положения свободных границ $R_1(t)$ и $R_2(t)$, радиальная скорость жидкости $v(t, r)$, температура $T(t, r)$. Введем характерные величины: v_* — характерная скорость, t_* — характерное время процесса, r_* — характерный радиус ($r_* = t_* v_*$), T_* — характерная температура, P — характерное давление, ν_* — характерное значение кинематической вязкости ($\nu_* = \nu(T_*)$), σ_* — характерное поверхностное натяжение ($\sigma_* = \sigma(T_*)$), χ_* — характерное значение коэффициента температуропроводности ($\chi_* = \chi(T_*)$), κ_* — характерное значение коэффициента теплопроводности, $\rho_* = \rho$ — характерная плотность (плотность жидкости). Пусть при этом выполняется соотношение $\chi_* = \kappa_* (\rho c_1)$, где c_1 — теплоемкость жидкости.

Тогда систему уравнений Навье–Стокса и уравнение переноса тепла в области $R_1(t) < r < R_2(t)$ в безразмерном виде можно записать следующим образом [4, 7]:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2} V^2 \frac{(R_1^2 + R_2^2)(R_1 + R_2)}{R_1^3 R_2^3} +$$

$$+ \operatorname{Re}^{-1} \left[P'_g - P'_{vm} - 2\overline{Si}\sigma(T) \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right] \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} -$$

$$- \frac{4}{\operatorname{Re}} \nu(T) V \frac{R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2}{R_1^2 R_2^2}, t > 0;$$

$$V(0) = V_0,$$

$$T_t + \frac{V}{r^2} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{Pe} r^{-2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \chi(T) \frac{\partial T}{\partial r}). \quad (2)$$

Здесь (1) — это следствие системы уравнений Навье — Стокса и динамических условий [6], а (2) — уравнение переноса тепла после перехода от радиальной скорости жидкости $v(t, r)$ к скорости изменения объема оболочки $V(t) = r^2 v(t, r)$. Введены обозначения: $\operatorname{Re} = \frac{r_s v_s}{\nu_s}$ — число Рейнольдса, $Pe = \frac{r_s v_s}{\chi_s}$ — число Пекле, $P'_g = P_g \cdot S$, $P'_{vm} = P_{vm} \cdot S$, $\overline{Si} = Si \cdot S$, где P_g и P_{vm} — давление в газе и внешнее, а $Si = \frac{\sigma_s}{r_s P_s}$, $S = \frac{r_s P_s}{\rho_s \nu_s}$ — безразмерные параметры, $\sigma(T)$, $\nu(T)$, $\chi(T)$ — коэффициенты поверхностного натяжения, кинематической вязкости и температуропроводности, зависящие от температуры по следующим законам, приведенным в безразмерном виде:

$$\sigma(T) = \sigma_0 + \sigma_T T \quad (\sigma_T = \text{const}, \sigma_T < 0),$$

$$\nu(T) = \nu_0 \exp(\nu_T / T), \quad \chi(T) = \chi_0 + \chi_T T. \quad (3)$$

Внутри пузырька газа $0 < r < R_1(t)$ уравнение состояния примет следующий безразмерный вид [4]:

$$P_g = \tilde{R} \rho_g T_g,$$

где $\tilde{R} = \tilde{R} \rho T_s / P_s$ — безразмерный параметр, ρ_g, T_g — плотность и температура газа в пузырьке, \tilde{R} — универсальная газовая постоянная.

На внутренней свободной границе $r = R_1(t)$ выполняются условия:

$$\frac{dR_1}{dt} = \frac{V}{R_1^2}, t > 0; R_1(0) = R_{10}, \quad (4)$$

$$T = T_g, \quad (5)$$

$$\frac{1}{3} \alpha_1 P_g \frac{dR_1^3}{dt} + \alpha_2 \frac{dT}{dt} = \kappa(T) R_1^2 \frac{\partial T}{\partial r} +$$

$$+ \alpha_3 \left(\frac{d}{dt} \left[R_1^2 T^2 \frac{d}{dT} \left(\frac{\sigma(T)}{T} \right) \right] + \sigma(T) \frac{dR_1^2}{dt} \right). \quad (6)$$

На внешней свободной границе $r = R_2(t)$ имеем:

$$\frac{dR_2}{dt} = \frac{V}{R_2^2}, t > 0; R_2(0) = R_{20}, \quad (7)$$

$$T = T_m(t). \quad (8)$$

Здесь $\alpha_1 = \frac{P_s r_s v_s}{\kappa_s T_s}$, $\alpha_2 = \frac{c_v m v_s}{4\pi r_s^2 \kappa_s}$, $\alpha_3 = \frac{v_s \sigma_s}{\kappa_s T_s}$ — безразмерные параметры, c_v — теплоемкость газа при постоянном объеме, $\kappa(T)$ — коэффициент теплопроводности, T_m — температура внешней среды,

$m = \frac{4}{3} \pi \cdot R_{10}^3 \cdot \rho_{g0}$ — масса газа в пузырьке, где ρ_{g0} — плотность газа в начальный момент времени.

Формулы (4) и (7) представляют собой кинематические условия. Соотношение (5) определяет условие непрерывности температуры при переходе через внутреннюю границу слоя $r = R_1(t)$, а равенство (6) выражает баланс энергии на ней без учета энергии выхода. Теплообмен с внешней средой задается с помощью условия первого рода (8) на границе $r = R_2(t)$. Функция $T_m(t)$ будет определена далее.

Начальные значения искомым функций определяются следующим образом:

$$R_{10} = R_1(0) < r < R_2(0) = R_{20},$$

$$T_g(0) = T_{g0}, V(0) = V_0, T(0, r) = T_0(r). \quad (9)$$

Схема численного решения. Переход на новый временной слой t^{k+1} начинается решения задачи Коши для R_1^{k+1} , V^{k+1} методом Рунге — Кутты четвертого порядка точности для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1), (4) (см. [8, 9]).

Внешний радиус оболочки R_2^{k+1} вычисляется из закона сохранения объема оболочки $R_2^3(t) - R_1^3(t) = R_{20}^3 - R_{10}^3$ (выполняется в силу кинематических условий (4), (7) на свободных границах жидкого слоя).

Плотность газа в пузырьке определяется по формуле $\rho_g^{k+1} = m / \left(\frac{4}{3} \pi (R_1^{k+1})^3 \right)$, m — масса газа в пузырьке (является константой и определяется при заданном значении ρ_{g0} , $m = \frac{4}{3} \pi \cdot R_{10}^3 \cdot \rho_{g0}$).

На каждом временном слое осуществляется переход в фиксированную область $[0, 1]$ с помощью новой пространственной переменной $x = (r^3 - R_1^3(t)) \cdot (R_{20}^3 - R_{10}^3)^{-1}$. В переменных (t, x) уравнение (2) приобретает вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\bar{\chi}(t, x) \frac{\partial T}{\partial x} \right], \quad (10)$$

$$\text{где } \bar{\chi}(t, x) = 9Pe^{-1} (R_{20}^3 - R_{10}^3)^{-2} \left[(R_{20}^3 - R_{10}^3)x + R_1^3(t) \right]^{\frac{4}{3}} \chi(T(t, x)).$$

Тогда начальные и граничные условия (5), (6), (8), (9) можно записать в виде:

$$T(0, x) = T_0(x), T(t, 0) = T_g(t), T(t, 1) = T_m(t),$$

$$\frac{1}{3} \alpha_1 P_g \frac{dR_1^3}{dt} + \alpha_2 \frac{dT}{dt} = \frac{3R_1^3}{R_{20}^3 - R_{10}^3} \kappa(T) \frac{\partial T}{\partial x}(t, 0) +$$

$$+ \alpha_3 \left(\frac{d}{dt} \left[R_1^2 T^2 \frac{d}{dT} \left(\frac{\sigma(T)}{T} \right) \right] + \sigma(T) \frac{dR_1^2}{dt} \right).$$

На каждом временном слое t^{k+1} расчета функций R_1^{k+1} и V^{k+1} будем находить распределение температуры T^{s+1} в оболочке, согласно неявной разностной схемы второго порядка аппроксимации по пространственной переменной [4, 9]:

$$\frac{T_n^{s+1} - T_n^s}{\tau} = \frac{1}{h_n} \left[\frac{T_{n+1}^{s+1} - T_n^{s+1}}{h_{n+1}} - \chi_n \frac{T_n^{s+1} - T_{n-1}^{s+1}}{h_n} \right]. \quad (11)$$

Здесь $\bar{\chi}_n = 0,5 [\bar{\chi}(t^k, x_{n-1}) + \bar{\chi}(t^k, x_n)]$, и введена неравномерная разностная сетка (x_n) , $n = 1, \dots, N+1$; $h_n = x_n - x_{n-1}$, $h_n = 0,5(h_n + h_{n+1})$, $t^{s+1} = t^s + \tau$, τ — шаг по времени.

Для реализации конечно-разностной схемы (11) применяется метод прогонки с параметром. В роли параметра выступает неизвестное значение

температуры T_1^{s+1} при $x=0$, совпадающее с T_g на каждом временном слое ($s+1$). Температура газа T_g является неизвестной функцией времени и находится в процессе решения задачи.

Результаты исследования. В рамках данной модели проведены численные эксперименты по формированию жидкой стеклянной оболочки, содержащей углекислый газ [4]. Начальное состояние системы «газ–жидкость» характеризуется следующими размерами сферического слоя: $R_{10}=0,02$ см, $R_{20}=0,05$ см. Начальное распределение температуры полагается равным $T=1171,1$ К. Внешняя атмосфера разогревается по закону:

$$\begin{cases} T_{vn} = T_{vn1} + \frac{T_{vn2} - T_{vn1}}{t_2 - t_1} (t - t_1), t_1 \leq t \leq t_2; \\ T_{vn} = T_{vn2}, t > t_2. \end{cases}$$

Здесь $t_1=0$ с, $t_2=0,3$ с, $T_{vn1}=1171,1$ К, $T_{vn2}=1673$ К.

Характерные физические величины выбраны следующим образом [4, 10]: $r_* = 0,05$ см — характерное значение радиуса жидкого слоя, $v_* = 1$ см/с — характерная скорость, $T_* = 1673$ К — характерная температура, $P_* = 1013250$ дин/см² (1 атм) — характерное давление, $\rho_* = \rho = 2$ г/см³ — характерная плотность жидкого стекла, $\sigma_* = \sigma(T_*) = 280$ дин/см — характерное значение поверхностного натяжения, $\nu_* = \nu(T_*) = 36$ см²/с — характерная вязкость, $\kappa_* = 5,5$ кал/(см·с·К) — характерное значение коэффициента теплопроводности, $c_l = 0,345$ кал/(г·К) — теплоемкость жидкости, $c_v = 0,27724$ кал/(г·К) — теплоемкость газа при постоянном объеме, $\chi_* = \chi(T_*)$ — характерное значение коэффициента температуропроводности ($\chi_* = \kappa_* / (\rho c_l)$), $\rho_{g0} = 0,00092$ г/см³ — значение плотности газа в начальный момент времени (см. [4]).

Коэффициенты кинематической вязкости, поверхностного натяжения и температуропроводности определяются, согласно (3) [4, 10] при следующих значениях параметров: $\nu_0 = 0,18 \cdot 10^{-5}$, $\nu_T = 13,23$ и $\sigma_0 = 1,299$, $\sigma_T = -0,299$, $\chi_0 = 0,636$, $\chi_T = 227 \cdot 10^{-6}$. Безразмерные комплексы принимают следующие значения: $Re = 0,0014$, $Pe = 0,00625$, $Si = 0,0055$, $S = 703,65$, $\tilde{R} = 6235$, $\alpha_1 = 5,506$, $\alpha_2 = 4,8 \cdot 10^{-8}$, $\alpha_3 = 3,04 \cdot 10^{-2}$.

Численно исследована динамика сферического слоя и процесс теплопереноса в нём при заданном внешнем тепловом режиме. Расчеты проводились для различных показателей давления внешней среды ($P_{vn} = 0,03$ атм и $P_{vn} = 0,1$ атм).

Рис. 1 демонстрирует изменение внутреннего радиуса слоя $r = R_1(t)$ при $t \in [0, 0,5]$. Увеличение внешнего давления в значительной степени сдерживает расширение слоя.

На рис. 2 изображен график распределения температуры $T(t, r)$ в слое в момент времени $t_0 = 0,2$ с для значений внешнего давления $P_{vn} = 0,1$ атм и $P_{vn} = 0,03$ атм. При увеличении внешнего давления до 0,1 атм процесс переноса тепла в нём существенно замедляется. На рис. 3 представлено поле скорости жидкости $v(t, r)$ в момент времени $t_0 = 0,2$ с при значении давления внешней среды $P_{vn} = 0,1$ атм.

Заключение. В работе представлены математическая модель, алгоритм расчета и результаты численного исследования динамики жидкой сферической оболочки и процесса переноса тепла в ней.

Численные эксперименты проведены для жидкого стекла, содержащего пузырек углекислого газа. Исследовано влияние давления внешней

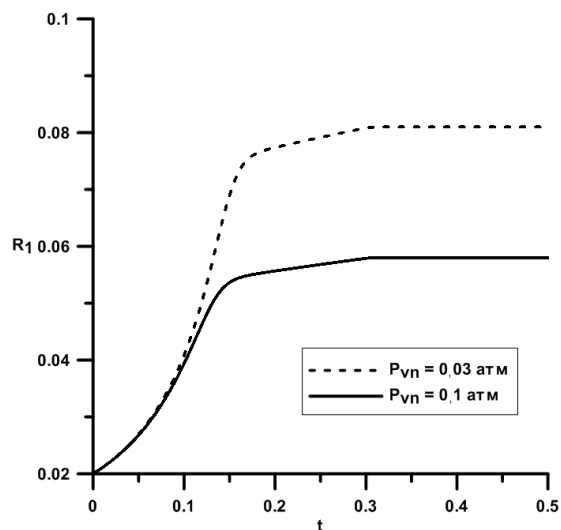


Рис. 1. Зависимость внутреннего радиуса оболочки от времени: для значений внешнего давления $P_{vn} = 0,03$ атм и $P_{vn} = 0,1$ атм

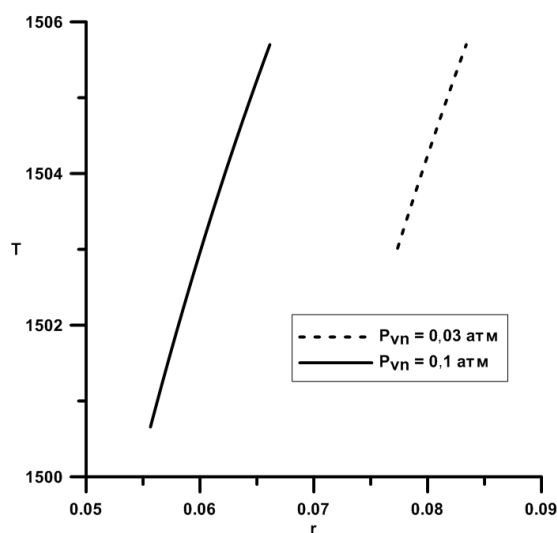


Рис. 2. Распределение температуры в момент времени $t_0 = 0,2$ с: для значений внешнего давления $P_{vn} = 0,03$ атм и $P_{vn} = 0,1$ атм

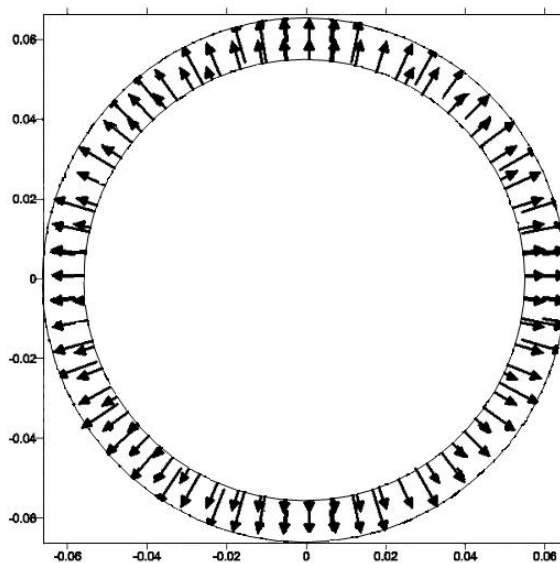


Рис. 3. Поле скоростей (в сечении) в момент времени $t_0 = 0,2$ с: внешнее давление $P_{vn} = 0,1$ атм

среды на динамику жидкой оболочки и распределение температуры в ней.

Авторы выражают благодарность научному руководителю О. Н. Гончаровой за постановку задачи и обсуждение результатов.

Библиографический список

1. Скорость детонации эмульсионных взрывчатых веществ с ценосферами / А. Г. Аншиц [и др.] // Физика горения и взрыва. — 2005. — Т. 41, № 5. — С. 119–127.
2. Карпов, Е. В. Деформирование и разрушение сферопласта в условиях малоциклового нагружения при различных температурах / Е. В. Карпов // Прикладная механика и техническая физика. — 2009. — Т. 50, № 1. — С. 197–204.
3. Гончарова, О. Н. Математическая модель формирования сферических оболочек в условиях кратковременной невесомости / О. Н. Гончарова // Гидродинамика быстропотекающих процессов. — 1987. — В. 82. — С. 66–79.
4. Гончарова, О. Н. Диффузионное приближение в задаче формирования сферических микробаллонов в условиях кратковременной невесомости / О. Н. Гончарова, В. В. Пухначев // Моделирование в механике. — 1990. — Т. 4 (21), № 5. — С. 83–95.
5. Гончарова, О. Н. Глобальная разрешимость задачи о формировании сферических микробаллонов / О. Н. Гончарова // Вычислительные методы прикладной гидродинамики. — 1993. — В. 106. — С. 36–48.
6. Современные математические модели конвекции / В. К. Андреев [и др.]. — М.: Физматлит, 2008. — 368 с.

7. Закурдаева, А. В. Влияние внешнего теплового режима на динамику жидкой сферической оболочки и процесс переноса тепла в ней / А. В. Закурдаева // Ломоносовские чтения на Алтае. — 2014. — Ч. 5. — С. 341–347.

8. Калиткин, Н. Н. Численный анализ / Н. Н. Калиткин, Е. А. Альшина. — М.: Academia, 2013. — 304 с.

9. Резанова, Е. В. Численное исследование динамики сферической газосодержащей оболочки / Е. В. Резанова // Известия Алтайского гос. ун-та. — 2013. — № 1 (77). — С. 42–47.

10. Мазурин, О. В. Свойства стекол и стеклообразующих расплавов / О. В. Мазурин, М. В. Стрельцина, Т. П. Швайко-Швайковская. — Л.: Наука, 1973. — 443 с.

ЗАКУРДАЕВА Алла Витальевна, магистрант гр. 446М факультета математики и информационных технологий Алтайского государственного университета; инженер лаборатории интенсификации процессов теплообмена Института теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН.

Адрес для переписки: alla2300@bk.ru

РЕЗАНОВА Екатерина Валерьевна, ассистент кафедры информатики Алтайского государственного университета; инженер лаборатории интенсификации процессов теплообмена Института теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН.

Адрес для переписки: katerezanova@mail.ru

Статья поступила в редакцию 15.06.2015 г.

© А. В. Закурдаева, Е. В. Резанова

Книжная полка

539/Ш67

Шкутин, Л. И. Нелинейные деформации и катастрофы тонких тел : моногр. / Л. И. Шкутин ; отв. ред. В. М. Садовский ; СО РАН, Ин-т вычислит. моделирования. — Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2014. — 138 с.

Монография содержит инвариантные формулировки обобщенных математических моделей анализа нелинейных деформаций оболочко- и стержнеобразных тел с независимыми полями конечных перемещений и конечных поворотов материальных элементов. Они получены из новой инвариантной формулировки нелинейной модели Коши для трехмерного тела с явным выделением конечных локальных поворотов. Даны постановки и решения нелинейных краевых задач анализа катастрофических деформаций стержней, пластин и оболочек, которые демонстрируют прикладные возможности предложенных моделей. Монография предназначена для научных сотрудников, инженеров-конструкторов, преподавателей, аспирантов и студентов, специализирующихся в области механики деформируемого твердого тела.

532/М34

Математическое моделирование гидродинамики и теплообмена в движущихся жидкостях : моногр. / И. В. Кудинов [и др.] ; под ред. Э. М. Карташова. — СПб. : Лань, 2015. — 208 с.

Рассмотрены вопросы построения математических и компьютерных моделей трубопроводных систем различного назначения. Излагаются инженерные методы нахождения решений задач нестационарной теплопроводности, позволяющие получать эффективные точные и приближенные аналитические решения. С помощью интегрального метода теплового баланса на основе введения фронта температурного возмущения и при использовании дополнительных граничных условий получены аналитические решения задач теплообмена в жидкостях, включая динамический и тепловой пограничные слои. Представлены результаты получения и анализа точных аналитических решений гиперболических уравнений, описывающих распространение гидравлической волны с конечной скоростью.

Книга может быть полезной для научно-технических работников, специализирующихся в области математики, теплофизики, а также для преподавателей и студентов технических вузов.

СЕТОЧНОЕ И БЕССЕТОЧНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УДАРА ГРУППЫ ЧАСТИЦ КОСМИЧЕСКОГО МУСОРА ПО СТЕКЛУ

Исследование процессов деформирования и разрушения стекла при взаимодействии с потоками техногенных и естественных осколков необходимо как с точки зрения сохранения целостности космических аппаратов при ударе достаточно крупными осколками, так и с целью уменьшения эрозии элементов конструкций при действии потоков ультрамелких частиц. В работе приведены сеточная методика, базирующаяся на совместном использовании метода Уилкинса и метода Джонсона, и бессеточная методика, базирующаяся на SPH методе. Было рассмотрено соударение группы из семи стальных шариков с двухслойной стеклянной пластиной. Проведено сравнение особенностей двух методик при моделировании процесса разрушения стеклянных элементов.

Ключевые слова: численное моделирование, сеточный и бессеточный методы, удар, стекло.

Работа выполнена в рамках Программы повышения конкурентоспособности Томского государственного университета.

Уравнения, описывающие пространственное адиабатное движение прочной сжимаемой среды, являются дифференциальными следствиями фундаментальных законов сохранения массы, импульса и энергии. В общем случае они приведены в [1]. Эти уравнения замыкались уравнениями, учитывающими соответствующие термодинамические эффекты, связанные с адиабатным сжатием среды и прочностью среды. Естественная фрагментация ударников и преграды рассчитывались с помощью введения вероятностного механизма распределения начальных дефектов структуры материала для описания отрывных и сдвиговых трещин. В качестве критерия разрушения при интенсивных сдвиговых деформациях в задачах использовалось достижение эквивалентной пластической деформацией своего предельного значения. Начальные неоднородности моделировались тем, что предельная эквивалентная пластическая деформация распределялась по ячейкам оболочки с помощью модифицированного генератора случайных чисел, выдающего случайную величину, подчиняющуюся выбранному закону распределения [2]. Для трехмерного расчета напряженно-деформированного состояния ударников и преграды использовалась методика, реализованная на тетраэдрических ячейках и базирующаяся на совместном использовании метода Уилкинса для расчета внутренних точек тела и метода Джонсона для расчета контактных взаимодействий [3, 4] и модификация метода SPH. В методе SPH [5] ядерная аппроксимация функции имеет вид

$$f^i \cong \int f(\bar{x})W(\bar{x} - \bar{x}^i, h)d\bar{x}, \quad (1)$$

где h — параметр размывания, выбираемый достаточно произвольно, \bar{x} — пространственная координата, W — функция сглаживания, в качестве которой обычно используется кубический В-сплайн

$$W(u = |\bar{x}|/h) = \begin{cases} 1 - 1,5u^2 + 0,75u^3, & u \leq 1, \\ 0,25(2 - u)^3, & 1 < u \leq 2, \\ 0, & u > 2. \end{cases} \quad (2)$$

Производная этой функции может быть найдена как:

$$f_{,\alpha}^i = \frac{\partial f^i}{\partial x_\alpha} \cong \int f(\bar{x})W_{,\alpha}(\bar{x} - \bar{x}^i, h)d\bar{x}. \quad (3)$$

Соответствующая (3) узловая аппроксимация производных в этом случае имеет вид:

$$f_{,\alpha}^i = \frac{\partial f^i}{\partial x_\alpha} \cong \sum_k \{f^k W_{,\alpha}(\bar{x}^k - \bar{x}^i, h)\Delta v^k\}, \quad (4)$$

где $\bar{x}^k, f^k, \Delta v^k$ — радиус-вектор, значение аппроксимируемой функции и некоторый ассоциированный объем, соответствующие k -й точке.

Как показано в [6, 7], узловая аппроксимация (4) имеет первый порядок точности при однородном распределении частиц, который понижается

до нулевого вблизи границ расчетной области и при неоднородном распределении частиц. В [8] был предложен способ восстановления узловой согласованности. Разложив аппроксимацию (3) в ряд Тейлора и удерживая два члена ряда, получим аппроксимацию первого порядка точности.

Основные идеи предлагаемого в данной статье подхода обозначим

$$f_{,\alpha}^i = \begin{cases} \partial f(\bar{x}^i) / \partial x_{\alpha}^i, & \alpha = 0, 1, 2; \\ f(\bar{x}^i), & \alpha = -1; \end{cases} \quad (5)$$

$$\Delta(\bar{x}, \bar{y})_{\alpha} = \begin{cases} x_{\alpha} - y_{\alpha}; & \alpha = 0, 1, 2; \\ 1; & \alpha = -1. \end{cases} \quad (6)$$

Введем вспомогательные величины

$$F_{\beta}(f, \bar{x}) = \sum_m f^m W_{,\beta}(\bar{x}^m - \bar{x}) A^m, \quad (7)$$

$$T_{\alpha\beta}(\bar{x}) = \sum_m \Delta_{\beta}(\bar{x}^m, \bar{x}) W_{,\alpha}(\bar{x}^m - \bar{x}, h) A^m = F_{,\alpha}(\Delta_{\beta}, \bar{x}), \quad (8)$$

$$B_{\alpha\beta}(\bar{x}) = [T_{\alpha\beta}(\bar{x})]^{-1}, \quad (9)$$

где f^m — значение функции f , вычисленное в узле m , далее мы будем называть его значением, переносимым узлом. A^m — ассоциированная площадь узла m , \bar{x}^m — радиус-вектор узла m .

В этих обозначениях узловая аппроксимация произвольной функции f или ее производной в узле l имеет вид:

$$\Phi_{\alpha}^{nm} = B_{\alpha\beta}^n W_{,\beta}^{nm} A^m \quad (10)$$

$$\hat{f}_{,\alpha}^n = \sum_m \{ f^m \Phi_{\alpha}^{nm} \} \quad (11)$$

Связь деформаций и перемещений узловых точек в этих обозначениях принимает вид

$$\Delta \varepsilon_{ij}^n = \sum_m \{ \Delta R_{\gamma}^m (\delta_{i\gamma} \Phi_j^{nm} + \delta_{j\gamma} \Phi_i^{nm}) / 2 \}. \quad (12)$$

Тогда вариация внутренней энергии может быть вычислена по формуле

$$\delta E = \int \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} d\bar{x} \approx \approx \sum_M \delta R_{\gamma}^m \left\{ \sum_N \Delta V^n \sigma_{ij}^n (\delta_{i\gamma} \Phi_j^{nm} + \delta_{j\gamma} \Phi_i^{nm}) / 2 \right\}. \quad (13)$$

Отсюда находится обобщенная сила, действующая на SPH-узлы:

$$F_{\gamma}^m = \sum_N (\sigma_{ij}^n \Delta V^n (\delta_{i\gamma} \Phi_j^{nm} + \delta_{j\gamma} \Phi_i^{nm}) / 2), \quad (14)$$

после чего ускорения узлов определяются как:

$$a_{\gamma}^m = F_{\gamma}^m / m^m, \quad (15)$$

где $m^m = \rho V^m$ — масса узла m .

Процедура восстановления узловой согласованности совместно с расчетом обобщенных узловых сил позволяет повысить порядок точности метода и повысить точность расчета граничных условий на контактных и свободных поверхностях. При этом условия на свободной поверхности в таком подходе удовлетворяются автоматически, а условия



Рис. 1. Расчетная схема

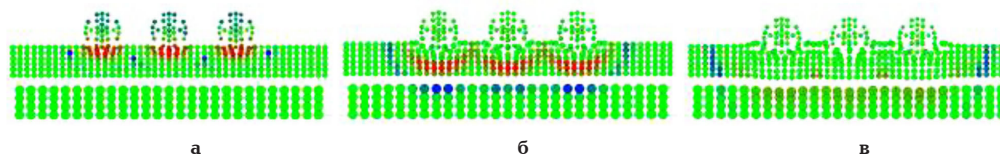


Рис. 2. Расчет напряжений методом SPH. 2D сечения расчетной области для различных моментов времени t : а — $t=15$ мкс; б — $t=25$ мкс; в — $t=35$ мкс. Выделена область поврежденности материала стекла

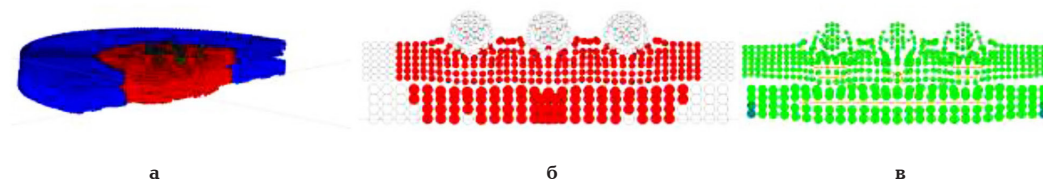


Рис. 3. Расчет поврежденности методом SPH: а — 3D конфигурация с зоной поврежденности; б — 2D сечение расчетной области с поврежденностью; в — начало фрагментации ($t=50$ мкс)

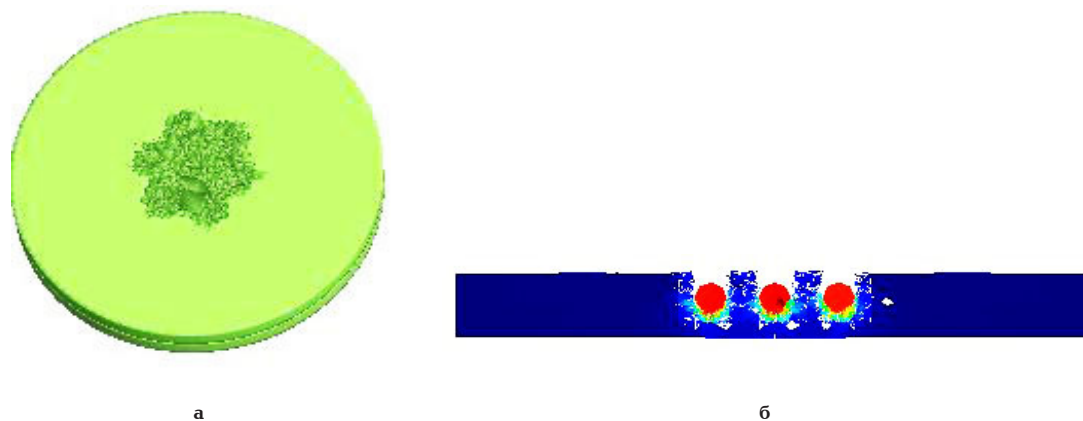


Рис. 4. Расчет по сеточному методу (время $t=1,7$ мкс):
а — 3D конфигурация; б — 2D сечение расчетной области

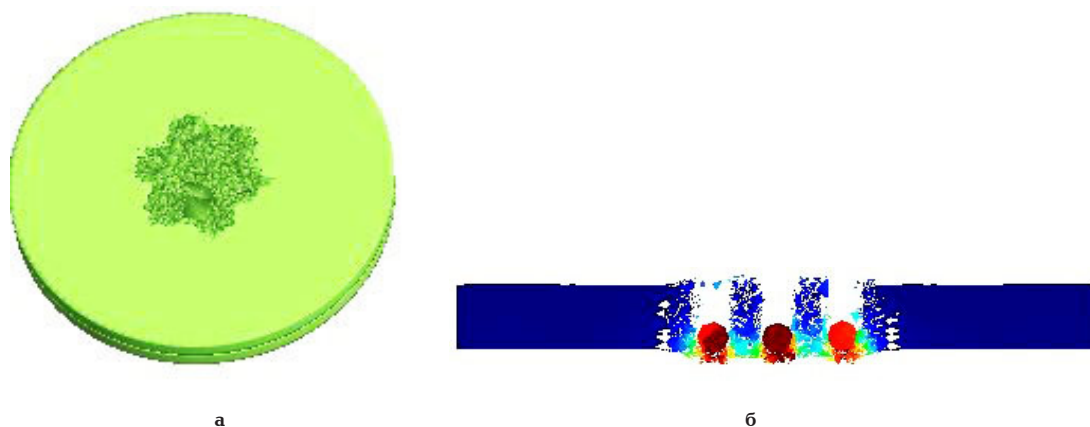


Рис. 5. Расчет по сеточному методу (время $t=3,57$ мкс):
а — 3D конфигурация; б — 2D сечение расчетной области

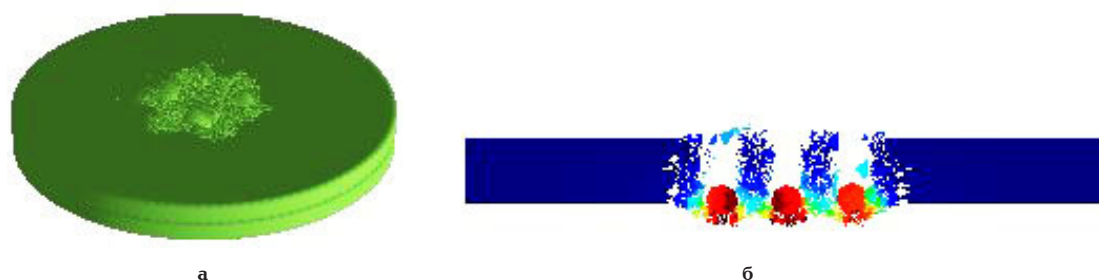


Рис. 6. Расчет по сеточному методу (время $t=4,2$ мкс):
а — 3D конфигурация; б — 2D сечение расчетной области

на контактных поверхностях могут быть рассчитаны методом Джонсона.

Оба метода использовались для моделирования соударения группы из семи сферических стальных частиц с поверхностью стекла (рис. 1). Радиус частиц $r=0,5$ мм, они расположены по кругу диаметром $D_1=4,0$ мм. Пластины стекла имели диаметр $D_2=20,0$ мм, толщина пластин $h=1,0$ мм. В методе SPH расстояние между пластинами бралось $0,2$ мм, в конечно-разностном методе расстояние между пластинами бралось 0 мм. Начальная скорость частиц $v=1,0$ км/с. В расчетах использовалось уравнение состояния типа Ми–Грюнайзена

$$P = \frac{K(1-\gamma_0\xi/2)}{(1-c\xi)^2} \xi + \gamma_0 E_y; \quad \xi = 1 - V_y;$$

$$D = a + cu,$$

где D — скорость УВ, u — массовая скорость, ρ_0 — начальная плотность, V_y — относительный объем (ρ_0/ρ), E_y — удельная внутренняя энергия, γ_0 — коэффициент Грюнайзена, параметры стекла $\rho_0=2480$ кг/м³, $a=400$ м/с; $c=2,45$, $K=\rho_0 a^2$, $\gamma_0=1,17$, модуль сдвига $\mu_0=34,04$ ГПа, в качестве критерия разрушения использовалась предельная деформация разрушения $\varepsilon_{frac}=0,54$ %.

Для моделирования металлических частиц использовалась упругопластическая модель [3] с параметрами модуль упругости $E=200$ ГПа, модуль сдвига $\mu = 70$ ГПа, предел текучести $Y_0 = 0,245$ ГПа.

В методе SPH задача решалась в трехмерной постановке, для моделирования верхней пластины использовалось 40000 узлов, для моделирования нижней пластины использовалось 10000 узлов, для моделирования сферических частиц использовалось по 72 узла на каждую сферу. Напряжения (рис. 2) и поврежденности (рис. 3) в пластинах приведены для указанных выше параметров.

Ниже представлены 3D конфигурации и двумерные сечения пластин из стекла и стальных ударников для различных моментов времени: $t=1,7$ мкс (рис. 4), $t=3,57$ (рис. 5), $t=4,2$ мкс (рис. 6).

Предложенные в работе подходы к моделированию взаимодействия частиц космического мусора и элементов из стекла космических аппаратов позволяют рассчитывать напряженно-деформированное состояние, разрушение и фрагментацию стеклянных элементов космических аппаратов в трехмерной постановке при высокоинтенсивном нагружении.

Следует отметить, что сеточный метод, использующий вероятностный подход к описанию процесса разрушения соударяющихся тел, позволяет более точно рассчитывать области поврежденного и разрушенного при соударении материала (рис. 4–6) по сравнению с методом SPH (рис. 2–3). Он также более точен при расчете формирования фрагментов из разрушенной преграды и учета взаимодействия последних между собой.

Библиографический список

1. Баум, Ф. А. Физика взрыва / Ф. А. Баум, Л. П. Орленко ; под ред. К. П. Станюковича. — 2-е изд., перераб. — М. : Наука, 1975. — 704 с.

2. Теоретические и экспериментальные исследования высокоскоростного взаимодействия тел / А. В. Герасимов [и др.]. — Томск : Изд-во Томского ун-та, 2007. — 572 с.

3. Уилкинс, М. Л. Расчет упругопластических течений / М. Л. Уилкинс // Вычислительные методы в гидродинамике. — М. : Мир, 1967. — С. 212–263.

4. Johnson, G. R. Tree-dimensional computer code for dynamic response of solids to intense impulsive loads / G. R. Johnson, D. D. Colby, D. J. Vavrick // Int. J. Numer. Methods Engng. — 1979. — V. 14, № 12. — P. 1865–1871.

5. Lucy, L. B. A numerical approach to the testing of fusion hypothesis / L. B. Lucy // Astronomical Journal. — 1977. — V. 82. — P. 1013–1024.

6. Chen, J. K. A corrective smoothed particle method for transient elastoplastic dynamics / J. K. Chen, J. E. Beraun, C. J. Jin // Computational Mechanics. — 2001. — V. 127. — P. 177–187.

7. Bonet, J. Correction and stabilization of smooth particle hydrodynamics methods with applications in metal forming simulations / J. Bonet, S. Kulasegaram // Int. J. Numer. Meth. Engng. — 2000. — V. 47, P. 1189–1214.

8. Liu, M. B. Restoring particle consistency in smoothed particle hydrodynamics / M. B. Liu, G. R. Liu // Applied Numerical Mathematics. — 2006. — V. 56, № 1. — P. 19–36.

ГЕРАСИМОВ Александр Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом.

ПАШКОВ Сергей Владимирович, кандидат технических наук, старший научный сотрудник.

ХРИСТЕНКО Юрий Федорович, доктор технических наук, старший научный сотрудник (Россия), ведущий научный сотрудник.

ЧЕРЕПАНОВ Роман Олегович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник. Адрес для переписки: niipmm@mail.tomsknet.ru

Статья поступила в редакцию 11.09.2015 г.

© А. В. Герасимов, С. В. Пашков, Ю. Ф. Христенко,

Р. О. Черепанов

Книжная полка

519.2/Б79

Большаков, А. А. Методы обработки многомерных данных и временных рядов : учеб. пособие для вузов по направлению «Информатика и вычислительная техника» / А. А. Большаков, Р. Н. Каримов. — 2-е изд., стр. — М. : Горячая линия – Телеком, 2014. — 520 с.

Рассмотрены основные методы обработки многомерных экспериментальных данных объектов числовой и нечисловой природы, разведочный анализ и представление данных. Приведено систематическое описание следующих методов многомерной статистической обработки; анализ главных компонент; каноническая корреляция; дискретно-косинусное преобразование и вейвлет-анализ; дискриминантный и факторный анализы; а также анализ соответствий и многомерное метрическое и неметрическое шкалирование. Изложены современные методы сингулярного разложения и вейвлет-анализа, используемые для обработки многокомпонентных временных рядов. Пособие иллюстрировано тщательно подобранными примерами, в том числе взятыми авторами из многолетней собственной практики решения реальных задач.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки «Информатика и вычислительная техника», магистерской программе «Автоматизация научных исследований, испытаний и эксперимента» направления «Автоматизация и управление»; будет полезна преподавателям, научным работникам, аспирантам.

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ КОМПЗИТНЫХ СТЕРЖНЕЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДА БУБНОВА—ГАЛЕРКИНА

Рассматривается решение на основе метода Бубнова—Галеркина начально-краевых задач динамического расчета композитных вязкоупругих стержней. Разрешающие уравнения сформулированы с учетом осредненного сдвига и взаимодействия с внешней средой. Методом Фурье на основе использования заданных координатных функций задача сведена к системе матричных уравнений для вектор-функций времени, отражающих изменение перемещений и углов поворота.

Ключевые слова: композитный стержень, поперечно-слоистая структура, динамическое воздействие, жесткостные характеристики.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, проект 14-01-00102.

1. Композитный стержень (рис. 1), в зависимости от направления реализации неоднородности, может иметь разнообразные типы слоистых структур: поперечную, продольную, полярную, радиальную, продольно-поперечную. Рассмотрим поперечно-слоистый стержень длиной l , составленный из слоев, симметричная структура которого образована границами $y_k(x)$ ($k=1, \dots, s+1$) с произвольной привязкой к отсчетной плоскости $y=0$. k -й слой шириной $b_k(x, y)$ и высотой $h_k(x)$ характеризуется объемной плотностью ρ_{k1} , модулем упругости E_{k1} , модулем сдвига G_k и коэффициентами вязкости η_{k1} , η_{tk} при продольном деформировании и сдвиге. Межслойный контакт считается идеальным.

Формирование основных соотношений композитного вязкоупругого стержня на вязкоупругом основании приведено в [1]. Разрешающая система

дифференциальных уравнений при их использовании принимает вид

$$\begin{cases} (D_A u' - D_S \theta' + C_A \dot{u}' - C_S \dot{\theta}') - \beta_{xx} u + \\ + \beta_{x0} \theta - c_{xx} \dot{u} + c_{x0} \dot{\theta} - m_A \ddot{u} + m_S \ddot{\theta} = -q_x(x, t), \\ [D_Q (\theta - v') + C_Q (\dot{\theta} - \dot{v}')] - (N_{st} \theta)' + \\ + \beta_{yy} v + c_{yy} \dot{v} + m_A \ddot{v} = q_y(x, t), \\ (D_I \theta' - D_S u' + C_I \dot{\theta}' - C_S \dot{u}') + \beta_{x0} u - \\ - \beta_{00} \theta + c_{x0} \dot{u} - c_{00} \dot{\theta} - D_Q (\theta - v') - \\ - C_Q (\dot{\theta} - \dot{v}') - m_I \ddot{\theta} + m_S \ddot{u} = m_z(x, t), \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} [D_A, D_S, D_I](x) &= \sum_{k=1}^s E_k \iint_{A_k} [1, y, y^2] dA, \\ [C_A, C_S, C_I](x) &= \sum_{k=1}^s \eta_k \iint_{A_k} [1, y, y^2] dA, \end{aligned} \quad (2)$$

$$D_Q(x) = \frac{F_\tau^2}{\sum_{k=1}^s \int_{y_k}^{y_{k+1}} \frac{f_\tau^2}{b_k G_k} dy}$$

$$C_Q(x) = \frac{F_\tau^2}{\sum_{k=1}^s \int_{y_k}^{y_{k+1}} \frac{f_\tau^2}{b_k \eta_{tk}} dy}, \quad F_\tau = \int_{y_1}^{y_{s+1}} f_\tau dy, \quad (3)$$

$$[m_A, m_S, m_I](x) = \sum_{k=1}^s \rho_k \iint_{A_k} [1, y, y^2] dA, \quad (4)$$

$$[\beta_{xx}, \beta_{x0}, \beta_{00}](x) = \beta_x b_r [1, y_r, y_r^2], \quad \beta_{yy}(x) = \beta_y b_r, \quad (5)$$

$$[c_{xx}, c_{x0}, c_{00}](x) = c_x b_r [1, y_r, y_r^2], \quad c_{yy}(x) = c_y b_r. \quad (6)$$

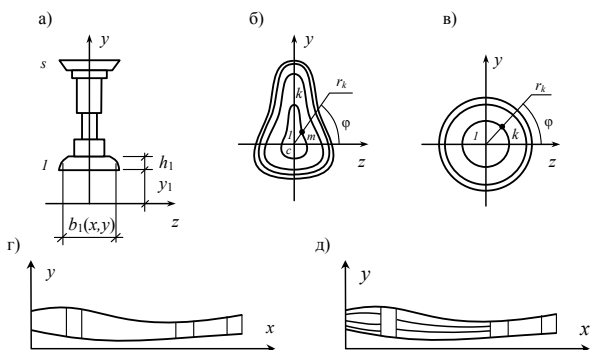


Рис. 1. Схемы композитных стержней

Здесь u, v — продольные и поперечные перемещения точек отсчетной оси стержня; θ — угол поворота поперечных сечений; q_x, q_y, m_z — динамические нагрузки; (2) — обобщенные жесткостные и вязкостные характеристики сечения при продольном деформировании; (3) — сдвиговая жесткость и вязкость сечения; $f_r(y)$ — заданная безразмерная функция формы поперечного распределения сдвигающих сил, удовлетворяющая условиям $f_i(y_i) = f_i(y_{s+i}) = 0$; (4) — обобщенные массовые характеристики стержня; (5) — обобщенные характеристики жесткости, а (6) — вязкости основания; β_x, β_y — коэффициенты жесткости, а c_x, c_y — вязкости основания; b_r, y_r — ширина и координата поверхности контакта стержня с основанием; штрихом обозначено дифференцирование по координате x , а точкой — по времени t .

Для замыкания начально-краевой задачи записываются начальные условия

$$\begin{aligned} u(x,0) = v(x,0) = \theta(x,0) = 0, \\ \dot{u}(x,0) = \dot{v}(x,0) = \dot{\theta}(x,0) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

и граничные — в конечных сечениях с координатами $x_* = 0, l$:

$$u(x_*, t) = u_*(t), \quad v(x_*, t) = v_*(t), \quad \theta(x_*, t) = \theta_*(t), \quad -$$

при наличии жестких связей, а при деформируемых —

$$N(x_*, t) \mp R_{x*}(t) \pm F_{x*}(t) = 0,$$

$$\theta(x_*, t) N_{si}(x_*) - Q(x_*, t) \mp R_{y*}(t) \pm F_{y*}(t) = 0,$$

$$M(x_*, t) \mp R_{0*}(t) \mp m_{z*}(t) = 0,$$

где $R_{x*}(t) = D_{xx}u(x_*, t) + C_{xx}\dot{u}(x_*, t)$, $R_{y*}(t) = D_{yy}v(x_*, t) + C_{yy}\dot{v}(x_*, t)$, $R_{0*}(t) = D_{00}\theta(x_*, t) + C_{00}\dot{\theta}(x_*, t)$ — реакции продольной, поперечной и угловой конечных связей, имеющих характеристики жесткости $D_{x,r}, D_{y,r}, D_{0,r}$ и вязкости $C_{x,r}, C_{y,r}, C_{0,r}$. На левом конце применяются верхние, а на правом — нижние знаки.

Решение системы уравнений (1) представим в виде разложений

$$\begin{aligned} u(x,t) = \sum_{j=1}^{j_u} T_{uj}(t) \varphi_{uj}(x), \quad v(x,t) = \sum_{j=1}^{j_v} T_{vj}(t) \varphi_{vj}(x), \\ \theta(x,t) = \sum_{j=1}^{j_\theta} T_{\theta j}(t) \varphi_{\theta j}(x) \end{aligned} \quad (8)$$

по заданным координатным базисам $\varphi_{uj}(x)$, $\varphi_{vj}(x)$, $\varphi_{\theta j}(x)$, удовлетворяющим граничным условиям, с амплитудами — искомыми функциями времени.

Ортогонализация невязок, полученных при подстановке (8) в (1) к базисным функциям в интервале $x \in [0, l]$, дает систему $j_u + j_v + j_\theta$ уравнений относительно искомого функций. Запишем ее в матричном виде

$$\mathbf{A}_2 \ddot{\mathbf{T}} + \mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{A}_0 \mathbf{T} = \mathbf{G}, \quad (9)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_u \\ \mathbf{T}_v \\ \mathbf{T}_\theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1i} & \mathbf{B}_{1i} & \mathbf{C}_{1i} \\ \mathbf{A}_{2i} & \mathbf{B}_{2i} & \mathbf{C}_{2i} \\ \mathbf{A}_{3i} & \mathbf{B}_{3i} & \mathbf{C}_{3i} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{(1)} \\ \mathbf{G}^{(2)} \\ \mathbf{G}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (i=0,1,2),$$

$$\mathbf{T}_u(t) = [T_{u1} \dots T_{uj_u}]^T, \quad \mathbf{T}_v(t) = [T_{v1} \dots T_{vj_v}]^T,$$

$$\mathbf{T}_\theta(t) = [T_{\theta 1} \dots T_{\theta j_\theta}]^T.$$

Матрицы $\mathbf{A}_{\alpha\beta} = \{a_{ij}^{(\alpha\beta)}\}$, $\mathbf{B}_{\alpha\beta} = \{b_{ij}^{(\alpha\beta)}\}$, $\mathbf{C}_{\alpha\beta} = \{c_{ij}^{(\alpha\beta)}\}$ и векторы $\mathbf{G}^{(\alpha)} = \{g_i^{(\alpha)}\}$ имеют j_u, j_v, j_θ столбцов при $\beta=0,1,2$ соответственно и j_u, j_v, j_θ строк при $\alpha=1,2,3$. Интегральные компоненты матриц зависят от жесткостных, вязкостных и массовых характеристик (2)–(6) стержня и опорной среды.

Решение однородного уравнения, соответствующего (1), представим в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_u(t) = \mathbf{K}_u \exp(\lambda t), \quad \mathbf{T}_v(t) = \mathbf{K}_v \exp(\lambda t), \\ \mathbf{T}_\theta(t) = \mathbf{K}_\theta \exp(\lambda t), \end{aligned} \quad (10)$$

где $\mathbf{K}_u, \mathbf{K}_v, \mathbf{K}_\theta$ — числовые векторы. Подстановка (10) в (9) для однородного уравнения дает характеристическое уравнение степени $2(j_u + j_v + j_\theta)$

$$\det \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_1(\lambda) & \tilde{\mathbf{B}}_1(\lambda) & \tilde{\mathbf{C}}_1(\lambda) \\ \tilde{\mathbf{A}}_2(\lambda) & \tilde{\mathbf{B}}_2(\lambda) & \tilde{\mathbf{C}}_2(\lambda) \\ \tilde{\mathbf{A}}_3(\lambda) & \tilde{\mathbf{B}}_3(\lambda) & \tilde{\mathbf{C}}_3(\lambda) \end{bmatrix} = 0,$$

$$\tilde{\Lambda}_i = \Lambda^{(i0)} + \lambda \Lambda^{(i1)} + \lambda^2 \Lambda^{(i2)},$$

$$\Lambda \in [\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}], \quad (i=1,2,3)$$

Динамические нагрузки аппроксимируем выражением

$$q(x,t) = \bar{q}(x) f(t), \quad q \in [q_x, q_y, m_z] \quad (11)$$

с координатным профилем $\bar{q}(x)$ и безразмерной функцией времени $f(t)$, записанной в форме ряда Фурье

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{k_0} (a_{qk} \cos k\omega_q t + b_{qk} \sin k\omega_q t), \quad (12)$$

где $\omega_q, \tau = 2\pi/\omega_q$ — частота и период заданной динамической нагрузки. Учитывая (11), (12) для векторов $\mathbf{G}^{(\alpha)}$ в (9), получим

$$\mathbf{G}^{(\alpha)}(t) = \bar{\mathbf{G}}^{(\alpha)} \sum_{k=0}^{k_0} (a_{qk} \cos k\omega_q t + b_{qk} \sin k\omega_q t)$$

с интегральными компонентами матрицы $\bar{\mathbf{G}}$.

Частное решение уравнения (9) зададим в форме

$$\mathbf{T}_u(t) = \sum_{k=0}^{k_0} (\mathbf{H}_k^{(u)} \cos k\omega_q t + \mathbf{S}_k^{(u)} \sin k\omega_q t),$$

$$\mathbf{T}_v(t) = \sum_{k=0}^{k_0} (\mathbf{H}_k^{(v)} \cos k\omega_q t + \mathbf{S}_k^{(v)} \sin k\omega_q t),$$

$$\mathbf{T}_\theta(t) = \sum_{k=0}^{k_0} (\mathbf{H}_k^{(\theta)} \cos k\omega_q t + \mathbf{S}_k^{(\theta)} \sin k\omega_q t).$$

Для k -й гармоники имеем систему шести уравнений:

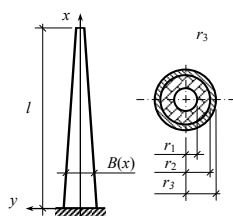


Рис. 2. Расчетная схема дымовой трубы

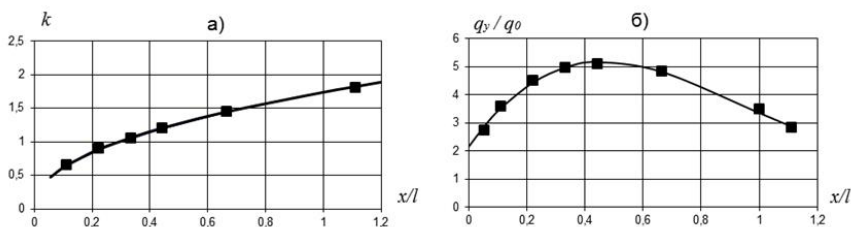


Рис. 3. Аппроксимация функций $k(x)$ (а) и $q_y(x)/q_0$ (б)

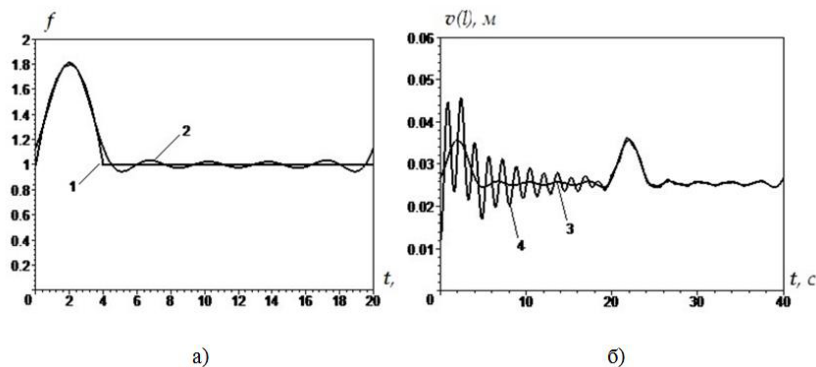


Рис. 4. Аппроксимация $f(t)$ для ветровой нагрузки (а), изменение максимального прогиба $v(l,t)$ в интервале двух периодов (б). Функции $f(t)$: 1 — заданная форма изменения, 2 — расчетная аппроксимация (12). Решения для функции прогиба $v(l,t)$ с учетом статической компоненты: 3 — частное решение, 4 — общее решение

$$\begin{cases} [A^{(i0)} - k^2 \omega_q^2 A^{(i2)}] H_k^{(u)} + k \omega_q A^{(i1)} S_k^{(u)} + \\ + [B^{(i0)} - k^2 \omega_q^2 B^{(i2)}] H_k^{(v)} + k \omega_q B^{(i1)} S_k^{(v)} + \\ + [C^{(i0)} - k^2 \omega_q^2 C^{(i2)}] H_k^{(0)} + \\ + k \omega_q C^{(i1)} S_k^{(0)} = a_{qk} \bar{G}^{(i)}, \quad k = 0, 1, \dots \\ -k \omega_q A^{(i1)} H_k^{(u)} + [A^{(i0)} - k^2 \omega_q^2 A^{(i2)}] S_k^{(u)} - \\ -k \omega_q B^{(i1)} H_k^{(v)} + [B^{(i0)} - k^2 \omega_q^2 B^{(i2)}] S_k^{(v)} - \\ -k \omega_q C^{(i1)} H_k^{(0)} + [C^{(i0)} - \\ -k^2 \omega_q^2 C^{(i2)}] S_k^{(0)} = b_{qk} \bar{G}^{(i)}, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (13)$$

($i = 1, 2, 3$) относительно искомых векторов $H_k^{(u)}, S_k^{(u)}, H_k^{(v)}, S_k^{(v)}, H_k^{(0)}, S_k^{(0)}$.

2. В качестве первого примера выполним динамический расчет на ветровое воздействие двухслойной радиально-слоистой дымовой трубы, имеющей форму усеченного полого конуса (рис. 2). Внутренний слой выполнен из огнеупорного кирпича, а внешний — из стали. Границы слоев описываются выражениями $r_2(x) = r_2^{(0)}(1 - x/l) + r_2^{(l)}x/l$, $r_1(x) = r_2(x) - h_1$, $r_3(x) = r_2(x) + h_2$.

Координатный профиль нагрузки (11) зададим в виде [2]

$$\bar{q}_y(x) = c_x p_0 k(x) B(x),$$

где p_0 — нормативное ветровое давление; c_x — аэродинамический коэффициент; $k(x)$ — коэффициент, учитывающий изменение скорости ветра в зависимости от высоты над поверхностью земли.

Приняты следующие значения параметров: $h_1 = 0,48$ м, $E_1 = 5$ ГПа, $\rho_1 = 1900$ кг/м³; $\eta_1 = 0,015$ с, $h_2 = 0,04$ м, $E_2 = 210$ ГПа, $\rho_2 = 7800$ кг/м³; $\eta_2 = 0,005$ с; $r_2^{(0)} = 3,5$ м, $r_2^{(l)} = 1$ м, $l = 90$ м, $p_0 = 350$ Па, $c_x = 0,7$.

На рис. 3 отражены результаты подбора расчетных функций $k(x) = 1,734 \bar{x}^{0,446}$ (а) и безразмерного координатного профиля $\bar{q}_y(x) = q_0(8,88 \bar{x}^3 - 24,85 \bar{x}^2 + 16,77 \bar{x} - 2,52)$ (б) ($q_0 = c_x p_0$, $\bar{x} = x/l$). Точками отмечены значения величин, найденные по дискретным данным норм [2].

Изменение ветровой нагрузки, описываемое функцией $f(t)$, задавалось в форме параболического импульса в интервале $t \in [0, t_1]$ с последующим значением $f(t) = 1$ при $t \in [t_1, \tau]$. Задав $\tau = 20$ с, $t_1 = 0,2\tau$, $\Delta t = 0,8$ и выполнив интегрирование для пяти гармоник, были вычислены коэффициенты аппроксимации (12). На рис. 4а изображены графики заданной формы изменения нагрузки (линия 1) и расчетной аппроксимации (12) (линия 2).

Пренебрегая сдвигами, примем модель стержня Бернулли ($\theta = v'$). Решены подзадачи: а) статического расчета при воздействии $q_x(x)$, б) статического расчета при воздействии $q_x(x)$ и $\bar{q}_y(x)$ (11), в) о собственных и г) вынужденных колебаниях. Подзадача (а) имеет точное аналитическое решение, в остальных использовался метод Бубнова–Галеркина с тремя координатными функциями

$$\varphi_j(x) = (1 - x/l)^{j+4} + (j+4)x/l - 1, \quad (j = 1, \dots, 3),$$

отражающими упругие линии прогибов в стержне постоянного сечения от действия поперечных нагрузок $q = q_0(1 - x/l)^j$ при соблюдении граничных условий $\varphi_j(0) = 0$, $\varphi_j'(0) = 0$, $\varphi_j''(l) = 0$, $\varphi_j'''(l) = 0$. Основная частота собственных колебаний составила $\omega = 3,91$ с⁻¹.

На рис. 4б приведены графики изменения частного и общего решений для максимального прогиба $v(l,t)$, а на рис. 5 — наибольших сжимающих напряжений в первом и втором слое.

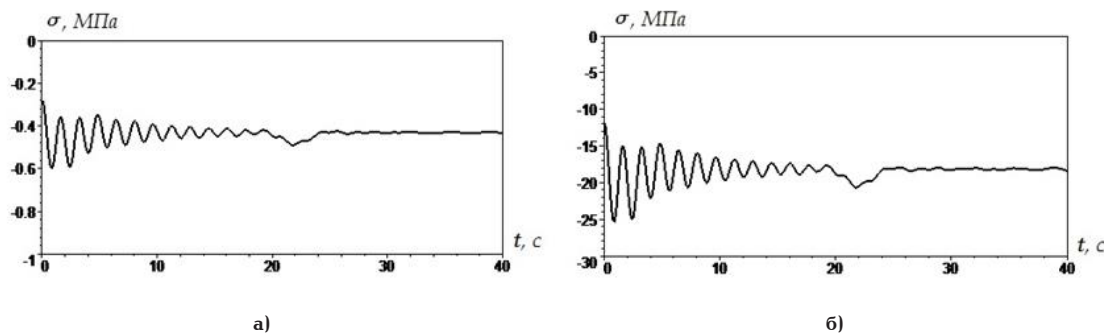


Рис. 5. Изменение наибольшего напряжения в первом (а) и втором (б) слоях

Графики изменения расчетных величин — максимального прогиба и напряжений — иллюстрируют наличие выраженных переходных процессов, обусловленных учетом затухающих собственных колебаний. Отношения максимальных значений динамических величин в этом процессе к соответствующим значениям, вычисленным без учета переходных режимов составили: 1,28 — при оценке прогибов и 1,24 — при оценке напряжений. Это свидетельствует о необходимости выявления всех фаз движения неоднородной системы для оценки её прочности и жесткости при динамических воздействиях, в том числе — ветровых. Расчеты показывают, что наиболее опасными являются начальные моменты времени, при которых происходит наложение циклов собственных колебаний расчетных величин с их максимумами при вынужденном движении, описываемым частным решением.

На результаты динамического расчета, кроме величины динамических пульсаций ветра, существенное влияние оказывают факторы относительной продолжительности t_f/τ_q пульсаций ветра и относительная величина периодов собственных и вынужденных колебаний. Последнее связано с наступлением околорезонансных состояний.

3. Одной из актуальных задач динамического расчета мостов является выявление критических режимов движения подвижной нагрузки, в частности — скорости ее перемещения и дистанции между движущимися объектами.

Выполнив переход к центральным осям ux (при оценке жесткостей D), обеспечив удовлетворение $D_s(x) \equiv 0$, пренебрегая смешанными характеристиками C_s и m_s , получим из (1) приближенное уравнение поперечных колебаний вязкоупругой неоднородной балки

$$(D_I v'' + C_I \dot{v}'')'' + m_A \ddot{v} - (m_I \dot{v}')' = m_z' + q_y. \quad (14)$$

Для нахождения частного решения уравнения (14) сформулируем модель динамической нагрузки [3]. Будем считать, что в момент времени t она характеризуется координатами начала x_b , конца x_e , длиной l_q законом движения $x_b(t)$ и имеет постоянную интенсивность $q_y(x, t) = \text{const}$ при $m_z = 0$. Тогда для случая $l_q < l$, применяя формулу трапеций, вектор правой части (9) представим в виде

$$\mathbf{G}(t) = F[\varphi_1(x_q) \quad \varphi_2(x_q) \dots \varphi_n(x_q)]^T, \quad (15)$$

где $x_q(t) = (x_b + x_e)/2$ — координата центра подвижной нагрузки; $F = q_y l_q$.

Дальнейшее решение, согласно вышеизложенной методике, выполняется путем разложения век-

тора (15) и искомого решение в ряды Фурье по времени. Система (13) принимает вид

$$\begin{cases} [\mathbf{A}_{02} - p^2 \mathbf{A}_{22}] \mathbf{H}_\alpha + p \mathbf{A}_{12} \mathbf{S}_\alpha = \mathbf{A}_\alpha, \\ -p \mathbf{A}_{12} \mathbf{H}_\alpha + [\mathbf{A}_{02} - p^2 \mathbf{A}_{22}] \mathbf{S}_\alpha = \mathbf{B}_\alpha, \end{cases} \quad (16)$$

$$p = \alpha \pi \dot{x}_q / l.$$

Для нагрузки постоянной интенсивности может быть выполнено дополнительное упрощение. А именно, с целью обеспечения соответствия аппроксимации (12), целесообразно принять в качестве координатного базиса спектр синусов $\varphi_j(x) = \sin(j\pi x/l)$. Тогда для вектора (15) получим

$$\mathbf{G}(t) = \mathbf{F} \mathbf{E} \mathbf{S}_q$$

$$\mathbf{S}_q(t) = [\sin(\pi x_q/l) \quad \sin(2\pi x_q/l) \dots \sin(n\pi x_q/l)]^T$$

(\mathbf{E} — единичная матрица). В этом случае ряд (12) при фиксированном числе удерживаемых членов и соответствующее ему решение уравнения (14) являются формально точными. В системе (16) следует принять: $p = \alpha \pi u / l$, $\mathbf{B}_\alpha = 0$, а для вектора \mathbf{A}_α — столбец с номером α матрицы \mathbf{E} .

Рассмотренная постановка построения аналитического решения позволяет исследовать критические режимы движения нагрузки, в частности — выявлять критическую скорость u_{cr} , при которой перемещения и напряжения неограниченно возрастают. Критерием этого является равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов системы (16)

$$R(u_{cr}) = (\mathbf{A}_{02} - p^2 \mathbf{A}_{22})^2 - (p \mathbf{A}_{12})^2 = 0,$$

$$p = \alpha \pi u_{cr} / l. \quad (17)$$

Условие (17) дает спектр $2n$ критических скоростей u_{cr} , из которых практическое значение имеет минимальная скорость.

Рассмотрим модельный расчет стале-бетонного пролета балочного моста, выполненного из двутавров, объединенных сверху бетонной монолитной плитой проезжей части (рис. 6). Нагрузка длиной $l_q < l = 36$ м имеет равнодействующую F , движется с постоянной скоростью u . Приняты следующие характеристики материалов F (ГПа), η (МПа), ρ (кг/м³): 210, 2, 7800 — для стали и 23, 4, 2100 — для бетона.

В результате расчета при разложении прогибов по синусоидальным координатным функциям $\sin(i\pi x/l)$, ($i = 1, \dots, n$), обеспечивающим удовлетворение условий (7), найдено решение $v(x, x_q)$ при $\alpha = n$. На рис. 7 показаны формы прогибов

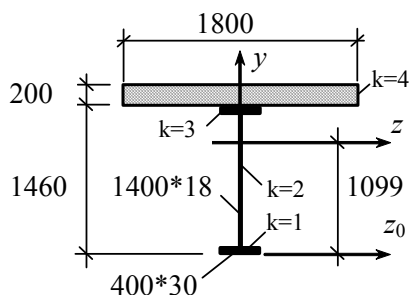
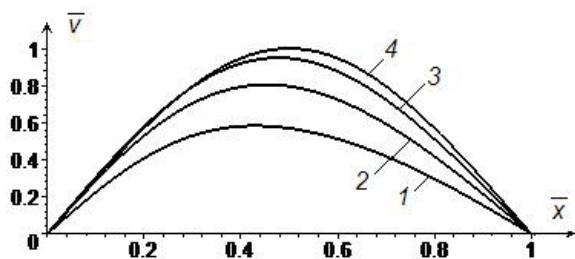


Рис. 6. Представительный элемент поперечного сечения

Рис. 7. Прогибы $\bar{v}(x)$
1 — $x_q=0,2l$; 2 — $x_q=0,3l$; 3 — $x_q=0,4l$; 4 — $x_q=0,5l$

$\bar{v} = v(x, x_q) / v(0,5l; 0,5l)$ при различных положениях x_q подвижной нагрузки. Отклонения прогиба $\bar{v}(0,25l; 0,3l)$, найденного при различном числе координатных функций $n=1,2,3,4,5$, по отношению к прогибу при $n=10$, составили — 10,02; — 0,67; — 0,25; — 0,25; — 0,07 (%). То же для прогиба $\bar{v}(0,25l; 0,5l)$ составляет 1,36; 1,36; 0,10; 0,10; — 0,06 (%). Погрешность максимального прогиба $\bar{v}(0,5l; x_q)$ для $n=1$ при $x_q/l = 0,2; 0,3; 0,4; 0,5$ получена в размере 1,98; 0,67; — 0,72; — 1,43 (%). Анализ численных данных показал, что качественно правильное решение удовлетворительной точности может быть получено уже при двух координатных функциях.

Критическая скорость $u_{cr} = 44,9$ м/с² и параметры собственных колебаний пролетного строения в соответствии с уравнением (17) удовлетворяют условиям

$$u_{cr} = \omega l / \pi, \quad T = 2t_{cr} \quad (18)$$

Книжная полка

51/М96

Мышлявцева, М. Д. *Функции комплексной переменной : учеб. пособие [Электронный ресурс] / М. Д. Мышлявцева. — Омск : Изд-во ОмГТУ, 2015. — 1 0=эл. опт. диск (CD-ROM).*

Рассмотрены функции комплексной переменной. Изложение теоретического материала сопровождается решением задач. Приведены контрольные вопросы и задачи для самостоятельной работы. Предназначено для студентов 2–3 курсов всех форм обучения технических специальностей Омского государственного технического университета.

где ω , T — частота и период колебаний, а $t_{cr} = l / u_{cr}$ — критическое время нахождения нагрузки в пролете. Физический смысл соотношения (18) заключается в том, что скорость становится критической (возбуждающей резонанс), если время нахождения нагрузки в пролете равно половине периода собственных колебаний — во время его перемещения вниз. Резонанс наступает, если последующие нагрузки, двигающиеся с такой же скоростью, будут загружать пролет именно в эту половину периода. Тогда дистанция между ними составляет $T / u_{cr} = 2l$.

Заключение. Для композитного стержня нового конструктивного исполнения, разработана расчетная модель, постановка и метод решения прямых динамических задач на основе метода Бубнова — Галеркина при разнообразных видах воздействий и физических структур. Посредством введения интегральных функциональных жесткостных, вязкостных, массовых характеристик стержня и функциональных характеристик опорной среды, учета деформаций сдвига обеспечивается корректное отражение напряженно-деформированного состояния неоднородного стержня.

Библиографический список

1. Немировский, Ю. В. Динамический расчет систем профилированных композитных стержней / Ю. В. Немировский, А. В. Мищенко // Вычислительная механика сплошных сред (УРО РАН). — 2015. — Т. 8, № 2. — С. 188–199.
2. СНиП 2.01.07-85. Нагрузки и воздействия / Госстрой России. — М. : Стройиздат, 2005. — 48 с.
3. Мищенко, А. В. Динамический расчет слоисто-неоднородных балочных мостов / А. В. Мищенко, Ю. В. Немировский // Всерос. 65-я науч.-техн. конф. СибАДИ. — Омск : СибАДИ, 2011. — Кн. 1. — С. 30–35.

МИЩЕНКО Андрей Викторович, кандидат технических наук, доцент (Россия), доцент кафедры строительной механики Новосибирского государственного архитектурно-строительного университета.

Адрес для переписки: mavr@hnet.ru

НЕМИРОВСКИЙ Юрий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН.

Адрес для переписки: nemirov@itam.nsc.ru

Статья поступила в редакцию 11.09.2015 г.

© А. В. Мищенко, Ю. В. Немировский

МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ЭФФЕКТОВ В УДАРНО-ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССАХ В КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕДАХ

На основе модели вязкоупругого тела максвелловского типа, сочетающей преимущества континуального описания с учетом микроструктурных механизмов необратимой деформации, анализируются релаксационные процессы реализующихся при ударном сжатии конденсированных сред. Рассмотрены выделение и затухание упругого предвестника, релаксация касательных напряжений во фронте ударной волны, релаксационные процессы в тонких прослойках и при взаимодействии ударных волн с волнами разрежения, при ударном сжатии пористых и композитных сред, импульсном воздействии интенсивных энергетических пучков.

Ключевые слова: ударное сжатие, упруговязкая среда, релаксация, касательные напряжения.

Получение экспериментальной информации об ударно-волновых процессах осложняется тем, что в них достигаются экстремальные состояния за и на короткие, порядка микросекунд, промежутки времени, поэтому для интерпретации зачастую косвенных результатов и вычисления основных параметров привлекаются модельные представления о свойствах сред. Обычно используются соотношения для плоских стационарных ударных волн, выражающие законы сохранения, полученные в рамках модели сплошных сред. Следует помнить, однако, что ряд процессов, которые принято считать стационарными, может считаться таковыми только после некоторых переходных этапов, связанных с релаксацией определенных параметров среды (касательных напряжений, тепловых потоков и т.д.). В данной работе анализируются некоторые из таких релаксационных процессов, учет которых при анализе экспериментальных данных может привести к ошибочным количественным результатам и неверным качественным выводам. Для анализа используются модели вязкоупругого тела максвелловского типа, хорошо зарекомендовавшие себя в решении ряда задач ударно-волнового деформирования [1–4]. Модели позволяют сочетать преимущества макроскопического описания в рамках континуального подхода с учетом микроструктурных механизмов необратимых деформаций.

В основе моделей — формулировка основных соотношений, выражающих законы сохранения для упруговязкой сплошной среды максвелловского типа в дифференциальной форме в случае конечных деформаций, приведенная в [5]. Принципиальной особенностью этой модели является включение в определяющие соотношения времени релаксации касательных напряжений в форме непрерывной зависимости от параметров, характеризующих состояние среды. В последующих обобщениях исходной модели учитываются и другие релаксационные

процессы и строятся зависимости для соответствующих времен релаксации. Аналитический вид зависимостей выбирается на основе учета микроструктурных механизмов необратимого деформирования.

В случае поликристаллических сред основным микроструктурным механизмом релаксации касательных напряжений является эволюция дислокационного ансамбля. Воспользуемся связью времени релаксации касательных напряжений τ со скоростью пластической деформации $\dot{\xi}_p$, тогда по формуле Орована

$$\frac{d\varepsilon_p}{dt} = \dot{\xi}_p, \quad \tau \sim \tau_0 (N_m U)^{-1},$$

в которой ε_p — пластическая деформация, τ_0 — параметр, который зависит от температуры, $N_m U$ — плотность подвижных дислокаций и их скорость.

В полимерах происходящие при механических воздействиях релаксационные процессы связаны с различными формами теплового движения структурных элементов полимера, характеризующихся своим спектром времен релаксации. Как всякий термофлуктуационный процесс, релаксация будет характеризоваться энергией активации U_i , а для соответствующего времени τ_i можно использовать формулу Больцмана — Аррениуса

$$\tau_i = \tau_{0i} \exp(U_i/kT),$$

где τ_{0i} — характерное время релаксационного перехода. Полное время релаксации можно представить в виде суммы слагаемых, соответствующих механизмам релаксации на разных структурных уровнях:

$$\tau = \sum_i \tau_i = \sum_i \tau_{0i} \exp\left(\frac{U_{0i}}{kT}\right).$$

При нагружении полимера возникающие напряжения изменяют величину энергии активации, понижая потенциальный барьер релаксационного перехода. Учет этого обстоятельства приводит к соотношению

$$\tau = \sum_i \tau_{0i} \exp\left(\frac{U_{0i} - \alpha_{0i} \sigma_{int}}{kT}\right),$$

где σ_{int} — интенсивность касательных напряжений, α_{0i} — эффективный активационный объем, трактуемый как объем активируемого структурного элемента. В общем случае α_{0i} может рассматриваться как функция температуры и скорости деформации, U_i является более сложной функцией характеристик процесса. Анализ основных релаксационных механизмов и предварительные расчеты показали, что в формуле для τ достаточно ограничиться двумя слагаемыми.

Необходимые для конкретизации приведенных соотношений параметры выбираются на основе минимизации расхождения решения задачи о динамическом растяжении тонкого стержня с экспериментальными диаграммами деформирования, или другими экспериментальными данными. Детально методики построения зависимости для времен релаксации описаны в работах [1, 4, 6–8].

Другой отличительной особенностью моделей является уравнение состояния среды, включающее удельной внутренней энергии или иного термодинамического потенциала от второго инварианта тензора деформаций. В качестве основы для его построения используются принципы уравнения Ми–Грюнайзена [3, 4, 9]. Один из вариантов уравнения состояния имеет вид

$$E(\delta, D, S) = E_c(\delta) + E_D(\delta, D) + E_t(\delta, S).$$

Здесь E , E_c , E_D , E_t — полная удельная внутренняя энергия и её упругая, девиаторная и тепловая составляющие соответственно, $\delta = V_0/V$ — отношение начального удельного объема к текущему, D , S — второй инвариант девиатора тензора деформаций и энтропия.

В рамках построенных и реализованных моделей удается учесть и смоделировать следующие релаксационные процессы:

- для кристаллических и полимерных сред — релаксация касательных напряжений;
- для сред пористых и испытывающих полиморфные превращения — релаксация касательных напряжений и удельного объема;
- для композитов — релаксация касательных напряжений и несовместности деформаций компонентов;
- для термо-упруго-вязких сред — релаксация касательных напряжений и теплового потока.

Известно, что в определенном диапазоне амплитуд ударных волн в материалах, демонстрирующих упругопластические свойства, происходит расщепление ударной волны на упругий предвестник и пластическую волну. Выделение упругого предвестника и выход расщепляющейся ударной волны на стационарный двухволновой режим — один из рассматриваемых релаксационных процессов. Указанные особенности процесса хорошо передаются в проведенных расчетах распространения ударной ударных волн [1]. Сказанное иллюстрируется на рис. 1, где показаны рассчитанные профили массовой скорости на различные моменты времени

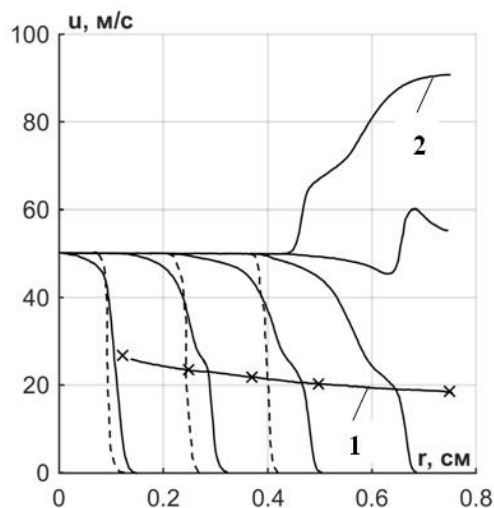


Рис. 1. Упругий предвестник в прямой и отраженной ударных волнах

в железной пластине. Достаточно наглядно, несмотря на сглаживание фронтов, связанное с наличием аппроксимационной вязкости применявшейся разностной схемы, прослеживается процесс выделения упругого предвестника и установления двухволновой конфигурации. Кривая 1 на рис. 1 — экспериментальная зависимость изменения амплитуды упругого предвестника по мере его распространения в железе Армко [10]. Ход кривой полностью соответствует наблюдающемуся в расчете затуханию амплитуды упругого предвестника. Его скорость с хорошей точностью совпадает со скоростью распространения упругих возмущений, вычисленной по известным упругим постоянным металла.

Расщепление ударной волны на упругий предвестник и пластическую волну может происходить и в случае, когда она распространяется по материалу, уже сжатому ударной волной (вторичное сжатие). Это связано с особенностями протекания релаксационных процессов и также воспроизводится в расчетах по использованной модели [1]. В задаче, результаты решения которой приведены на рис. 1, вторичное сжатие реализуется при отражении ударной волны от правой границы расчетной области, имитировавшей жесткую стенку (кривая 2).

Проведенные расчеты хорошо воспроизводят и другой релаксационный процесс, сопровождающий распространение ударных волн — релаксацию касательных напряжений во фронте ударной волны, зависящую от амплитуды ударной волны и непосредственно связанную с шириной зоны ударного перехода. На рис. 2 показана рассчитанная эволюция касательных напряжений для трех амплитуд ударных волн в полиметилметакрилате (1 — упругая волна, 2 — двухволновая конфигурация, 3 — ударная волна большой амплитуды, при которой уже не выделяется упругий предвестник) [4].

Анализ результатов показывает, что ширина фронта стационарной ударной волны зависит от прочностных характеристик материала.

Очень существенна роль релаксационных процессов в переходных явлениях, возникающих в тонких прослойках — изолирующих прокладках, используемых при установке в образцах

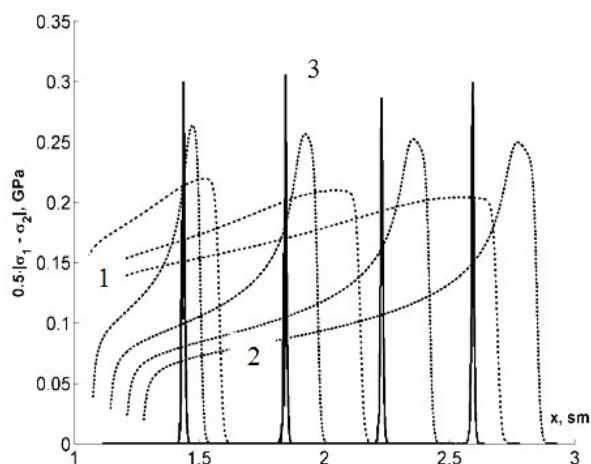


Рис. 2

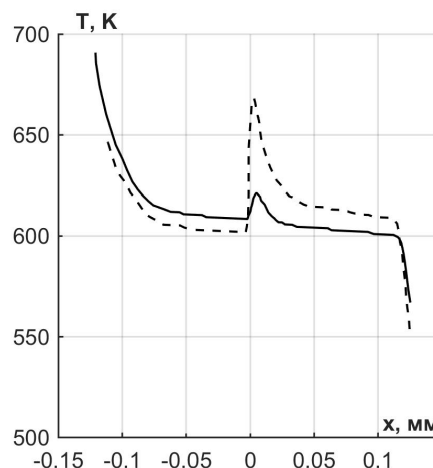


Рис. 3

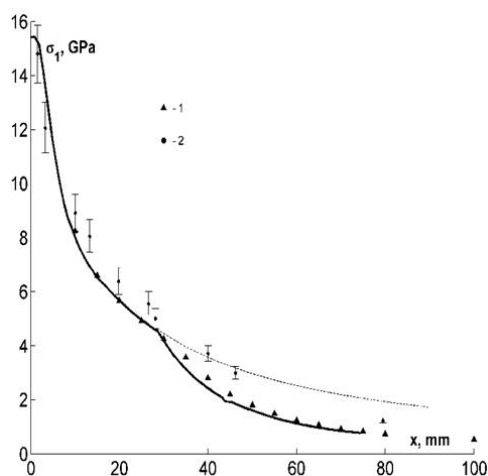


Рис. 4

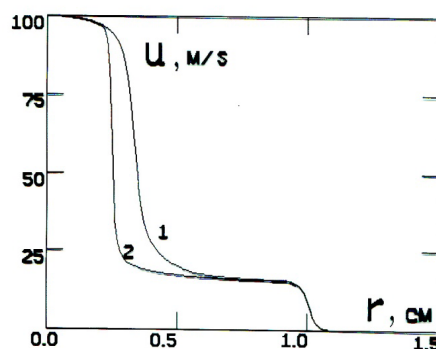


Рис. 5

манганиновых датчиков, применяющихся для измерения давления в ударных волнах. При этом даже близость акустических импедансов материалов прокладок и исследуемых образцов не исключает возникновения релаксационного процесса, связанного с разрывом касательных напряжений. Этим же объясняется несимметричная реакция термпарного датчика температуры относительно направления прохождения ударной волны, в результате чего скачок температуры на контактной границе зависит от того, в каком порядке проходит ударная волна по материалам, образующим термопару [11]. Так, на рис. 3 показана эволюция температуры при прохождении плоской ударной волны интенсивностью 40 ГПа через плоскую границу между константаном и медью (материалы, образующие термопару). Здесь 1 — переход волны из константана в медь, 2 — из меди в константан. Профили массовой скорости, напряжений и плотности при переходе через границу остаются неизменными [11].

Существенную роль играют релаксационные процессы при взаимодействии ударных волн с волнами разрежения. Их особенности рассмотрены на примере одномерной задачи о взаимодействии плоской ударной волны с догоняющей волной разгрузки. На рис. 4 приведены результаты расчета затухания амплитуды ударной волны в полиметилметакрилате в сравнении с экспериментальными данными, полученными в двух различных постанов-

ках [4]. Сплошная линия соответствует экспериментам 1, пунктир — экспериментам 2. Роль релаксационных процессов во взаимодействии ударных волн с волнами разрежения обсуждалась в [12].

При описании ударного сжатия пористых сред принципиальным является учет не только релаксации касательных напряжений, но и релаксации удельного объема (плотности). В модели [6] построена зависимость времени релаксации удельного объема от параметров, характеризующих состояние среды, с использованием которой удается описать достаточно тонкие эффекты, сопровождающие распространение ударных волн в пористом материале. Например, на рис. 5 приведены рассчитанные профили ударных волн одинаковой амплитуды в средах одинаковой пористости, но с разным характерным размером пор. Расчет показывает, что ширина переходной зоны в этих средах оказывается различной.

В случае композитов, кроме учета касательных напряжений в материалах компонентов, модели дополняются учетом релаксации несоответствия упругих деформаций [7]. Это позволило смоделировать ряд достаточно тонких особенностей ударно-волнового деформирования композитов, например, трехволновую структуру ударной волны. Расчеты адекватно описывают экспериментальные данные [13].

При импульсном воздействии на материалы интенсивных энергетических потоков (лазерного

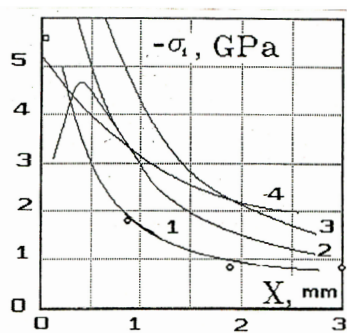


Рис. 6

излучения, ионного или электронного пучка) ударная волна формируется в результате интенсивного испарения и теплового расширения вещества. В этих случаях существенную роль может играть релаксация теплового потока и ограниченность (конечность) скорости передачи тепла. Релаксационные эффекты в таких процессах рассмотрены на основе сформулированной модели термоупруговязкой среды, включающей гиперболическое уравнение теплопроводности [8]. На рис. 6 результаты расчета затухания амплитуды ударной волны, вызванной воздействием лазерного импульса, по данной модели (кривая 1) сравниваются с экспериментальными данными (точки) и расчетами по гиперболическому уравнению теплопроводности с постоянным значением времени релаксации теплового потока (кривые 2, 3) и по модели упругопластического деформирования, учитывающей испарение вещества. Приведенные данные демонстрируют преимущества построенной модели.

Библиографический список

1. Мержиевский, Л. А. Численное моделирование ударно-волновых процессов в металлах / Л. А. Мержиевский, А. Д. Реснянский // Физика горения и взрыва. — 1984. — № 5. — С. 114–122.
2. Мержиевский, Л. А. Прочностные эффекты в обратной кумуляции / Л. А. Мержиевский, А. Д. Реснянский, В. М. Титов // Доклады АН СССР. — 1986. — Т. 290, № 6. — С. 1310–1314.
3. Мержиевский, Л. А. Моделирование динамического сжатия поликристаллического Al_2O_3 / Л. А. Мержиевский // Физика горения и взрыва. — 1998. — № 6. — С. 85–94.

4. Мержиевский, Л. А. Моделирование ударно-волнового деформирования полиметилметакрилата / Л. А. Мержиевский, М. С. Воронин // Физика горения и взрыва. — 2012. — № 2. — С. 113–123.
5. Годунов, С. К. Элементы механики сплошной среды / С. К. Годунов. — М.: Наука, 1978. — 303 с.
6. Мержиевский, Л. А. Моделирование динамического сжатия пористого железа / Л. А. Мержиевский, А. В. Тягельский // Физика горения и взрыва. — 1994. — № 4. — С. 124–133.
7. Мержиевский, Л. А. Моделирование ударно-волновых процессов в однонаправленных композитах / Л. А. Мержиевский, А. Д. Реснянский, Е. И. Роменский // ФГВ. — 1993. — № 5. — С. 72–75.
8. Merzhievsky, L. A. Wave processes in thermoviscoelastic medium / L. A. Merzhievsky, Y. F. Kondratyev // J. Phys. IV. — 1991. — V. 1, С. 3. — P. 503–510.
9. Воронин, М. С. Моделирование ударно-волновых процессов в алюминии с использованием малопараметрического уравнения состояния при нешаровом тензоре деформаций / М. С. Воронин, Е. И. Краус, Л. А. Мержиевский // Известия Алтайского гос. ун-та. Математика и механика; управление, вычислительная техника и информатика; физика. — 2014. — Т. 81. — № 1. — С. 32–35.
10. Тейлор, Дж. У. Динамика дислокаций и динамическая текучесть / Дж. У. Тейлор // Механика: сб. пер. — 1966. — Т. 98. — № 4. — С. 145–152.
11. Мержиевский, Л. А. Релаксационные эффекты в термодинамических измерениях температуры при ударном сжатии металлов / Л. А. Мержиевский, А. Д. Реснянский // Доклады IV Всесоюз. совещания по детонации. — 1988. — Т. 2. — С. 20–26.
12. Мержиевский, Л. А. О выборе модели для описания затухания ударных волн в металлах / Л. А. Мержиевский, А. Д. Реснянский // Физика горения и взрыва. — 1983. — № 1. — С. 99–105.
13. Мержиевский, Л. А. Динамическое сжатие модельного однонаправленного композита / Л. А. Мержиевский, О. А. Нижников // Физика горения и взрыва. — 1993. — № 5. — С. 76–80.

МЕРЖИЕВСКИЙ Лев Алексеевич, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник. Адрес для переписки: merzh@hydro.nsc.ru

Статья поступила в редакцию 11.09.2015 г.

© Л. А. Мержиевский

Книжная полка

51/О-92

Охорзин, В. А. Теория управления: учеб. для вузов по специальности «Прикладная математика» и направлению «Прикладная математика» / В. А. Охорзин, К. В. Сафонов. — СПб.: Лань, 2014. — 223 с.

В учебнике рассматриваются модели и методы автоматического и оптимального управления системами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями на основе передаточных функций, частотных методов, методов вариационного исчисления, принципа максимума, динамического программирования и метода моментов. Теория сопровождается многочисленными примерами и программами в системе MatCAD. Алгоритмы управления иллюстрированы примерами задач управления орбитами геостационарных спутников.

Предназначен студентам высших учебных заведений, обучающимся по направлениям подготовки «Информатика и вычислительная техника», «Прикладная математика», а также всем, кто интересуется применением методов классического и оптимального управления.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛИ РАЗВИВАЮЩЕГОСЯ ПОВРЕЖДЕНИЯ ПРИ ОЦЕНКЕ ПРОЧНОСТИ СЛОИСТЫХ УГЛЕПЛАСТИКОВ С РАЗЛИЧНЫМИ КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРЯЖЕНИЙ

Представлен подход, основанный на модели развивающегося повреждения для оценки методом конечных элементов прочности образцов, выполненных из слоистых углепластиков и содержащих различные концентраторы напряжений. На основе сравнения с экспериментальными данными проведен анализ влияния размера конечного элемента и величины шага нагружения на результат расчета по данному подходу. Приведены результаты расчета прочности при растяжении для образцов с отверстием, зенкованным отверстием, отверстием, заполненным болтом, и с рядом отверстий с учетом подобранных параметров сетки и шага нагружения.

Ключевые слова: слоистый композиционный материал, модель развивающегося повреждения, критерии прочности, метод конечных элементов.

На фоне широкого использования композиционных материалов в авиации вопрос о необходимости разработки надежных расчетных методов, способных прогнозировать поведение и разрушение в наиболее ответственных зонах элементов конструкции летательных аппаратов, выполненных из композиционных материалов (КМ), становится все более актуальным. С этой точки зрения, наиболее перспективным является подход, основанный на модели развивающегося повреждения [1, 2], который, моделируя процесс развития повреждений в КМ и опираясь лишь на паспортные данные монослоев и схемы укладок, позволяет определить величину нагрузки, при которой образец или элемент конструкции теряет свою несущую способность.

Среди трудов, посвященных модели развивающегося повреждения, встречаются исследования, относящиеся к прочности образцов с отверстием, с нагруженным отверстием, образцов болтового соединения и др.

В настоящей работе объединены результаты расчета прочности образцов, содержащих отверстия, зенкованные отверстия, отверстия, заполненные болтом, и образцов с рядом отверстий и продемонстрирована способность подхода адекватно предсказывать разрушающую нагрузку для рассматриваемых концентраторов напряжений.

Расчет прочности образцов из слоистых углепластиков с использованием подхода, основанного

на модели развивающегося повреждения (МРП), представляет собой итерационный процесс, в котором при постепенном росте нагрузки оценивается степень накопления поврежденного материала в исследуемом образце.

Основные этапы алгоритма расчета по данному подходу следующие:

1. Создание конечно-элементной модели (КЭМ) образца.
2. Расчет и анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) при заданном уровне нагружения образца.
3. Анализ на наличие повреждений по критериям разрушения, описывающим различные механизмы разрушения, возникающие в пакете при данном уровне нагрузки.
4. Проведение локальной деградации механических свойств материала при наличии повреждений в зависимости от обнаруженного механизма разрушения и возвращение к пунктам 2 (где проводится перерасчет модели с ухудшенными механическими свойствами материала, оставаясь на этом же уровне нагрузки), 3 и 4.

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока при текущем уровне нагрузки повреждения не перестанут накапливаться.

5. Проведение проверки на наличие разрушений, приводящих к потере несущей способности образца на каждом этапе.

Мера деградации механических свойств

Механизм разрушения	Мера деградации свойств
Растрескивание матрицы при растяжении	$E_y = 0,2E_y'; G_{xy} = 0,2G_{xy}'; G_{yz} = 0,2G_{yz}'$
Растрескивание матрицы при сжатии	$E_y = 0,4E_y'; G_{xy} = 0,4G_{xy}'; G_{yz} = 0,4G_{yz}'$
Разрушение волокна при растяжении	$E = 0,07 E_x$
Разрушение волокна при сжатии	$E = 0,14 E_x$
Отрыв матрицы от волокна	$G_{xy} = \mu_{xy} = 0$
Расслоение	$E_z = G_{yz} = G_{xz} = \mu_{yz} = \mu_{xz} = 0$

Таблица 2

Характеристики материала монослоя образцов групп I и II

группа	$t_{m'}$, мм	$X_{t'}$, кгс/мм ²	E_{1+} , кгс/мм ²	$Y_{t'}$, кгс/мм ²	E_{2+} , кгс/мм ²	μ_{12}
I	0,14-0,15	176,3	12653	5,1	816	0,33
II	0,12±0,01	90,0	11500	4,3	825	0,29
группа	X_c , кгс/мм ²	$E_{1b'}$, кгс/мм ²	Y_c , кгс/мм ²	$E_{2'}$, кгс/мм ²	S_{xy} , кгс/мм ²	$G_{12'}$, кгс/мм ²
I	142,9	10204	29,6	806	8,8	387,7
II	90,0	11000	11,7	900	12,0	300,0

Примечание: t_m — толщина монослоя, μ — коэффициент Пуассона; E_+ , E , G — модули упругости на растяжение, сжатие, сдвиг; 1, 2, 3 — оси местной системы координат вдоль волокон, поперек волокон, по высоте.

6. Остановка расчёта при потере несущей способности образца либо увеличение прикладываемой нагрузки и повторение пунктов 2 — 4.

Оценка НДС проведена на базе трёхмерной КЭМ, реализованной в конечно-элементном комплексе ANSYS. Для моделирования слоёв был выбран восьмиузловой объёмный трёхмерный конечный элемент. Каждый слой в укладке образца моделировался как однородный ортотропный материал с характеристиками монослоя с заданием для каждого слоя локальной системы координат, соответствующей углу армирования в укладке.

Для проведения проверки на наличие повреждённых использовали критерии разрушения типа Хашина для задачи в объёмной постановке, позволяющие описывать следующие механизмы разрушения внутри пакета, которые могут быть применены для широкого класса концентраторов напряжений [3]:

а) растрескивание матрицы в слоях образца при растяжении и сжатии, соответственно:

$$\left(\frac{\sigma_y}{Y_t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{xy}}{S_{xy}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{yz}}{S_{yz}}\right)^2 \geq 1 \text{ при } \sigma_y > 0;$$

$$\left(\frac{\sigma_y}{Y_c}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{xy}}{S_{xy}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{yz}}{S_{yz}}\right)^2 \geq 1 \text{ при } \sigma_y < 0;$$

б) разрушение волокон в образце при растяжении и сжатии, соответственно:

$$\left(\frac{\sigma_x}{X_t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{xy}}{S_{xy}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{xz}}{S_{xz}}\right)^2 \geq 1 \text{ при } \sigma_x > 0;$$

$$\left(\frac{\sigma_x}{X_c}\right) \geq 1 \text{ при } \sigma_x < 0;$$

в) отрыв матрицы от волокна посредством сдвига:

$$\left(\frac{\sigma_x}{X_c}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{xy}}{S_{xy}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{xz}}{S_{xz}}\right)^2 \geq 1 \text{ при } \sigma_x < 0;$$

г) расслоение:

$$\left(\frac{\sigma_z}{Z_t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{xz}}{S_{xz}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{yz}}{S_{yz}}\right)^2 \geq 1 \text{ при } \sigma_z > 0;$$

$$\left(\frac{\sigma_z}{Z_c}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{xz}}{S_{xz}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{yz}}{S_{yz}}\right)^2 \geq 1 \text{ при } \sigma_z < 0,$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}$ — текущие нормальные и касательные напряжения в образце, возникающие в процессе его нагружения; $X_t, Y_t, Z_t, X_c, Y_c, Z_c$ и S_{xy}, S_{yz}, S_{xz} — значения пределов прочности на растяжение, сжатие и сдвиг (x, y и z — оси локальной системы координат слоя, где x ориентирована вдоль волокна; ось y — в поперечном направлении).

После анализа разрушений при наличии повреждённых в соответствии с механизмом разрушения производилась деградация механических свойств. Мера деградации механических свойств определялась выражениями, приведенными в табл. 1. При появлении разрушений сразу по нескольким критериям степень деградации механических свойств определялась комбинацией выражений для соответствующих критериев.

Геометрические параметры образцов групп I и II

группа	тип КН	t , мм	b , мм	l , мм	d_o , мм	$d_{зо}$, мм	$l_{отв}$, мм
I	О	7,14	36,0	70,0	6,0	—	—
	ОБ	7,14	36,0	70,0	6,0	—	—
	ЗО	7,14	36,0	70,0	6,0	12,0	—
II	О	5,68	180,0	380,0	33,0	—	—
	РО	5,68	120,0	160,0	20,0	—	40,0

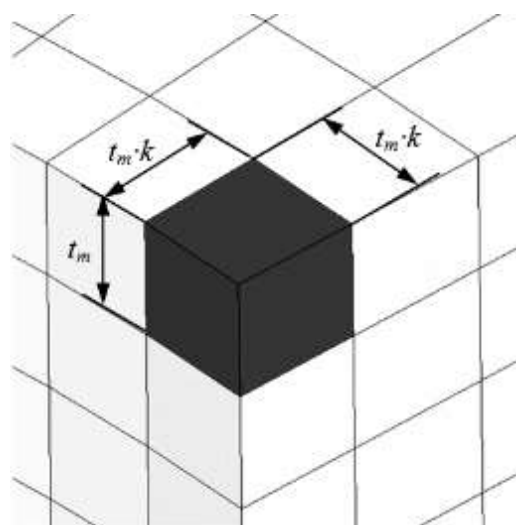


Рис. 1. Фрагмент сетки КЭ

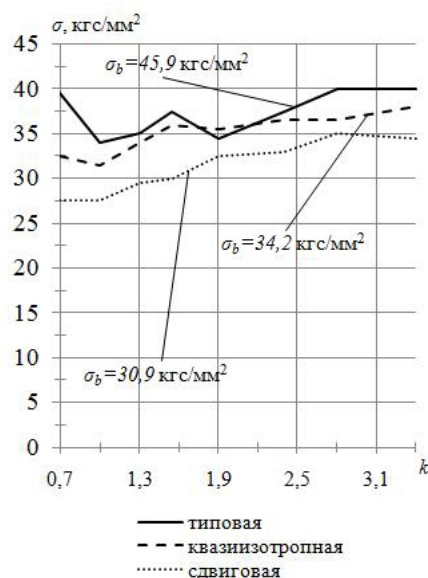


Рис. 2. Результаты сравнения

Для контроля несущей способности на основе конечно-элементного расчёта выстраивалась диаграмма «нагрузка – перемещение» для контрольного сечения исследуемого образца. Наличие скачка в перемещениях контрольного сечения на диаграмме служило критерием потери образцом несущей способности.

Объектом исследования данной работы являются образцы, выполненные на основе двух материалов монослоев, содержащие различные концентраторы напряжений. В табл. 2 представлены механические характеристики для двух монослоев I и II (для удобства все исследуемые образцы с различными концентраторами напряжений (КН) были объединены в группы I и II в соответствии с материалом монослоя, из которого они изготовлены).

Группа образцов I содержит образцы с тремя типами концентраторов напряжений: отверстие (О); отверстие, заполненное болтом (ОБ); зенкованное отверстие (ЗО). Группа образцов II включает в себя образцы с отверстием и рядом отверстий (РО). Геометрические параметры образцов приведены в табл. 3, где t — толщина образца, b — ширина, l — длина образца за вычетом захватной части, d_o — диаметр отверстия, $d_{зо}$ — диаметр зенкованной части отверстия, $l_{отв}$ — расстояние между центрами отверстий в образцах с рядом отверстий.

Процентное содержание слоев в укладках образцов группы I следующее: типовая (0 — 41,2 %; $\pm 45^\circ$ — 39,2 %; 90 — 19,6 %), квазиизотропная (0 — 27,5 %; $\pm 45^\circ$ — 47,0 %; 90 — 25,5 %), сдвиговая (0 — 11,8 %; $\pm 45^\circ$ — 78,4 %; 90 — 9,8 %), всего по толщине укладывается 51 слой. Процентное содержание слоев в укладках образцов группы II (0 — 42,8 %; $\pm 45^\circ$ — 57,2 %), всего по толщине укладывается 15 слоев, из которых средний слой — слой полимерсотопласта (ПСП-1) толщиной 4 мм.

При использовании в качестве инструмента для анализа НДС методом конечных элементов в трехмерной постановке достаточно остро стоит проблема снижения затрат машинного времени на решение задач большой размерности при пошаговом увеличении нагрузки. В связи с этим проведено исследование по оптимизации сетки КЭ в зоне концентратора. Размер КЭ по толщине полагали постоянным и равным толщине монослоя t_m . Два других размера, изначально равных t_m , варьировали, домножая их на коэффициент k (рис. 1). Исследование проведено на образцах группы I с отверстием для разных укладок. Расчетную величину потери несущей способности сравнивали с ее экспериментальной величиной [4–5].

На рис. 2 приведены результаты оценки прочности образцов на разрыв с отверстием диаметром

Оценка влияния шага нагружения на результат расчета для образцов с отверстием группы I

$\Delta\sigma$	Шаг нагружения в процентах от разрушающей нагрузки σ_b , %						Результаты расчета в зависимости от шага нагружения, $\sigma_{p'}$, кгс/мм ²						σ_b , кгс/мм ²
	0,5	1,0	1,5	2,5	4,0	6,0	0,5	1,0	1,5	2,5	4,0	6,0	
типовая	1,1	2,2	3,3	5,5	8,7	13,1	37,5	35,0	36,0	35,0	36,0	36,0	45,9
квази-изотропная	1,5	3,0	4,5	7,5	11,7	17,5	36,0	34,0	34,5	35,0	36,0	36,0	34,2
сдвиговая	1,6	3,2	4,8	8,0	12,9	19,4	30,0	32,0	31,5	32,5	32,0	36,0	30,9

Таблица 5

Результаты расчета для образцов группы I

	отверстие (О)			заполненное отверстие (ОБ)			зенкованное отверстие (ЗО)		
	$\sigma_{b'}$, кгс/мм ²	σ_p , кгс/мм ²	δ , %	$\sigma_{b'}$, кгс/мм ²	$\sigma_{p'}$, кгс/мм ²	δ , %	$\sigma_{b'}$, кгс/мм ²	$\sigma_{p'}$, кгс/мм ²	δ , %
типовая	45,9	35,0	-23,7	43,2	36,0	-16,7	44,2	36,0	-18,6
квази-изотропная	34,2	34,0	-0,6	34,8	33,0	-5,2	32,5	28,0	-13,8
сдвиговая	30,9	32,0	3,6	33,3	27,0	-18,9	28,4	24,0	-14,3

6 мм (при этом геометрические параметры образцов: ширина 36 мм, длина 210 мм, толщина 7,14 мм) для трех укладок в зависимости от k , где по оси ординат отложены значения расчетных разрушающих напряжений и для каждой укладки приведены σ_b (экспериментально полученные разрушающие напряжения).

Ориентируясь на результаты проведенного исследования, можно сделать вывод, что оптимальным, с точки зрения точности результата расчета по указанному подходу относительно эксперимента и минимизации временных затрат при расчете, является значение коэффициента k , равное 1,6, ниже которого для всех укладок получена оценка прочности образцов в запас, но временные затраты при расчете существенно возрастали по сравнению с $k = 1,6$. Выше этого значения временные затраты снижались, но при этом погрешность расчета возрастала, причем в большинстве случаев расчетные значения были завышены относительно экспериментальных (оценка прочности неконсервативна).

Принимая далее разбиение, при котором вблизи отверстия размер конечного элемента составляет $1,6 \cdot t_m$, оценим, насколько велико влияние шага нагружения ($\Delta\sigma$) на результат расчета при использовании данного подхода (табл. 4). Здесь и далее σ_p — расчетное разрушающее напряжение для образца, σ_b — экспериментально полученное разрушающее напряжение.

При варьировании шага нагружения от 0,5 до 6,0 кгс/мм² разброс в значениях разрушающей нагрузки составил не более 5,5 % для типовой

укладки, 5,8 % — для квазиизотропной, 19,4 % — для сдвиговой. Несмотря на то что для некоторых укладок увеличение шага нагрузки не приводит к большому разбросу результатов, при выборе шага нагружения следует учитывать, что, при задании большого шага нагружения (без дополнительного уточнения результата) существует риск получить существенно завышенное значение разрушающей нагрузки, поэтому оптимальным, с этой точки зрения, является шаг нагружения 3–5 % от предполагаемой разрушающей нагрузки. Стоит отметить, что уменьшение шага нагрузки при приближении к σ_b позволяет добиться малой погрешности результата расчета даже при изначально больших шагах нагружения.

Далее, выбирая вышеуказанные размер КЭ вблизи отверстия и шаг нагружения, определим прочность на разрыв образцов с различными концентраторами напряжений. В табл. 5 приведены результаты оценки для образцов группы I, в табл. 6 — для образцов группы II.

Для образцов типовой укладки, по сравнению с другими укладками из группы I, погрешность расчета оказалась несколько выше, хотя и является приемлемой, поскольку оценка консервативна. Результаты расчета для образцов с квазиизотропной укладкой показали хорошую сходимость расчета с результатами эксперимента для всех рассмотренных КН. Расчетная оценка прочности образцов сдвиговой укладки показала худшую сходимость для концентратора типа ОБ. В целом подход, основанный на МРП, позволяет предсказывать

Результаты расчета для образцов группы II

отверстие (О)			ряд отверстий (РО)		
σ_b , кгс/мм ²	σ_p , кгс/мм ²	δ , %	σ_b , кгс/мм ²	σ_p , кгс/мм ²	δ , %
9,7	8,6	-11,3	8,7	9,9	13,8

прочность образцов из группы I с удовлетворительной точностью и практически всегда в запас, что для данной группы образцов показывает универсальность данного подхода.

Для образцов с отверстием группы II данный подход позволил предсказать прочность с точностью 11,3 % в запас, для образцов же с рядом отверстий оценка прочности оказалась завышенной на 13,8 %. В обоих случаях точность расчета удовлетворительна и выбранный подход на основе МРП приемлем и к группе образцов II.

Вообще говоря, для слоистых КМ при использовании любой расчетной методики высокая точность расчета относительно эксперимента трудно достижима в силу большого разброса свойств композита, обусловленного самой технологией изготовления и её несовершенствами и пр. Достичь такой стабильности результата, как на металлах, затруднительно.

Представленные в работе результаты исследования подтверждают возможность использования подхода, основанного на МРП, при оценке прочности всех рассмотренных образцов, что демонстрирует универсальность данного подхода для рассмотренных классов концентраторов напряжений при растяжении и перспективность его использования для оценки несущей способности элементов конструкции, выполненных из слоистого КМ, подверженного растяжению.

Универсальность подхода при сжатии на данном этапе не исследована в полной мере (для образцов с отверстием типовой и сдвиговой укладки подход демонстрирует хорошую сходимость с результатами эксперимента при сжатии — погрешность не более 4 %, для квазиизотропной укладки результат расчета завышен на 23,6 % относительно эксперимента).

Композиционный материал сам по себе является конструкцией, и не всегда однозначно удается оценить, откуда разовьется повреждение и где окажется самая опасная зона в конструкции, содержащей большое число различных концентраторов, таких как вырезы, заклепки, болты и др. Данный подход дает возможность проследить полный путь развития повреждения, что позволяет в любой точке конструкции обнаруживать опасные зоны, требующие повышенного внимания. В этом главное преимущество подхода по сравнению с другими расчетными методами.

Библиографический список

1. Chang, F. K. A progressive damage model for laminated composites containing stress concentrations / F. K. Chang, K. Y. Chang // *J. Compos. Mater.* — 1987. — № 21. — P. 834–855.
2. Tan, S. C. A progressive failure model for composite laminates containing openings / S. C. Tan // *J. Compos. Mater.* — 1991. — № 25. — P. 556–577.
3. Tserpes, K. I. Strength prediction of bolted joints in graphite/epoxy composite laminates / K. I. Tserpes, G. Labeas, P. Papanikou, Th. Kermanidis // *Composites Part B: engineering.* — 2002. — № 33. — P. 521–529.
4. Численно-экспериментальное исследование прочности элементов конструкций из слоистых углепластиков / Н. А. Коваленко, И. П. Олегин, Т. Б. Гоцелюк, В. Н. Чаплыгин, П. М. Петров // *Обработка металлов (технология, оборудование, инструменты).* — 2014. — № 1 (62). — С. 69–75. — ISSN 1994–6309.
5. Гоцелюк, Т. Б. Расчетно-экспериментальное исследование прочности слоистых композитов / Т. Б. Гоцелюк, Н. А. Коваленко // *Сб. науч. тр. I Междунар. науч. конф. молодых ученых, 2–4 декабря. Ч. 3. Электротехника. Энергетика. Машиностроение.* — Новосибирск, 2014. — С. 280–283. — ISBN 978–5–7782–2546–6.

БЕСПАЛОВ Валерий Андреевич, заместитель начальника НИО-2 Сибирского научно-исследовательского института авиации им. С. А. Чаплыгина (СибНИА), г. Новосибирск.

Адрес для переписки: ni010@yandex.ru

ГОЦЕЛЮК Татьяна Борисовна, кандидат технических наук, начальник сектора 2024 НИО-2 СибНИА им. С. А. Чаплыгина, г. Новосибирск.

Адрес для переписки: gotseluk@ngs.ru

КОВАЛЕНКО Наталья Андреевна, аспирантка кафедры «Прочность летательных аппаратов» Новосибирского государственного технического университета (НГТУ); инженер 2-й категории НИО-2 СибНИА им. С. А. Чаплыгина, г. Новосибирск.

Адрес для переписки: natasha_kovalenko89@mail.ru

ОЛЕГИН Игорь Павлович, доктор технических наук, профессор кафедры «Прочность летательных аппаратов» НГТУ.

Адрес для переписки: olegin@craft.nstu.ru

Статья поступила в редакцию 11.09.2015 г.

© В. А. Беспалов, Т. Б. Гоцелюк, Н. А. Коваленко, И. П. Олегин

ВЛИЯНИЕ СТРУКТУРИРОВАННОСТИ СРЕДЫ НА ПРОЦЕССЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ ПРИ УДАРНОМ НАГРУЖЕНИИ

В аварийных ситуациях современные космические аппараты с термоэмиссионными преобразователями «отстреливают» ядерную энергетическую установку (ЯЭУ). Однако существует вероятность того, что часть реактора, содержащая ядерное топливо, несмотря на значительные тепловые и механические нагрузки при прохождении плотных слоев атмосферы, может достичь поверхности Земли. Причем из-за разнообразия земной поверхности блок может встретить на своем пути как водную поверхность, так и горные породы или мягкие грунты. В данной работе сделана попытка построить модель переходной среды, которая по своим прочностным характеристикам отвечала бы мягким породам. С этой целью были проведены сравнительные расчеты удара модельного реактора ЯЭУ о поверхность Земли, которая представляет собой в первом случае однородную структуру (песчаник), во втором — неоднородную дискретную структуру (блоки из гранита, связанные цементной массой).

В работе показано, что структура земной поверхности, с которой взаимодействует реактор, существенно изменяет картину разрушения последнего из-за различия в распространении волн сжатия. Поэтому возникает необходимость исследования волновых и прочностных свойств дискретных блочных сред, так как это позволит в дальнейшем более реалистично предсказывать результаты разрушения реактора.

Ключевые слова: ударные волны, деформации и разрушения, взаимодействие твердых тел.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-08-01218).

Применение ядерных источников энергии, включая реакторы ядерных энергоустановок в качестве бортовых источников электропитания космических аппаратов, требует обеспечения ядерной и радиационной безопасности подобных систем. В том числе необходимо оценивать состояние ядерного реактора и его радиоактивных материалов после аварий, связанных с ударным воздействием на конструкцию.

В настоящей работе не рассматриваются сценарии аварийных ситуаций [1], связанные с падением ядерного реактора на поверхность Земли, а только констатируется факт, что существует определенная вероятность того, что в случае внештатной ситуации часть реактора, содержащая ядерное топливо, несмотря на значительные тепловые и механические нагрузки при прохождении плотных слоев атмосферы, может достичь поверхности Земли. Скорость соударения оставшейся части реакторного блока может достигать 400 м/с. Причем из-за разнообразия земной поверхности блок может встретить на своем пути как водную поверхность, так и горные породы или мягкие грунты. Работы по анализу ударного воздействия на конструкцию

ЯЭУ имеют целью получение оценки возможных состояний реактора и ядерного топлива для последующего прогнозирования радиационного воздействия на окружающую среду.

Следуя [2, 3], будем исходить из лагранжева способа описания среды как наиболее подходящего способа описания взаимодействия твердых деформируемых тел. Модель состоит из уравнений баланса массы, импульса и энергии, а также уравнений состояния и процесса упругопластического течения Прандтля – Рейсса:

уравнения траектории материальных частиц

$$\dot{x}_i = u_i;$$

уравнение неразрывности среды

$$V_0 \rho_0 = V \rho$$

закон изменения импульса материальной частицы

$$\rho \dot{u}_i = \sigma_{ij,j};$$

изменение внутренней энергии частицы

$$\rho \dot{\epsilon} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}$$

Тензор скоростей деформаций имеет вид

$$\dot{\epsilon}_{ij} = 0,5(u_{i,j} + u_{j,i}).$$

Тензор напряжений представим в общепринятой форме

$$\sigma_{ij} = -\delta_{ij}P + s_{ij},$$

где s_{ij} — девиатор тензора напряжений, отвечающий за реакцию на сдвиговое формоизменение материальной частицы; δ_{ij} — символ Кронекера; P — давление.

Уравнения процесса принимаем в форме Прандтля — Рейсса

$$\overset{\nabla}{s}_{ij} + d\lambda s_{ij} = 2G\dot{\epsilon}'_{ij}, \quad \dot{\epsilon}'_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3}$$

при условии пластичности Губера — Мизеса

$$s_{ij}s_{ij} \leq \frac{2}{3}Y_0^2,$$

где Y_0 — динамический предел текучести, а для определения скалярного множителя $d\lambda'$ используется известная процедура приведения к кругу текучести.

В приведенных выше уравнениях использованы общепринятые обозначения: каждый из индексов i, j, k пробегает значения 1, 2, 3; по повторяющимся индексам проводится суммирование; точка над символом — производная по времени; индекс после запятой — производная по соответствующей координате; x_i, u_i — компоненты векторов положения и скорости материальной частицы соответственно; ρ — текущая плотность; G — модуль сдвига, причем может быть функцией параметров среды [4].

Уравнение Ми — Грюнайзена в терминах свободной энергии

$$F(V, T) = E_x(V) + c_{v,i}T \ln\left(\frac{\theta(V)}{T}\right) - \frac{1}{2}c_{v,e0}T^2\left(\frac{V}{V_0}\right)^{2/3},$$

где V — удельный объем, $E_x(V)$ — «холодная» энергия, T — температура, $c_{v,i} = 3R/A$ — теплоемкость решетки при постоянном объеме, A — средний атомный вес, R — газовая постоянная, $\theta(V)$ — температуры Дебая, $c_{v,e0}$ — экспериментальное значение электронной теплоемкости при нормальных условиях.

Для определения нулевой изотермы выражения для коэффициента Грюнайзена [5] при нулевой температуре ($T=0K$) приравнялись к выражению для обобщенного коэффициента Грюнайзена

$$\frac{2}{3} - \frac{2}{1 - a_x V_0 / V} = -\left(\frac{2-t}{3}\right) - \frac{V}{2} \left[\frac{d^2}{dV^2} \left(P_x V^{\frac{2t}{3}} \right) \right] / \left[\frac{d}{dV} \left(P_x V^{\frac{2t}{3}} \right) \right]}$$

где $a_x = a(0) = 1 + 2(\gamma_s - 2/3)$ — значение параметра $a|_{T=0}$ при нулевой температуре. Данное уравнение имеет аналитические решения для «холодных» давления и энергии [6, 7].

Для учета процессов разрушения система дополняется соотношениями, связывающими параметры напряженно-деформированного состояния с предельными величинами материалов [8–10]. Наиболее часто применяются величины предельных значений деформаций растяжения и сдвига [11].

$$\epsilon_1 = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \epsilon_{xy}^2},$$

$$\epsilon_2 = \frac{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \epsilon_{xy}^2}$$

и сдвига

$$\epsilon_\tau = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{2}.$$

Если деформации растяжения или сдвига в процессе взаимодействия тел превысили предельные значения ϵ_1^* (т. е. $\epsilon_1 > \epsilon_1^*$) или $\epsilon_\tau > \epsilon_\tau^*$, то материал элемента считается разрушенным, т.е. перестает сопротивляться растяжению и сдвигу, но оказывает сопротивление на сжатие при условии $\rho > \rho_0$.

В качестве критерия откольного разрушения материалов используется аналог критерия Гулера — Бучера [12]

$$\sigma_i = \frac{\sum_{i=n_1}^{n_2} (\sigma_i - \sigma_i^*) \Delta t_i}{\sum_{i=n_1}^{n_2} \Delta t_i} > \sigma_i^*,$$

где i — номер временного шага, σ_1, σ_2 и σ_τ — главные напряжения, причем суммирование выполняется только при условии $\sigma_i - \sigma_i^* > 0$.

Для построения разностных соотношений дифференциальных уравнений модели здесь используется динамический метод построения треугольной сетки. Запишем уравнение движения i -го узла

$$m_i \frac{d^2 \bar{x}_i(t)}{dt^2} + \mathbf{K}_i \frac{d\bar{x}_i(t)}{dt} = \bar{f}_i(t),$$

где m_i — масса, отнесенная к узлу, \mathbf{K}_i — коэффициент демпфирования, $\bar{f}_i = \sum_{j=1}^{j=N} \bar{f}_{ij}$, N — число соседей i -го узла, $\bar{f}_{ij} = \bar{f}(r_{ij})$, $r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$ — расстояние между узлами i и j , \bar{x}_i — положение i -го узла в счетной области [13, 14]. По начальным данным расположения узлов проводится интегрирование дифференциальных уравнений по времени до равновесия, т.е. состояния, в котором максимальное смещение всех узлов за один шаг по времени не станет меньше, чем заданное малое значение ϵ_{cr} [14]:

$$\max_i \sqrt{(x_i^{n+1} - x_i^n)^2 + (y_i^{n+1} - y_i^n)^2} \leq \epsilon_{cr}.$$

Несмотря на современный уровень развития вычислительной техники и наличие достаточно адекватных математических моделей поведения материалов, решение задач удара реальных технических объектов получить практически невозможно. Это обусловлено сложностью пространственного расположения деталей и наличием многих масштабов, которыми обладают элементы технического

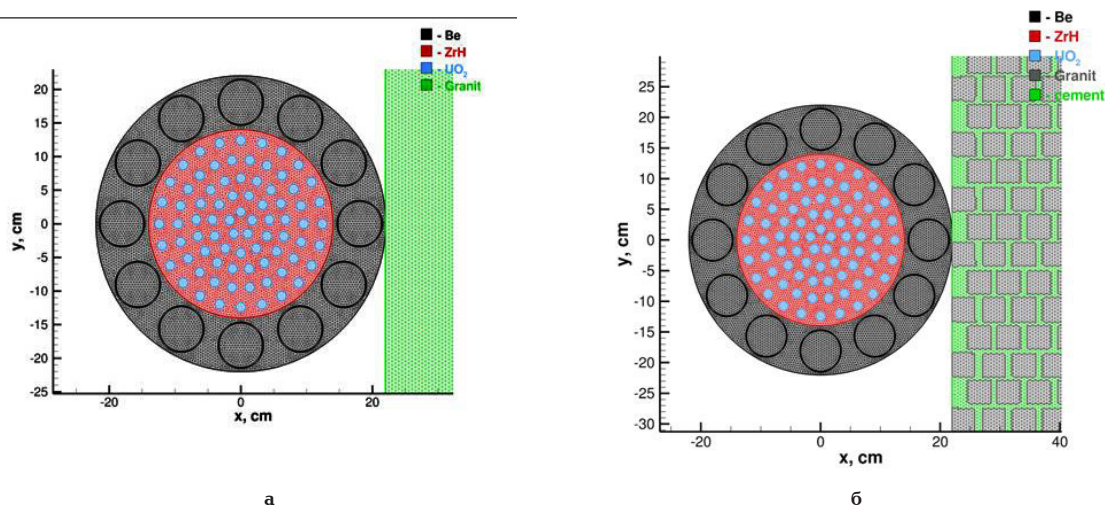


Рис. 1. Геометрическая модель реактора (слева — преграда из гранита, справа — структурированная преграда)

объекта. В таких случаях используется упрощение объекта моделирования, которое позволяет построить ряд моделей для исследования влияния ударных параметров на конкретные основные детали объекта (рис. 1). Упрощение заключается в том, что внутри реакторной зоны проведено осреднение материалов мелкомасштабных деталей в аддитивном приближении [15, 16]. Считаем, что масса несущих материалов достаточно мала (материалы: бериллий, диоксид урана и гидрид циркония составляют 95–97 % массы реактора), чтобы оказать существенное влияние на амплитуду ударной волны. Поскольку у такой среды (смеси) отсутствует дефект объема, то ее удельный объем на фронте волны может быть подсчитан как

$$V_{\text{mix}}(P) = \sum_{i=1}^n \alpha_i V_i(P),$$

где V_i — удельный объем i -й компоненты при ударном сжатии каждой компоненты по отдельности; n — количество компонент в смеси; α_i — массовая концентрация, которая определяется как

$$\alpha_i = \frac{m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1,$$

где m_i — масса i -й компоненты. То есть в основу положено предположение о достаточно точном выполнении правила аддитивности. В аддитивном приближении объем ударно сжатой смеси предполагается равным сумме объемов компонент, полученных при том же давлении, при их раздельном ударном сжатии в виде однородных монолитных образцов.

На рис. 1 представлена плоская модель реактора термоэмиссионной ЯЭУ «Тополь» с 12 регулирующими цилиндрами в боковом отражателе нейтронов и концентрическими рядами электрогенерирующих каналов (ЭГК) в замедлителе из гидрида циркония. ЭГК представляют собой ТВЭЛы со встроенным термоэмиссионным преобразователем тепловой энергии ядерной реакции в электрическую энергию. В данной работе сделана попытка построить модель переходной среды, которая по своим прочностным характеристикам отвечала бы мягким породам. С этой целью были проведены сравнительные 2D расчеты удара модельного реактора ЯЭУ

о поверхность Земли, которая представляет собой в первом случае однородную структуру (песчаник, рис. 1а), во втором — неоднородную дискретную структуру (блоки из гранита, связанные цементной массой, рис. 1б).

В обеих задачах осредненные по объему характеристики песчаника одинаковые. Только для модели сплошной среды они постоянны по объему, а в дискретной модели меняются скачкообразно. Ниже приведены результаты расчетов удара реактора о поверхность для обоих случаев, с начальной скоростью 200 м/с в плоской постановке.

Кинограмма процесса деформирования и разрушения, в результате ударного контакта для первого случая, представлена на рис. 2. Повреждение песчаника начинается на стадии сжатия, причем на периферии области контакта, где существенны сдвиговые деформации, что ослабляет данную зону и формирует «клин», направленный в сторону налетающего реактора. Клин тормозит область у контакта, что формирует сдвиговые деформации в бериллиевой оболочке реактора, заставляя обтекать возникшее препятствие. В центральной части, выполненной из гидрида циркония, действуют растягивающие напряжения, возникающие в зоне встречи двух волн разгрузки, приводящие к растрескиванию заливки.

В дальнейшем усиливаются процессы разрушения песчаника, что приводит к некоторой разгрузке бериллиевой оболочки и образованию зоны сплошного разрушения и формирования однородной «подушки», воспринимающей оболочку на достаточно большой площади. Процесс происходит в квазистатическом режиме, идет дальнейшее растрескивание заливки и передача нагрузки на урановое топливо.

Во втором расчете модель реактора взаимодействует со смесью из гранитных блоков, связанных цементной массой (первоначальное распределение гранитных блоков в земной поверхности показана на рис. 1б). Кинограмма этого процесса деформирования и разрушения представлена на рис. 3. Здесь цементная прослойка между зернами гранита легко разрушается и формирует демпфирующую «подушку» из несвязанных между собой зерен гранита и фрагментов цементной прослойки. Это приводит к мягкому погружению тела реактора в сопротивляющуюся среду. Бериллиевая оболочка разрушается по тонким перемычкам на отдельные

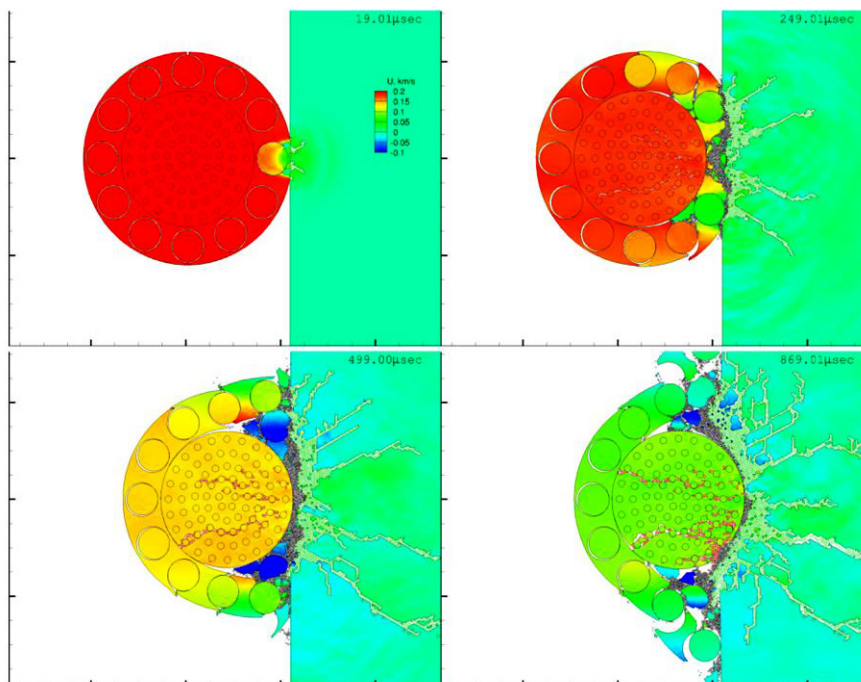


Рис. 2. Кинограмма процесса столкновения реактора с гранитом

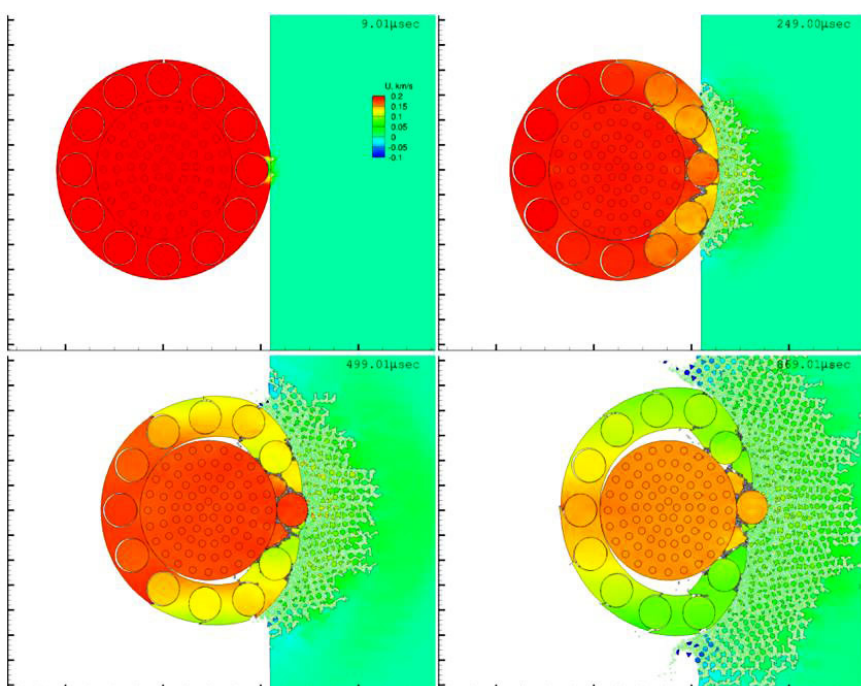


Рис. 3. Кинограмма процесса столкновения реактора со смесью гранита и цемента

фрагменты. В центральной части контакта идет раздавливание материала оболочки, поскольку имеет место сложная волновая картина из-за наличия смеси материалов с разными свойствами. При этом реактор, а точнее, реакторная зона остается неповрежденной.

На примере этих расчетов можно сделать вывод, что дискретная структура материала, с которым взаимодействует реактор, существенно изменяют картину разрушения последнего. В случае удара реактора по дискретному песчанику волновая картина осложняется тем, что песчаник обладает спо-

собностью разрушаться под действием сжимающих напряжений. Эта особенность связана с внутренним строением песчаника, в котором прочные кристаллы песка связаны хрупкой цементной массой. Поскольку песок и цементная масса обладает различными коэффициентами сжимаемости, то в волне сжатия на границах раздела сред формируются сдвиговые напряжения, которые разрушают их связь на границе, т.е. формируется песок с мелкой фракцией цементной массы. А свободный песок практически не сопротивляется сдвиговым деформациям.

Поэтому возникает необходимость дальнейшего исследования волновых и прочностных свойств дискретных блочных сред, так как это позволит более реалистично предсказывать результаты разрушения реактора.

Библиографический список

1. Федоров, М. Ю. Анализ последствий аварий, приводящих к падению реактора космической ядерной энергоустановки на Землю [Электронный ресурс] / М. Ю. Федоров, Е. И. Краус, И. И. Шабалин // Труды МАИ : электрон. журн. — 2015. — Вып. 82. — 19 с. — Режим доступа : <https://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=58564> (дата обращения: 19.09.2015).
2. Уилкинс, М. Л. Расчет упругопластических течений / М. Л. Уилкинс // Вычислительные методы в гидродинамике ; под ред. Б. Олдера, С. Фернбаха, М. Ротенберга. — М. : Мир. — 1967. — С. 212–263.
3. Высокоскоростное взаимодействие тел / В. М. Фомин, А. И. Гулидов, Г. А. Сапожников [и др]. — Новосибирск : Изд-во СО РАН. — 1999. — 600 с.
4. Краус, Е. И. Определение модуля сдвига за фронтом сильной ударной волны / Е. И. Краус, В. М. Фомин, И. И. Шабалин // Вестник Южно-Уральского гос. ун-та. Сер. Математическое моделирование и программирование. — 2014. — Т. 7, № 1. — С. 49–61.
5. Молодец, А. М. Обобщенная функция Грюнаизена для конденсированных сред / А. М. Молодец // ФГВ. — 1995. — Т. 31, № 5. — С. 132–133.
6. Краус, Е. И. Модельные уравнения термодинамических функций состояния веществ. 1. Твердое тело / Е. И. Краус, В. М. Фомин, И. И. Шабалин // Физическая мезомеханика. — 2004. — Т. 7. — С. 285–288.
7. Fomin, V. M An equation of state for condensed matter behind intense shockwaves / V. M. Fomin, E. I. Kraus, I. I. Shabalin // Mater. Phys. Mech. — 2004. — Vol. 7. — № 1. — P. 23–28.
8. Kraus, E. I. Impact loading of a space nuclear powerplant / E. I. Kraus, I. I. Shabalin // Frattura ed Integrita Strutturale, 2013. — Vol.24. — P. 138–150.
9. Краус, Е. И. Моделирование процесса соударения сложных двумерных тел о деформируемую преграду / Е. И. Краус, В. М. Фомин, И. И. Шабалин // Вычислительные технологии. — 2006. — Т. 11. — С. 104–107.
10. Моделирование ударных воздействий на конструкцию в проблеме обеспечения безопасности космических ЯЭУ / М. Ю. Федоров, Е. И. Краус, В. М. Фомин, И. И. Шабалин // Вестник Московского авиационного института. — 2009. — Т. 16, № 3. — С. 49–53.
11. Новожилов, В. В. Теория упругости / В. В. Новожилов. — Л. : Судпродгиз, 1958. — 370 с.
12. Tuler, F. R. A criterion for the time dependence of dynamic fracture / F. R. Tuler, B. M. Butcher // Int. J. Fract. Mech. — 1968. — V. 4. — P. 431–437.
13. Shimada, K. Bubble Mesh: Automated triangular meshing of non-manifold geometry by sphere packing / K. Shimada, D. Gossard // ACM Third Symposium on Solid Modeling and Applications, 1995. — P. 409–419.
14. Краус, Е. И. Динамический метод построения треугольных сеток в многосвязных областях / Е. И. Краус, В. М. Фомин, И. И. Шабалин // Вычислительные технологии. — 2009. — Т. 14, № 5. — С. 40–48.
15. Дремин, А. Н. Метод определения ударных адиабат дисперсных веществ / А. Н. Дремин, И. А. Карпунин / ПМТФ. — 1960. — № 3. — С. 184–188.
16. Краус, Е. И. Учет электронных составляющих в уравнении состояния при расчете ударных волн в смеси металлов / Е. И. Краус, В. М. Фомин, И. И. Шабалин // Математ. моделирование систем и процессов. — 2001. — № 9. — С. 78–84.

КРАУС Евгений Иванович, кандидат физико-математических наук, заместитель директора по научной работе.

ШАБАЛИН Иван Иванович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник.
Адрес для переписки: kraus@itam.nsc.ru

Статья поступила в редакцию 11.09.2015 г.

© Е. И. Краус, И. И. Шабалин

Книжная полка

51/К26

Карпенко, А. П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой : учеб. пособие для вузов по направлению подгот. 230100 «Информатика и вычислительная техника» / А. П. Карпенко. — М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014. — 446 с.

Учебное пособие посвящено преимущественно рассмотрению современных стохастических популяционных алгоритмов решения однокритериальной задачи оптимизации. Рассмотрены методы повышения эффективности этих алгоритмов путем их гибридизации и метаоптимизации. Наряду с однокритериальной рассматривается задача многокритериальной оптимизации и популяционные алгоритмы ее решения. Представлены методы распараллеливания указанных алгоритмов. Содержится большое число примеров решения тестовых и практически значимых задач оптимизации. Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 230100 «Информатика и вычислительная техника». Может быть полезно для всех студентов, изучающих курс «Методы оптимизации» и близкие по тематике курсы.

Материал пособия представляет интерес также для аспирантов и специалистов, использующих в своей работе методы, алгоритмы и программы оптимизации.

**Е. В. АМЕЛИНА
С. К. ГОЛУШКО
В. С. ЕРАСОВ
С. В. ИДИМШЕВ
Ю. В. НЕМИРОВСКИЙ
Б. В. СЕМИСАЛОВ
А. В. ЮРЧЕНКО
Н. О. ЯКОВЛЕВ**

**Конструкторско-технологический
институт вычислительной техники
СО РАН, г. Новосибирск
Всероссийский научно-исследовательский
институт авиационных материалов
ГНЦ РФ, г. Москва
Институт теоретической
и прикладной механики СО РАН,
г. Новосибирск
Институт вычислительных технологий
СО РАН, г. Новосибирск**

АНАЛИЗ И ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ ПРИ ДЕФОРМИРОВАНИИ ПОЛИМЕРОВ И УГЛЕПЛАСТИКОВ

Статья посвящена разработке математического аппарата, предназначенного для обработки и анализа экспериментальных данных, получаемых при испытаниях образцов полимерных матриц и композиционных материалов на их основе. Проведен анализ и предложены пути устранения наиболее значимых артефактов в экспериментальных данных, связанных с особенностями проведения испытаний и измерений. Предложен ряд подходов по аппроксимации получаемых в экспериментах диаграмм деформирования материалов, один из которых основан на полиномиальном и кусочно-полиномиальном приближении методом наименьших квадратов, другой использует приближения без насыщения. Проведен сравнительный анализ эффективности рассмотренных методов для получения аналитических приближений диаграмм деформирования полимеров и углепластиков при различных видах испытаний.

Ключевые слова: полимеры, углепластики, диаграммы деформирования, обработка экспериментальных данных.

Введение. Углепластики являются перспективными композиционными материалами, область применения которых постоянно расширяется. В настоящее время они активно применяются в конструкциях и сооружениях ответственного назначения: в авиа- и ракетостроении, в космической технике, в гражданском и промышленном строительстве.

Наличие возможности правильного предсказания поведения углепластиков в различных условиях эксплуатации является необходимым фактором успешного проектирования и применения композитных конструкций и сооружений. Нелинейное деформирование углепластиков, различное поведение при растяжении и сжатии, ярко выраженная анизотропия свойств, существенная зависимость

характеристик композитов от их структурных параметров требуют разработки и применения новых структурных моделей материала [1 – 2].

При построении структурных математических моделей композиционных материалов исследователи используют набор базовых экспериментов по деформированию композита в целом и его отдельных компонент. Анализ полученных наборов данных позволяет сформулировать ряд гипотез о деформировании композита и характере его разрушения, которые и становятся основой математической модели.

Цель настоящей работы заключается в разработке математического аппарата, предназначенного для обработки и анализа экспериментальных данных, получаемых при испытаниях полимерных матриц и углепластиков, приведении этих данных

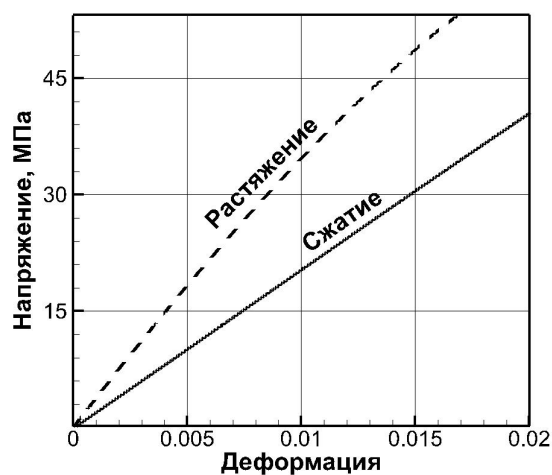


Рис. 1. Диаграммы деформирования связующего материала ВСЭ-1212

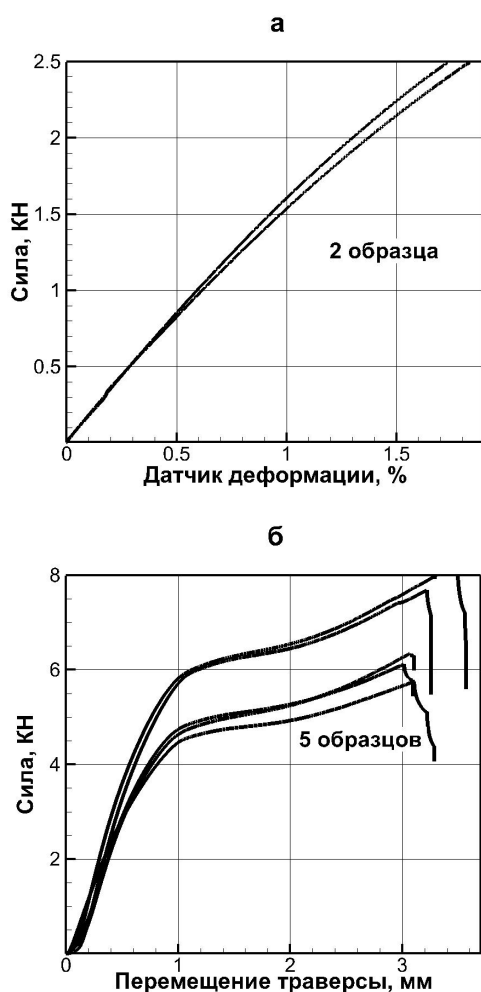


Рис. 2. Диаграммы растяжения (а) и сжатия (б) образцов полимерной матрицы ВСЭ-1212 до обработки

к формату и виду, удобному для построения математических моделей современных композиционных материалов.

Постановка задачи и подходы к ее решению. В ФГУП «ВИАМ» ГНЦ РФ создан углепластик ВКУ-28 — перспективный композиционный материал, разработанный для авиационной промышлен-

ности, представляющий собой волокнистый композит с углеродным наполнителем марки Torayca Industries T-800, а в качестве связующего материала используется высокодеформативная эпоксидная смола ВСЭ-1212.

В рамках проекта «Разработка и совершенствование технологий проектирования и создания новых перспективных композиционных материалов (углепластиков) и конструкций из них для авиационной и других отраслей промышленности», поддержанного грантом РФФИ № 13-01-12032-офи_м, разработана программа испытаний и реализован комплекс экспериментов на растяжение, сжатие, трех- и четырехточечный изгиб образцов полимерной матрицы ВСЭ-1212 и углепластика ВКУ-28.

Для построения и последующего применения математических моделей деформирования углепластиков необходимо провести анализ полученных экспериментальных данных и построенных на их основе диаграмм деформирования, провести анализ артефактов испытаний и измерений, причин их возникновения, разработать методы и алгоритмы для аппроксимации экспериментальных данных аналитическими функциями, провести сравнительный анализ различных форм аналитического приближения диаграмм деформирования и методов их получения.

Обработка экспериментальных данных для различных видов деформирования материала является первым шагом к построению математической модели. При этом технология обработки данных не может быть универсальной, т.к. зависит от многих факторов: методики проведения эксперимента, аппаратуры, состояния образцов и т.д.

В настоящей статье для демонстрации разработанной методики обработки экспериментальных данных ограничимся рассмотрением двух видов испытаний: растяжением и сжатием. Все испытания проведены при нормальных условиях согласно ГОСТ 4651, 11262, 25.601, 25.602.

На рис. 1 представлены усредненные диаграммы деформирования образцов матрицы ВСЭ-1212 при растяжении и сжатии.

Для традиционных материалов, например, металлов, диаграммы растяжения и сжатия близки, особенно при малых деформациях. Однако для рассматриваемого полимера это не так. Секущие модули упругости матрицы при сжатии и растяжении отличаются почти в 2 раза, т.е. полимерный материал является разносопротивляющимся. Из рис. 1 также следует, что диаграмма на сжатие практически линейна, тогда как диаграмма при растяжении имеет нелинейный вид. Эти эффекты должны быть учтены при построении соответствующей математической модели.

На рис. 2 приведены графики зависимости удлинений от нагрузки при растяжении и сжатии для образцов связующего материала ВСЭ-1212.

Наряду с образцами полимерных матриц, были рассмотрены образцы углепластика ВКУ-28, при изготовлении которых все волокна были уложены в одном направлении (однонаправленный углепластик).

На рис. 3а представлены результаты испытаний на растяжение и сжатие экспериментальных образцов углепластика ВКУ-28 вдоль направления укладки волокон. В экспериментах на растяжение хорошо виден эффект упрочнения (увеличение секущего модуля упругости), который отмечался и в других работах [3]. В отличие от связующего

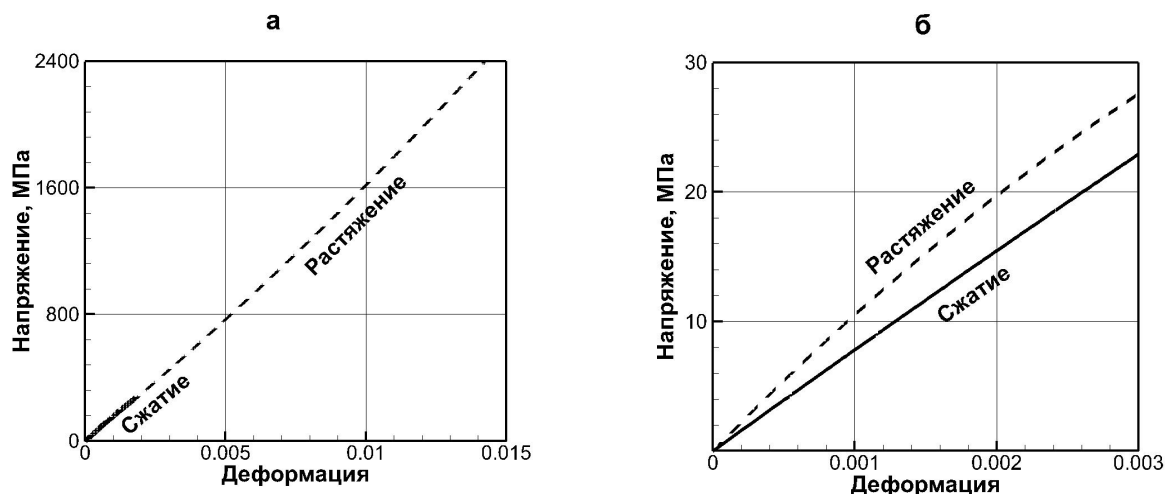


Рис. 3. Диаграмма деформирования углепластика ВКУ-28:
(а) — нагрузка приложена вдоль направления укладки волокон, (б) — поперек волокон

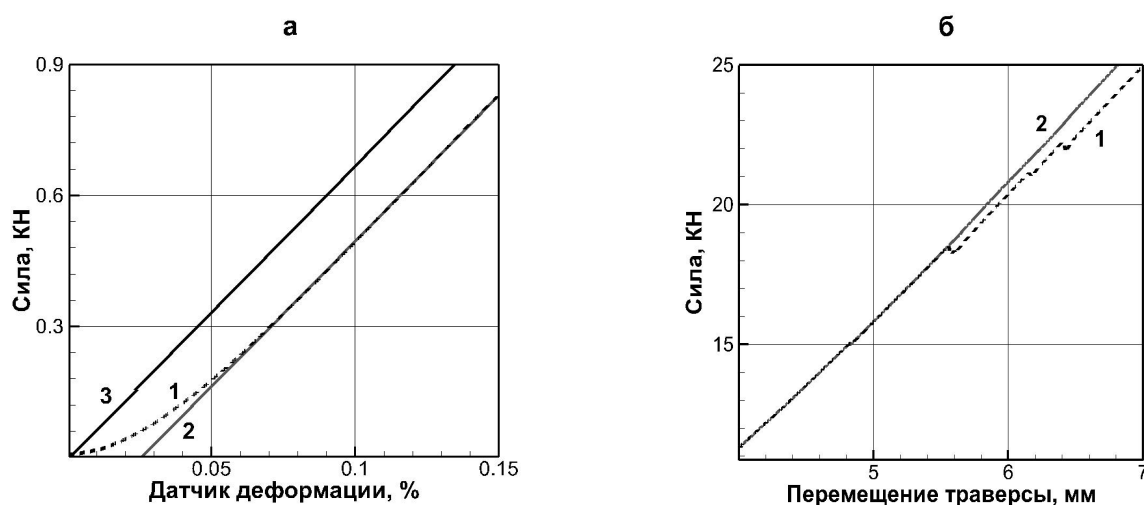


Рис. 4. Обработка артефактов измерений: (а) — устранение эффекта поджатия цепочки;
(б) — устранение пилообразных артефактов проскальзывания на диаграммах растяжения

материала, углепластик не проявляет эффекта разносопротивляемости при совпадении направления нагружения с направлением армирования, однако если приложить силу поперек направления укладки волокон, то этот эффект вновь имеет место (рис. 3б).

Обработка экспериментальных данных. При обработке экспериментальных данных необходимо избавиться от артефактов, получаемых на экспериментальных установках, а также преобразовать эти данные в значения величин, необходимые для построения соотношений упругости. Это касается, например, восстановления деформаций по значениям перемещений траверсы экспериментальной установки.

На основе анализа полученных диаграмм деформирования и стандартов испытаний был выдвинут ряд гипотез, позволяющих исключить артефакты измерений. Первым из таких артефактов является начальный участок диаграммы деформирования при испытаниях материала на сжатие (рис. 4а), на котором наблюдается нетипично быстрый рост деформаций, замедляющийся впоследствии, что более характерно для пористых или сотовых мате-

риалов. Подобный эффект отмечен и в работе [4]. Наиболее вероятной причиной возникновения этого артефакта является поджатие цепочки испытательной машины, которое отражается на диаграмме при измерении перемещений по ТУ. Для устранения этого артефакта применялись гипотезы о том, что на начальной стадии жесткость материала максимальна и деформирование происходит практически линейно, следовательно, соответствующая диаграмма на начальном участке также должна быть близка к линейной.

Другой артефакт измерения в испытаниях проявляется в виде пилообразных скачков (резких снижений измеряемых значений силы) на диаграмме растяжения углепластика ВКУ-28 (рис. 4б). Такое поведение не может быть обусловлено начальным разрушением материала, например, вследствие возникновения трещин, поскольку угол наклона диаграммы в проведенных экспериментах сохраняется. Более вероятно, что рассматриваемый эффект связан с проскальзыванием образца в зажимах. Для восстановления диаграмм деформирования следует исходить из гипотезы о непрерывности и гладкости диаграммы вплоть до момента возникновения

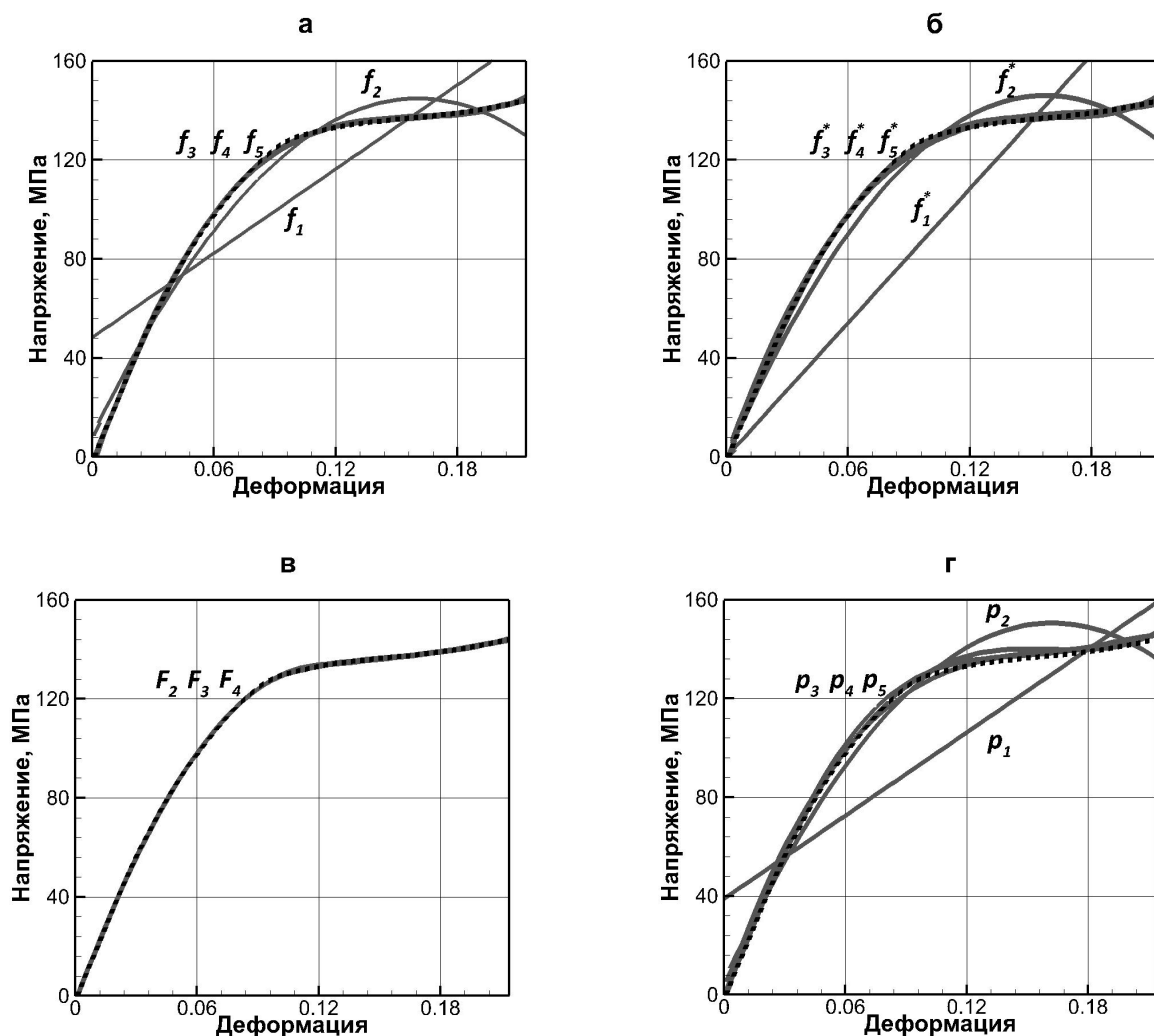


Рис. 5. Аппроксимация экспериментальных данных (пунктир):
 (а) — полиномами $f_i(x)$, (б) — полиномами без свободного члена $f_i^*(x)$,
 (в) — кусочно-полиномиальными функциями $F_i(x)$, (г) — полиномами на основе метода без насыщения $p_i(x)$

в образце очагов начального разрушения. Для этого необходимо «склеивать» участки диаграммы на скачках путем переноса участка диаграммы справа от скачка вдоль оси напряжений так, чтобы сохранить непрерывность и гладкость кривой.

Как было отмечено выше, полученные из экспериментов данные необходимо преобразовать в значения величин, необходимые для построения соотношений упругости. Восстановление деформаций и напряжений для каждого способа измерения определяется методологией, описанной в ГОСТах или соответствующей документации.

Аппроксимация экспериментальных данных. Следующей важной задачей при обработке экспериментальных данных является аппроксимация экспериментальных диаграмм деформирования гладкими функциональными зависимостями, удобными в смысле применения операторов дифференцирования и интегрирования.

Такие зависимости должны быть легко вычислимы в любой точке диаграммы и должны обеспечивать достаточно точное приближение экспериментальных данных. Важно помнить, что чем более сложный вид аппроксимации используется, тем более сложная задача возникает при анализе напряженно-деформированного состояния конкретной конструкции.

Для построения приближений рассмотрено два подхода. Первый опирается на аппарат метода наименьших квадратов (МНК) [5]. При этом для учёта всех особенностей диаграмм деформирования используется большое количество экспериментальных данных (в текущих исследованиях использовано несколько тысяч измерений).

Второй подход, реализованный с помощью методов приближения без насыщения [6–7], напротив, минимизирует количество необходимых экспериментальных данных, позволяя строить приближения, используя только несколько пар значений напряжения-деформации (достаточно от 3-х до 7 выборочных измерений).

Для демонстрации и сравнения различных видов аппроксимаций рассмотрим диаграмму сжатия полимерной матрицы, т.к. она имеет наиболее сложный, с точки зрения аппроксимации, вид.

Рассмотрим аппроксимирующую функцию в виде $f(x) = \sum_{s=1}^K b_s g_s(x)$, $x \in [x_0, x_1]$, где b_s — неизвестные коэффициенты, $g_s(x)$ — известные функции, x_0 и x_1 — границы промежутка, на котором аппроксимируются данные. Для поиска параметров с помощью МНК необходимо разрешить переопределённую систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Погрешность аппроксимации для разных способов аппроксимаций

$f(x)$	SME	$f(x)$	SME	$f(x)$	x^*	SME	$f(x)$	SME
f_1	$1,33 \times 10^{-1}$	f_1^*	$2,35 \times 10^{-1}$	F_2	0,1015	$5,49 \times 10^{-3}$	p_1	$1,47 \times 10^{-1}$
f_2	$5,28 \times 10^{-2}$	f_2^*	$6,57 \times 10^{-2}$	F_3	0,0851	$1,91 \times 10^{-3}$	p_2	$6,4 \times 10^{-2}$
f_3	$1,05 \times 10^{-2}$	f_3^*	$1,15 \times 10^{-2}$	F_4	0,0895	$4,46 \times 10^{-4}$	p_3	$1,5 \times 10^{-2}$
f_4	$8,78 \times 10^{-3}$	f_4^*	$1,14 \times 10^{-2}$				p_4	$1,2 \times 10^{-2}$
f_5	$5,12 \times 10^{-3}$	f_5^*	$5,52 \times 10^{-3}$				p_5	$6,4 \times 10^{-3}$
							p_6	$2,6 \times 10^{-3}$

Для численного сравнения точности различных видов аппроксимаций используем величину относительного среднеквадратичного отклонения функции $f(x)$ от исходных данных $\varphi(\varepsilon_i)$

$$SME = \frac{1}{\max_{i=1, \dots, M} \varphi(\varepsilon_i)} \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |f(\varepsilon_i) - \varphi(\varepsilon_i)|^2}. \quad (1)$$

Полиномиальная аппроксимация. При полиномиальной аппроксимации приближающая функция $f(x)$ представляет собой многочлен вида $f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_k x^k$. Преимущества представления искомой функции в виде полиномов заключаются в широких возможностях по построению аппроксимаций требуемой точности и удобной аналитической работой с ними.

На рис. 5 приведены результаты аппроксимации экспериментальных диаграмм с помощью полиномов до пятой степени включительно. Аппроксимации полиномами первой ($k=1$) и второй ($k=2$) степени не являются удовлетворительными, тогда как полиномы третьей степени ($k=3$) намного лучше описывают экспериментальные данные (табл. 1). По значениям среднеквадратичного отклонения видно, что использование полиномов 4-й степени не приводит к значительному улучшению точности приближения. Поэтому, выбирая между полиномами 3-й и 4-й степеней, остановимся на 3-й степени. Полиномы 5-й степени аппроксимируют экспериментальные данные с высокой точностью.

Кусочно-полиномиальная аппроксимация. Другим перспективным подходом к аппроксимации экспериментальных данных является применение кусочно-полиномиальной аппроксимации. Такой подход позволяет снизить обусловленность СЛАУ, избавиться от осцилляций, не имеющих физического смысла, и как следствие получить приближение высокой точности. В случае кусочно-полиномиальной аппроксимации:

$$F_n(x) = \begin{cases} f_n^1(x), & x \in [x_0, x^*], \\ f_n^2(x), & x \in [x^*, x_1], \end{cases} \quad (2)$$

где x^* — точка склейки, $f_n^i(x)$ — полином степени n .

Точка склейки выбиралась автоматически последовательным перебором с малым шагом, так чтобы обеспечить наименьшее значение среднеквадратичного отклонения от исходных данных. Условия согласования задавались с учётом свойства гладкости диаграмм деформирования, т.е. в точке склейки требовалась непрерывность значений функции и её производной.

Рассмотрим кусочно-полиномиальную аппроксимацию двумя полиномами второй, третьей и четвёртой степени (рис. 5). Аппроксимация полиномами второй степени хорошо приближает экспериментальную кривую в среднеквадратичном смысле, но имеется участок, близкий к точке склейки, где видно отклонение. Использование полиномов третьей степени нивелирует визуальные отличия экспериментальных данных и приближающей функции. Такая кусочно-полиномиальная функция, как и полином 5 степени, имеет 6 варьируемых коэффициентов, но аппроксимирует данные точнее и не осциллирует. Приближения двумя полиномами четвёртой степени представляют самую точную аппроксимацию, полученную в ходе проведения исследований (табл. 1).

Аппроксимация с помощью методов без насыщения. Предположим, что механические свойства рассматриваемого материала таковы, что диаграммы деформирования обладают высокой степенью гладкости. Используя это свойство, можно минимизировать объём экспериментальной информации, необходимой для построения достаточно точных аппроксимаций. Воспользуемся для этого приближениями без насыщения интерполяционными полиномами с узлами Чебышёва [6–7]

$$p_M(t) = \frac{1}{(M+1)} \sum_{m=1}^{M+1} (-1)^{m-1} \frac{\varphi(t_m) \sqrt{1-t_m^2}}{t-t_m} \times \cos(M \arccos t) \quad (3)$$

Здесь $t_m = \cos \frac{(2m-1)\pi}{2M}$ — узлы интерполяции, которые являются корнями полинома Чебышёва

степени M ; $\varphi(t)$ — приближаемая функция, отображенная на отрезок $[-1, 1]$ линейным преобразованием $t = \frac{2}{(x_1 - x_0)} \left(x - \frac{x_0 + x_1}{2} \right)$, $t \in [-1, 1]$, $x \in [0, x_1]$; M — степень полинома. Указанные полиномы позволяют на гладких функциях достичь оценки точности с асимптотикой наилучших приближений, т.е. минимизировать число свободных параметров в представлении решения. Таким образом, приближения (3) используют минимальное количество узлов для восстановления решения с достаточной точностью. Приближения экспериментальной зависимости напряжений от деформаций $\sigma = f(\varepsilon)$ полиномами (3) представлены на рис. 5.

Заключение. Рассмотренные выше подходы не исчерпывают всех возможностей по построению символьных математических формул, приближающих исходные данные, но дают представление о необходимых и достаточных пределах аппроксимации, с точки зрения требований по точности, и высокую вариативность выбора конкретных математических форм для использования в структурных моделях углепластика и конструкционных элементов на его основе.

Библиографический список

1. Vasiliev, V. V. *Advanced Mechanics of Composite Materials* / V. V. Vasiliev, E. Morozov. — 2-nd Edition. — Elsevier Science, 2007. — 504 p.
2. Голушко, С. К. Прямые и обратные задачи механики композитных пластин и оболочек вращения / С. К. Голушко, Ю. В. Немировский. — М.: Физматлит, 2008. — 432 с. — ISBN 978-5-9221-0948-2.
3. Lagace, P. A. Nonlinear stress-strain behavior of graphite/epoxy laminates / P. A. Lagace // *AIAA Journal*. — 1985. — Vol. 23, № 10. — P. 1583–1589.
4. Адамов, А. А. Численная обработка экспериментальных данных, полученных с использованием современных испытательных машин, для идентификации реологических моделей / А. А. Адамов // *Вычислительная механика сплошных сред*. — 2013. — Т. 6, № 2. — С. 131–139.
5. Лоусон, Ч. Численное решение задач метода наименьших квадратов / Ч. Лоусон, Р. Хенсон. — М.: Наука. — 1986. — 232 с.

6. Бабенко, К. И. Основы численного анализа / К. И. Бабенко. — М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». — 2002. — 358 с.

7. Семисалов, Б. В. Нелокальный алгоритм поиска решений уравнения Пуассона и его приложения / Б. В. Семисалов // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. — 2014. — Т. 54, №7. — С. 1110–1135.

АМЕЛИНА Евгения Валерьевна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Конструкторско-технологического института вычислительной техники (КТИ ВТ) СО РАН, г. Новосибирск.

ГОЛУШКО Сергей Кузьмич, доктор физико-математических наук, доцент, директор КТИ ВТ СО РАН, г. Новосибирск; заведующий лабораторией анализа и оптимизации нелинейных систем Института вычислительных технологий (ИВТ) СО РАН, г. Новосибирск.

ЕРАСОВ Владимир Сергеевич, кандидат технических наук, начальник лаборатории Всероссийского научно-исследовательского института авиационных материалов (ВИАМ) ГНЦ РФ, г. Москва.

ИДИМШЕВ Семен Васильевич, младший научный сотрудник КТИ ВТ СО РАН, г. Новосибирск.

НЕМИРОВСКИЙ Юрий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института теоретической и прикладной механики СО РАН, г. Новосибирск.

СЕМИСАЛОВ Борис Владимирович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник КТИ ВТ СО РАН, г. Новосибирск.

ЮРЧЕНКО Андрей Васильевич, кандидат физико-математических наук, заместитель директора ИВТ СО РАН, г. Новосибирск.

ЯКОВЛЕВ Николай Олегович, кандидат технических наук, старший научный сотрудник ВИАМ ГНЦ РФ, г. Москва.

Адрес для переписки: amelinaev@kti.sbras.ru

Статья поступила в редакцию 11.09.2015 г.

© Е. В. Амелина, С. К. Голушко, В. С. Ерасов, С. В. Идимешев, Ю. В. Немировский, Б. В. Семисалов, А. В. Юрченко, Н. О. Яковлев

Книжная полка

51/Б94

Буховец, А. Г. Алгоритмы вычислительной статистики в системе R : учеб. пособие для вузов по направлению «Прикладная информатика» / А. Г. Буховец, П. В. Москалев. — 2-е изд., перераб. и доп. — СПб.: Лань, 2015. — 147 с.

В учебном пособии в краткой форме излагается теоретический материал и приводятся примеры решения практических задач по разделам: линейная алгебра, теория вероятностей, методы оценивания и проверки гипотез, метод главных компонент, регрессионный и кластерный анализ с применением свободной системы статистической обработки данных и программирования R. В приложениях к настоящему пособию содержатся сведения по установке и использованию системы R, а также листинги программ, которые могут быть использованы в учебном процессе.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению «Прикладная информатика», программа которых предусматривает изучение современных средств и методов вычислительной статистики.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗРУШЕНИЯ ОБОЛОЧКИ ИЗ БЕТОНА И ФИБРОБЕТОНА ПРИ ИМПУЛЬСНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

В работе представлены результаты численного моделирования разрушения защитной оболочкой атомной станции (АС) при импульсном воздействии. Оболочка представляет собой сложную многослойную сотовую структуру, состоящую из слоев бетона и фибробетона, скрепленных со стальными фермами. Численное моделирование проводилось в трехмерной динамической постановке с использованием авторского алгоритма и программного комплекса, в котором реализованы алгоритмы построения сетки сложных геометрических объектов и параллельных вычислений. Исследована динамика напряженно-деформированного состояния и разрушения конструкции.

Ключевые слова: численное моделирование, метод конечных элементов, железобетон, защитная оболочка.

Введение. Оболочечные конструкции имеют широкое применение в самых различных областях: от нефте- и газопроводов, различного рода контейнеров, предназначенных для хранения и транспортировки материалов, различных типов летательных аппаратов: самолеты, баллистические ракеты, до специальных строительных конструкций, предназначенных для защиты объектов от природных и техногенных воздействий. При разработке новых конструкций, помимо анализа поведения отдельных элементов при различных видах воздействия, необходим также анализ поведения конструкции в целом.

Проведение с этой целью натурных экспериментов сопряжено, как правило, с большими материальными затратами, и не всегда эксперимент дает полную картину, особенно это касается динамических процессов, когда необходима информация об интересующих параметрах в различные моменты времени. Поэтому существует потребность в моделях и методах, позволяющих проводить анализ и предсказывать поведение конструкций при различных видах эксплуатационных нагрузок и возможных нештатных ситуациях. Для адекватного описания поведения конструкций необходимо учитывать пространственный характер реализующегося в них напряженно-деформированного состояния (НДС), обусловленный несколькими факторами:

- наличие элементов, приводящих к геометрической несимметричности;
- учет реальных условий нагружения — как правило, они несимметричны;
- анизотропия физико-механических свойств материалов элементов конструкций.

Наличие хотя бы одного из вышеперечисленных факторов делает необходимым проведение анализа в трехмерной постановке, что является весьма сложной и трудоемкой задачей, так как в этом случае помимо создания адекватной модели поведения материалов необходимо наиболее реально учитывать геометрию и пространственное расположение различных элементов конструкции.

В работе представлены и результаты численного моделирования взаимодействия самолета Boeing 747–400 с защитной оболочкой атомной станции. Оболочка имела сложную многослойную сотовую структуру, состоящую из слоев бетона и фибробетона, скрепленных со стальными фермами. Условия взаимодействия самолета с оболочкой соответствовали параметрам, приведенным [1]. Численное моделирование проводилось в трехмерной динамической постановке в рамках модели [2], с использованием авторского алгоритма и программного комплекса [3], в котором реализован алгоритм построения сетки сложных геометрических объектов. За счет использования параллельных вычислений количество конечных элементов составляло до 10^8 .

Описание расчетной схемы защитной оболочки. Постановка задачи. Общий вид защитной оболочки представлен на рис. 1. Верхняя и нижняя крышки оболочки представляют собой трехслойную конструкцию. Материал верхнего слоя фибробетон (толщина — 50 мм), материал среднего слоя бетон (толщина 200 мм) и материал нижнего слоя — фибробетон (толщина — 50 мм). В данном случае из-за сложной геометрии конструкции армирующие элементы явно не выделялись, их наличие учитывалось через эффективные модули, свойства усреднялись по объему.

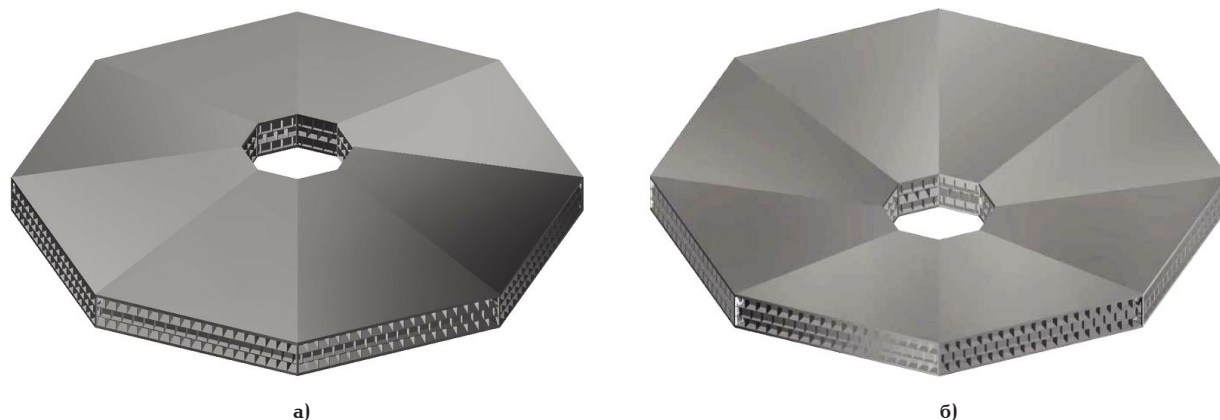


Рис. 1. Общий вид защитной оболочки: а) — вид сверху, б) — вид снизу

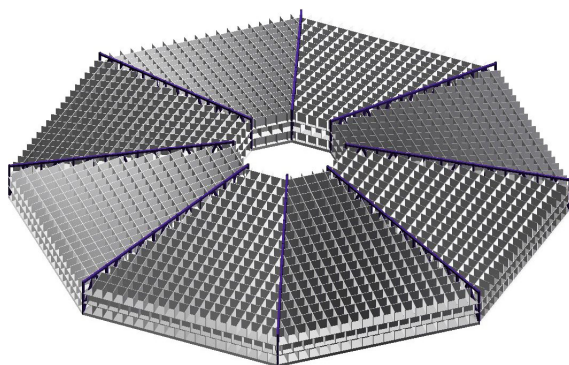


Рис. 2. Внутренняя сотовая структура оболочки

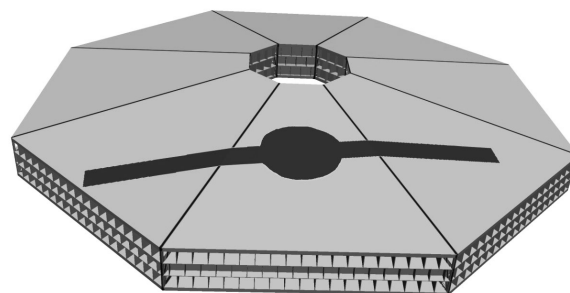


Рис. 3. Схема приложения импульса

Таблица 1

Физико-механические характеристики материалов

Материал	ρ , кг/м ³	Скорость звука C_s , м/с	Коэффициент Пуассона	Прочность на растяжение, МПа	Прочность на сжатие, МПа	Прочность на сдвиг, МПа	Модуль Юнга E , ГПа
Бетон	2450	4500	0,2	1,75	22	3,4	26
Фибробетон	2450	4500	0,2	3,4	41	6,5	41
Сталь, А400	7850	5930	0,3	400	400	400	204

На рис. 2 приведена структура сотовой конструкции оболочки, материал — фибробетон. В целом оболочка состоит из восьми сегментов, между которыми расположены стальные фермы. Физико-механические характеристики материалов приведены в табл. 1.

Контактное воздействие на оболочку в расчетах заменялось импульсом в соответствии со схемой, приведенной в [3] Направление импульса соответствовало падению самолета под углом 10 градусов к горизонту. Области приложения импульса приведены на рис. 3. Область, нагружаемая фюзеляжем и крыльями, обозначена темно-серым цветом. Максимальное значение импульса — 250 МН.

Распределение нагрузки по пятну удара в зависимости от времени приведено на рис. 4.

Следует отметить, что весьма серьезной проблемой при расчете конструкций, содержащих боль-

шое количество различных элементов, является создание трехмерной конечно-элементной сетки. По сути, это отдельная задача, от решения которой зависят и точность вычислений, и временные затраты на решение задачи. В ходе выполнения проекта такая задача была решена, количество конечных элементов в расчетах составляло $5 \cdot 10^7$.

Результаты динамических расчетов защитной оболочки сотовой структуры на нагрузки от падающего самолета. В рамках поставленной задачи были проведены численные исследования динамики НДС и разрушения защитной оболочки при импульсном воздействии.

Анализ НДС показывает, что область растягивающих напряжений формируется по периметру зоны приложения импульса и внутри оболочки на свободных поверхностях сотовой структуры, это приводит к разрушению сотовой структуры

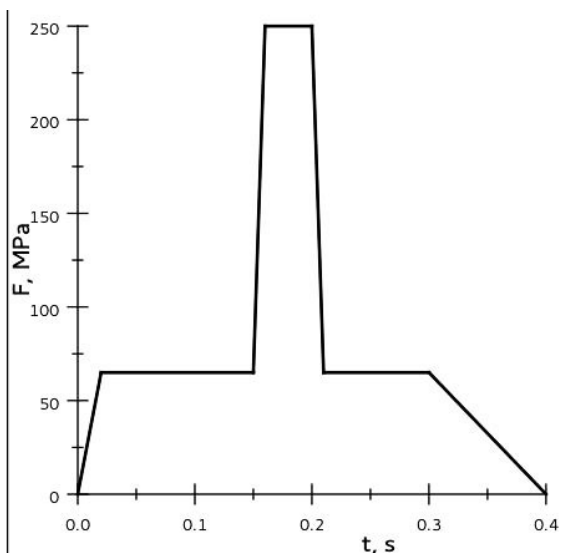


Рис. 4. Нагрузка при ударе самолета Boeing 747-400

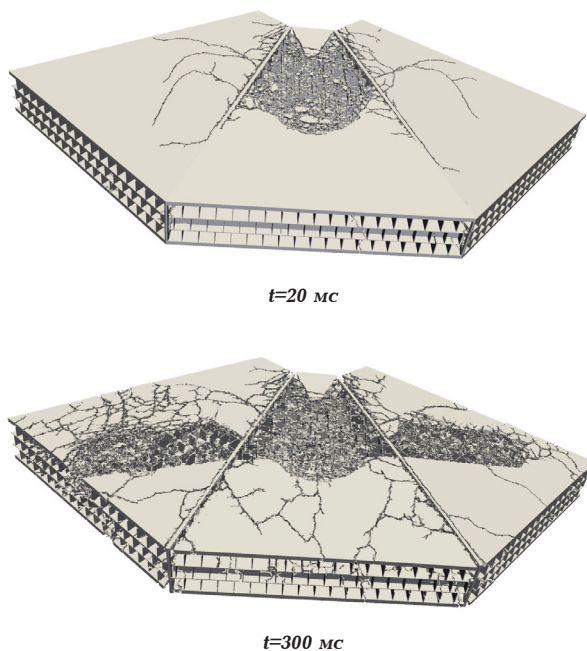


Рис. 5. Разрушение оболочки. Вид сверху

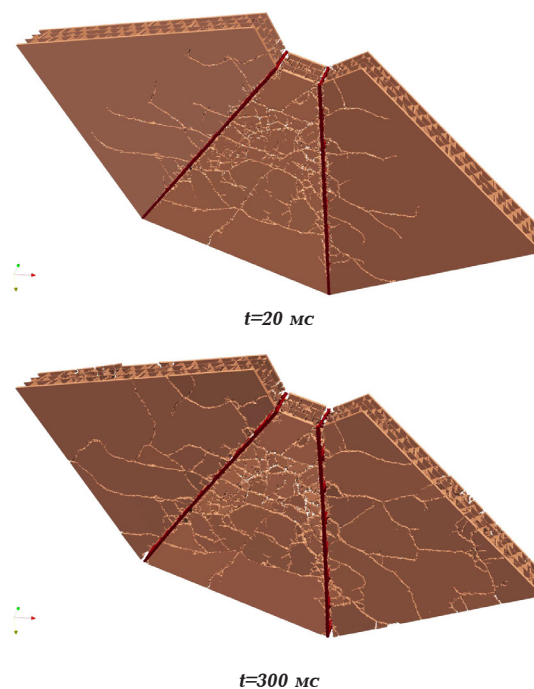


Рис. 6. Разрушение оболочки. Вид снизу

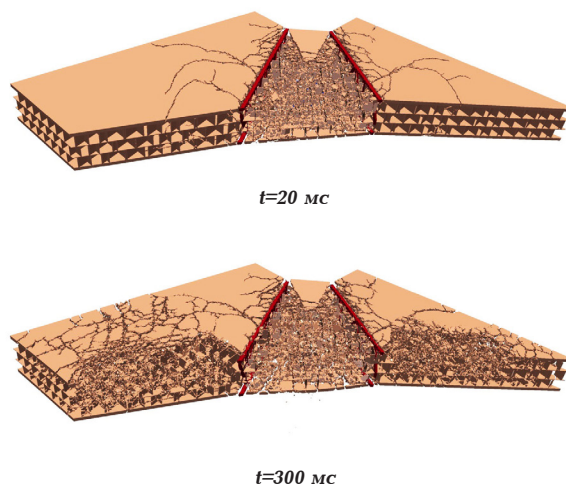


Рис. 7. Разрушение оболочки. Поперечное сечение

оболочки. Растягивающие напряжения возникают в результате выхода волны сжатия на свободные поверхности сот, от которых они отражаются волнами разгрузки. Наличие свободных поверхностей внутри оболочки с одной стороны понижает уровень сжимающих напряжений, но с другой стороны приводит к формированию областей растяжений, в которых инициируется разрушение сотовой структуры, зарождаются трещины.

Динамику разрушения оболочки можно проследить по рис. 5, где в различные моменты времени приведены зоны разрушения, возникающие на лицевой поверхности оболочки. Разрушения возникают непосредственно в области приложения импульса, и, в результате действия растягивающих напряжений, возникают трещины по периметру приложения нагрузки, которые с течением времени распространяются по поверхности оболочки. Стальные фермы деформируются, но разрушений в них

нет. Также следует отметить, что фермы являются концентраторами напряжений за счет существенного различия в упругих и прочностных свойствах стали и фибробетона.

К моменту времени 160 мс добавляется воздействие от крыльев самолета, и можно наблюдать увеличение объема разрушений в оболочке.

Развитие разрушений на тыльной поверхности оболочки приведено на рис. 6.

Как видно из рисунков, на тыльной поверхности оболочки, непосредственно под зоной приложения нагрузки, образуются трещины, которые с течением времени распространяются по поверхности оболочки.

Эти трещины возникают в результате действия растягивающих напряжений, которые возникают в момент выхода волны сжатия на тыльную поверхность и затем сохраняются в течение времени действия импульсной нагрузки.

Разрушение оболочки по толщине иллюстрирует рис. 7, где в последовательные моменты времени приведено поперечное сечение оболочки по срединной поверхности, проходящей через зоны приложения импульса. Вначале наблюдается разрушение в круговой зоне приложения импульса от фюзеляжа самолета, а затем — в областях приложения импульсов от крыльев.

Заключение. В результате проведенных численных исследований можно сделать следующие выводы:

1. В рамках феноменологического подхода механики сплошной среды предложена модель и создана методика расчета оболочечных конструкций со сложной внутренней структурой при интенсивных динамических нагрузках. Методика реализована в полной трехмерной постановке на базе модифицированного метода конечных элементов.

2. На основе разработанной методики можно проводить широкопараметрические численные эксперименты по выбору оптимальных конструктивных решений.

3. Численно исследована динамика напряженно-деформированного состояния и разрушения защитной оболочки АС с сотовой внутренней структурой при импульсном воздействии.

4. Установлено, что разрушение сотовой структуры инициируется в областях действия растягивающих напряжений, которые возникают в момент выхода волны сжатия на свободные поверхности сот. С течением времени происходит дальнейшее развитие возникших разрушений в результате действия импульсной нагрузки.

5. В верхней и нижней крышке оболочки за счет растягивающих напряжений возникают трещины, распространяющиеся в радиальных направлениях.

1. Birbraer, A. N. Extreme Actions on Structures / A. N. Birbraer and A. J. Roleder. — Saint-Petersburg : Saint-Petersburg Polytechnical University, 2009. — 594 p.

2. Radchenko, A. V. Numerical modeling of development of fracture in anisotropic composite materials at low-velocity loading / A. V. Radchenko, P. A. Radchenko // Journal of Materials Science. — 2011. — V. 46, № 8. — P. 2720–2725.

3. Радченко, П. А. Трехмерное моделирование деформации и разрушения гетерогенных материалов и конструкций при динамических нагрузках (EFES 1.0) / П. А. Радченко, С. П. Батуев, А. В. Радченко // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014614671 от 06.05.2014 г. — М. : ФИПС, 2014.

РАДЧЕНКО Павел Андреевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики.

БАТУЕВ Станислав Павлович, аспирант кафедры прикладной математики.

РАДЧЕНКО Андрей Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор, директор института кадастра, экономики и инженерных систем в строительстве.

ПЛЕВКОВ Василий Сергеевич, доктор технических наук, профессор кафедры железобетонных и каменных конструкций.

Адрес для переписки: radchenko@live.ru

Статья поступила в редакцию 11.09.2015 г.

© П. А. Радченко, С. П. Батуев, А. В. Радченко, В. С. Плевков

Книжная полка

532/Г46

Гидравлика в машиностроении : учеб. для вузов по направлению «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств». В 2 ч. / А. Г. Схиртладзе [и др.]. — Старый Оскол : ТНТ, 2014. — (Тонкие наукоемкие технологии).

Ч. 1. — 2014. — 391 с.

Ч. 2. — 2014. — 495 с.

В учебнике изложены сведения об основных физических свойствах жидкостей и газов, приведены основные положения гидростатики и гидродинамики рабочих сред гидросистем. Рассмотрена структура и энергообеспечение исполнительных систем гидро- и пневмоприводов, а также устройство, основы расчета и выбора регулирующей и направляющей аппаратуры. Приводятся сведения об информационной и логико-вычислительной подсистемах гидравлических приводов. Учебник предназначен для студентов вузов, обучающихся по направлению «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств», а также для инженерно-технических работников, занятых проектированием, производством и эксплуатацией гидравлических систем и агрегатов в машиностроении.

51/Б86

Бояркин, Г. Н. Теория систем и системный анализ : учеб. электрон. изд. локального распространения : учеб. пособие / Г. Н. Бояркин, О. Г. Шевелева. — Омск : Изд-во ОмГТУ, 2015. — 1 о=эл. опт. диск (CD-ROM).

Учебное пособие по дисциплине «Теория систем и системный анализ» включает теоретический материал по одноименному курсу. Данное пособие предназначено для студентов специальности 080801 (351400) Прикладная информатика (в экономике), изучающих курс «Теория систем и системный анализ» в качестве дисциплины естественнонаучного цикла. Пособие может быть использовано студентами как дневной, так и заочной форм обучения.

СОВМЕСТНОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И НЕЛОКАЛЬНЫХ КРИТЕРИЕВ РАЗРУШЕНИЯ

Составлен алгоритм совместного использования метода граничных элементов (в варианте фиктивных нагрузок) и градиентного критерия разрушения для расчетов на прочность плоских элементов конструкций. Проведено сравнение результатов расчетов предельной нагрузки по критерию максимальных напряжений, градиентному критерию, интегральному критерию Нейбера–Новожилова и трехпараметрическому интегральному критерию, как между собой, так и с экспериментальными данными по разрушению образцов из эбонита.

Ключевые слова: хрупкое разрушение, концентрация напряжений, нелокальные критерии разрушения, экспериментальные данные.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке проекта РФФИ №15-01-07631.

При использовании классических локальных критериев разрушения обычно предполагается, что разрушение начинается при достижении максимальным эквивалентным напряжением предельного значения хотя бы в одной точке тела. Однако в условиях неоднородного напряженного состояния локальные критерии дают заниженные оценки предельных нагрузок по сравнению с экспериментальными данными. В этом случае целесообразно применять нелокальные критерии разрушения, которые дают более близкие к реальным значениям оценки предельных нагрузок, например, градиентный критерий.

Градиентный критерий разрушения. В градиентном критерии для определения начала разрушения с пределом прочности материала σ_b , сравнивается не максимальное, а эффективное напряжение σ_e . Эффективное напряжение пропорционально максимальному растягивающему напряжению σ_1 в рассматриваемой точке тела, принятому в качестве эквивалентного. Кроме того, σ_e зависит от локальной неравномерности поля напряжений в окрестности рассматриваемой точки и представительного размера неоднородности материала. Локальная неравномерность распределения напряжений характеризуется относительным градиентом $g_v = |\text{grad} \sigma_v| / \sigma_v$ положительного нормального напряжения σ_v , действующего на плоскости, включающей площадку первого главного напряжения в рассматриваемой точке тела, где плоскость и площадка имеют общую нормаль v .

Вычисление величины $|\text{grad} \sigma_v|$ в некоторых задачах проще, чем величины $|\text{grad} \sigma_1|$, использовавшейся ранее [1–3].

Относительный градиент находится с использованием решения соответствующей задачи теории упругости. Выражение для эффективного напряжения записывается в виде

$$\sigma_e = \sigma_1 / \left(1 - \beta + \sqrt{\beta^2 + L_1 g_v} \right), \quad (1)$$

где L_1 — параметр, имеющий размерность длины и характеризующий неоднородность материала;

β — неотрицательный безразмерный параметр ($\beta \geq 0$), который можно рассматривать как параметр аппроксимации.

Параметр L_1 находится в [1] из условия согласования градиентного критерия с линейной механикой разрушения и выражается через известные характеристики материала — предел прочности σ_b и критический коэффициент интенсивности напряжения K_{Ic} — по формуле

$$L_1 = (2/\pi) K_{Ic}^2 / \sigma_b^2. \quad (2)$$

Будем считать, что разрушение в окрестности рассматриваемой точки начинается при достижении эффективным напряжением σ_e предела прочности материала и первоначально распространяется по площадке действия максимального растягивающего напряжения.

Интегральный критерий Нейбера–Новожилова. При неоднородном напряженном состоянии разрушение в хрупком теле начинается тогда, когда в рассматриваемой точке предела прочности материала σ_b достигает не максимальное, а среднее нормальное напряжение σ_v на площадке, имеющей фиксированный наименьший размер L , и включающей рассматриваемую точку. При постоянном напряжении вдоль наибольшего размера площадки интегральный критерий можно записать в виде

$$\langle \sigma_v \rangle = \frac{1}{L_s} \int_0^{L_s} \sigma_v dl = \sigma_b, \quad (3)$$

где размер площадки осреднения находится из формулы

$$L_* = (2/\pi)K_{lc}^2/\sigma_n^2. \quad (4)$$

Трехпараметрический интегральный критерий.

Для определения начала разрушения будем сравнивать с пределом прочности не среднее нормальное напряжение $\langle \sigma_v \rangle$, а эффективное напряжение σ_e , которое вычисляется по формуле

$$\sigma_e = \sigma_v^{\max} / \left(1 + \sqrt{\eta^2 - 1 + \sigma_v^{\max} / \langle \sigma_v \rangle} \right)^2, \quad (5)$$

где η — безразмерный параметр аппроксимации ($0 \leq \eta \leq 1$). При $\eta = 1$ критерий совпадает с интегральным критерием Нейбера – Новожилова. Разрушение происходит при достижении эффективным напряжением предела прочности материала и первоначально распространяется по площадке осреднения.

Численный алгоритм для расчета на прочность.

На основе градиентного критерия и метода граничных элементов (в варианте метода фиктивных нагрузок) был разработан численный алгоритм для расчета на прочность. При этом характерная особенность построенного алгоритма состоит в том, что в ходе расчетов необходимо определять не только компоненты напряженного состояния, но и их производные по пространственным координатам.

При использовании метода граничных элементов возникает проблема в расчетах, связанная с тем, что напряжения для внутренних точек с удовлетворительной точностью могут быть найдены при условии, что эти точки удалены от контура на расстояние большее длины одного элемента [4]. В связи с этим необходимо было разработать алгоритм, позволяющий с высокой точностью вычислять напряжения в точках тела, находящихся вблизи границы.

Численный алгоритм для определения напряжений вблизи границы тела включает в себя два этапа. На первом этапе находим напряжения $\sigma_v^i = \sigma_i^i$ в средних точках граничных элементов и производные по касательной к контуру $\partial \sigma_v^i / \partial s$ в этих точках. На втором этапе в теле на малом расстоянии $|\Delta_n|$ от граничных элементов основного контура проводим некоторым образом новую гранично-элементную ломаную линию, образующую вспомогательный контур. Используя уравнения равновесия бесконечно малого элемента на контуре тела, определяем приближенно граничные условия для вспомогательного контура через найденные ранее значения напряжений σ_v^i на основном контуре и производных $\partial \sigma_v^i / \partial s$. Применяя метод граничных элементов к задаче с заданными граничными условиями на вспомогательном контуре и вычисляя напряжения в центре каждого граничного элемента этого контура, мы фактически находим напряжения для интересующих нас внутренних точек исходной задачи, но уже с более высокой степенью точности.

Производные нормального напряжения, необходимые для вычисления модуля градиента, определим, используя конечно-разностные формулы численного дифференцирования. Для вычисления производной $\partial \sigma_v^i / \partial s$ нормального напряжения по касательной s к контуру воспользуемся трехточечным шаблоном численного дифференцирования с неравными шагами. Для вычисления производной $\partial \sigma_v^i / \partial n$ нормального напряжения по нормали n

к контуру воспользуемся двухточечным шаблоном численного дифференцирования.

Подставляя вычисленные значения σ_i и g_v для каждой из средних точек граничных элементов в выражение (1) для σ_e и определяя точку, где эффективное напряжение максимально, найдем место начала разрушения.

В общем случае кривизна контура концентратора может быть не постоянной, а переменной величиной, в этом случае для определения граничных условий на вспомогательном контуре, будем использовать дифференциальные уравнения равновесия для плоской задачи в произвольной криволинейной ортогональной системе координат (α_1, α_2) [5], а не в цилиндрической, как ранее [3].

Рассмотрим первое из этих уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 \sigma_{11}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 \sigma_{12}) + \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{12} - \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{22} + H_1 H_2 F_1 = 0, \quad (6)$$

где H_1, H_2 — параметры Ламе, представляющие собой отношения приращений длин координатных линий $a_2 = const$ или $a_1 = const$ к соответствующим приращениям da_1 или da_2 криволинейных координат

$$H_1 = \sqrt{(\partial x / \partial \alpha_1)^2 + (\partial y / \partial \alpha_1)^2}$$

$$H_2 = \sqrt{(\partial x / \partial \alpha_2)^2 + (\partial y / \partial \alpha_2)^2},$$

$\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ — компоненты тензора напряжений;

F_1 — проекция объемной силы на координатную линию α_1 .

Будем использовать такую систему координат, в которой контур концентратора описывается уравнением $\alpha_1 = const$. Если предположить, что в рассматриваемых задачах объемные силы отсутствуют и на контуре концентратора равны нулю нормальные σ_{11} и касательные σ_{12} напряжения, то уравнение (6) на свободном контуре запишется в виде

$$H_2 \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{22} = 0, \quad (7)$$

где σ_{22} — тангенциальное напряжение.

Пусть при переходе от рассматриваемого i -го граничного элемента контура к следующему приращению параметра α_2 будет постоянным $\Delta \alpha_2 = const$. Так как длина элементов $\Delta s^i = 2a^i$ не является постоянной, то параметр Ламе $H_2^i = \Delta s^i / \Delta \alpha_2$ для каждого элемента будет иметь свои значения.

Пусть при переходе от основного контура к вспомогательному, построенному по вышеописанной методике, параметр α_1 получает приращение $\Delta \alpha_1 = const$. При этом приращении параметра α_2 по длине соответствующих элементов двух контуров $\Delta \alpha_2$ остаются постоянными. Однако длина граничных элементов изменяется на величину $2\Delta a^i$, где Δa^i приращение полудлины i -го элемента при переходе от основного контура к вспомогательному. Следовательно, параметр H_2^i получает приращение $\Delta H_2^i = 2\Delta a^i / \Delta \alpha_2$.

Для использования в численном алгоритме производных в уравнении (7) запишем через приращение соответствующих величин и координат

$$(2\alpha^i/\Delta\alpha_2)\frac{\Delta\sigma_{11}^i}{\Delta\alpha_1} - \frac{(2\Delta\alpha^i/\Delta\alpha_2)}{\Delta\alpha_1}\sigma_{22}^i = 0.$$

Учитывая, что $\Delta\alpha_1 = const$, $\Delta\alpha_2 = const$, $\sigma_n^i = \sigma_{11}^i$, где σ_n^i — нормальное к контуру напряжение, и при $\sigma_{22}^i > 0$; $\sigma_v^i = \sigma_{22}^i$, из полученного уравнения найдем приращение $\Delta\sigma_n^i$ при переходе от основного к вспомогательному контуру:

$$\Delta\sigma_n^i = \frac{\Delta\alpha^i}{\alpha^i}\sigma_v^i.$$

Так как на основном контуре $\sigma_n|_1 = 0$, то окончательно одно из двух граничных условий на вспомогательном контуре запишется в виде

$$\sigma_n^i|_2 = \frac{\Delta\alpha^i}{\alpha^i}\sigma_v^i. \quad (8)$$

Для получения следующего граничного условия рассмотрим второе из имеющихся в [5] двух дифференциальных уравнений равновесия

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial\alpha_1}(H_2\sigma_{12}) + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}(H_1\sigma_{22}) + \\ & + \frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\sigma_{12} - \frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\sigma_{11} + H_1H_2F_2 = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где F_2 — проекция объемной силы на координатную линию α_2 .

Так как в рассматриваемых задачах объемные силы отсутствуют и на контуре концентратора $\sigma_{11} = 0$ и $\sigma_{12} = 0$, то уравнение (9) записывается на свободном контуре в более простом виде:

$$H_2 \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\sigma_{22} + H_1 \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\alpha_2} = 0.$$

Разделив все на H_1 и H_2 , выразим первый член уравнения через остальные:

$$\frac{1}{H_1} \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\alpha_1} = -\frac{1}{H_2} \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\alpha_2} - \frac{1}{H_1H_2} \frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\sigma_{22} = 0. \quad (10)$$

Учитывая, что по определению параметры Ламе H_1 и H_2 представляют собой отношения приращений длин dn , ds координатных линий к соответствующим приращениям $\delta\alpha_1$, $\delta\alpha_2$ криволинейных координат, из (10) получим уравнение

$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial n} = -\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial s} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial s}\sigma_{22}. \quad (11)$$

Для использования в численном алгоритме некоторых производных в уравнении (11) перепишем через приращения соответствующих величин и координат:

$$\frac{\Delta\sigma_{12}^i}{\Delta n} = -\frac{\Delta\sigma_{22}^i}{\Delta s} - \frac{1}{H_1} \frac{\Delta H_1}{\Delta s^i}\sigma_{22}^i.$$

Согласно методике построения вспомогательного контура, все элементы вспомогательного контура удалены от соответствующих элементов основного контура параллельным переносом на одинаковое расстояние $|\Delta n| = const$. Приращение внешней нормали Δn при таком переносе отрицательно $\Delta n = -|\Delta n| = const$ для всех элементов. Параметр α_i

при переходе от основного контура к вспомогательному также изменяется на постоянную величину $\Delta\alpha_i = const$. Следовательно, параметр H_1 , представляющий собой отношение $\Delta n/\alpha_i$, также является константой и $\Delta H_1 = 0$ для всех элементов. Тогда последний член в уравнении (11) зануляется и, учитывая, что касательное напряжение $\sigma_{12}^i = \sigma_s^i$, и при $\sigma_{22}^i > 0$; $\sigma_v^i = \sigma_{22}^i$, найдем из этого уравнения приращение касательного напряжения:

$$\Delta\sigma_s^i = -\frac{\partial\sigma_v^i}{\partial s}\Delta n. \quad (12)$$

Так как $\Delta n = -|\Delta n|$ и на основном контуре $\sigma_s|_1 = 0$, то окончательно второе граничное условие на вспомогательном контуре запишется в виде

$$\sigma_s^i|_2 = \frac{\partial\sigma_v^i}{\partial s}|\Delta n|. \quad (13)$$

Уравнение (13) совпадает с уравнением, полученным в [3] с помощью условий равновесия в полярной системе координат. Однако это совпадение обеспечено рассмотренной методикой построения вспомогательного контура.

Экспериментальные данные и численный анализ. В результате лабораторных испытаний трех эбонитовых образцов на одноосное растяжение было получено среднее значение предела прочности $\sigma_b = 38,78$ МПа (стандартное отклонение 1 МПа) и модуль Юнга $E = 1,79$ ГПа, а также с помощью системы видео-корреляции Vic-3d по результатам двух экспериментов получен коэффициент Пуассона $\mu = 0,45$.

По результатам четырех экспериментов на растяжение эбонитовых образцов в виде полосы с краевыми вырезами был получен критический коэффициент интенсивности напряжений $K_{Ic} = 2,815$ МПа м^{1/2}. Для вычисления K_{Ic} использовалась формула из [6] $K_{Ic} = \sigma Y(\lambda)\sqrt{l}$, где λ — отношение глубины выреза к ширине образца, $Y(\lambda) = 1,98 + 0,72\lambda - 8,48\lambda^2 + 27,36\lambda^3$. По полученным стандартным характеристикам материала σ_b и K_{Ic} с помощью (2) вычислено значение $L_I = 3,35$ мм.

Из того же листа эбонита были изготовлены образцы в виде полос с центральными круглыми отверстиями для испытаний на растяжение. Осредненные размеры образцов (по 3 для каждого диаметра d отверстия), а также значения предельных номинальных напряжений приведены в табл. 1.

Численный анализ был проведен с помощью программы расчета методом граничных элементов (в варианте фиктивных нагрузок) на языке Fortran, взятой из [4] и модифицированной для расчета по градиентному критерию. Контур полосы был разбит на 300 элементов, а контур отверстия — на 360 элементов.

Результаты численных расчетов предельного номинального напряжения по критериям максимальных напряжений (КМН), градиентному критерию (ГК) при $\beta = 0$ и $\beta = L_I/d$, интегральному критерию (ИК) Нейбера — Новожилова и трехпараметрическому интегральному критерию (ИК-3), проведенных с помощью метода граничных элементов, приведены в табл. 2. Из таблицы видно, что при $\beta = 0$ значения предельных номинальных напряжений по градиентному критерию выше предела прочности, что противоречит физическому смыслу. Для лучшего соответствия с экспериментальными

Геометрические размеры образцов и предельные нагрузки

Диаметр d , мм	Длина, мм	Ширина, мм	Толщина, мм	σ_* , МПа
5	135	49,86	8,24	33,67
2	65	9,83	8,03	34,99
1	65	9,56	8,06	38,08

Таблица 2

Численные оценки предельного номинального напряжения

Диаметр d , мм	$\beta = L_1/d$	КМН, МПа	ГК($\beta=0$), МПа	ГК($\beta=L_1/d$), МПа	ИК, МПа	ИК-3, МПа
5	0,67	12,98	35,07	29,82	24,67	27,32
2	1,675	12,54	46,98	31,87	29,84	33,44
1	3,35	13,09	64,6	36,61	33,87	36,8

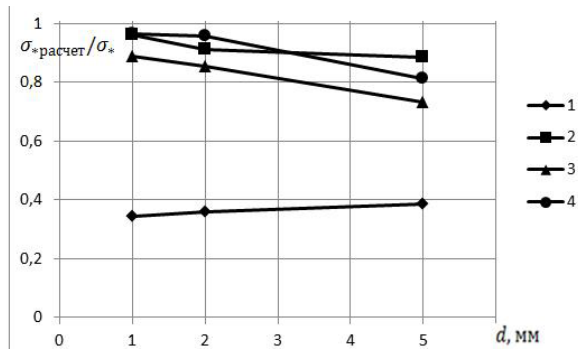


Рис. 1. Отношение численных оценок предельного номинального напряжения по различным критериям к экспериментальным значениям:

- 1 — критерий максимальных напряжений;
- 2 — градиентный критерий при $\beta=L_1/d$;
- 3 — интегральный критерий Нейбера–Новожилова;
- 4 — трехпараметрический интегральный критерий

данными по разрушению образцов предлагается следующая гипотеза. Пусть параметр β представляет собой отношение представительного размера неоднородности материала L_1 к диаметру отверстия d . Сравнение результатов расчетов по градиентному критерию при $\beta=L_1/d$, а также по другим критериям представлено на рис. 1.

Классический локальный критерий максимальных напряжений дает существенно заниженную оценку предельного номинального напряжения по сравнению с экспериментальными данными, в то время как, значения предельной нагрузки, полученные с помощью нелокальных критериев разрушения, ближе к значениям, полученным экспериментальным путем. Для классического и градиентного критериев при увеличении числа элементов в 2 раза изменения расчетных данных не превысили 0,6 %, для интегрального критерия — 0,2 %.

Библиографический список

1. Леган, М. А. О взаимосвязи градиентных критериев локальной прочности в зоне концентрации напряжений с линейной механикой разрушения / М. А. Леган // ПМТФ. — 1993. — Т. 34, № 4. — С. 146–154.
2. Леган, М. А. Определение разрушающей нагрузки, места и направления разрыва с помощью градиентного подхода разрушения / М. А. Леган // ПМТФ. — 1994. — Т. 35, № 5. — С. 117–124.
3. Шеремет, А. С. Применение градиентного критерия прочности и метода граничных элементов к плоской задаче о концентрации напряжений / А. С. Шеремет, М. А. Леган // ПМТФ. — 1999. — Т. 40, № 4. — С. 214–221.
4. Крауч, С. Методы граничных элементов в механике твердого тела / С. Крауч, А. Старфилд. — М.: Мир, 1987. — 328 с.
5. Новожилов, В. В. Теория упругости / В. В. Новожилов. — Л.: Судпромгиз, 1958. — 370 с.
6. Партон, В. З. Механика упругопластического разрушения / В. З. Партон, Е. М. Морозов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1985. — 504 с.

ЛЕГАН Михаил Антонович, доктор технических наук, старший научный сотрудник Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск; профессор кафедры прочности летательных аппаратов Новосибирского государственного технического университета.

Адрес для переписки: legan@ngs.ru

БЛИНОВ Валерий Александрович, аспирант, младший научный сотрудник лаборатории статической прочности Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск.

Адрес для переписки: Blin89-08@mail.ru

Статья поступила в редакцию 11.09.2015 г.

© М. А. Леган, В. А. Блинов

МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТОНКОЙ ПРОВОЛОКИ ПОСЛЕ ВОЛОЧЕНИЯ (НА ПРИМЕРЕ НЕРЖАВЕЮЩЕЙ СТАЛИ 12Х18Н9Т)

Объект исследования — тонкая проволока для изготовления несущих сеток пластинчато-сетчатых панелей. Экспериментально на примере стали 12Х18Н9Т и на базе реологической модели показано, что вследствие значительных остаточных напряжений от волочения механические характеристики проволоки существенно отличаются от характеристик стали. Предлагается методика оценки средних значений остаточных напряжений, касательных модулей нагрузки и разгрузки от напряжений растяжения, условного предела текучести и предела пропорциональности проволоки по характеристикам стали и начальным модулям нагрузки и разгрузки.

Ключевые слова: проволока, модуль упругости, остаточные напряжения, условный предел текучести, предел пропорциональности, волочение.

В последнее время плетеные металлические сетки используются как несущий элемент конструкции, например, в составе пластинчато-сетчатых панелей [1] на ФГУП «НПП «Прогресс», г. Омск. Расчет таких конструкций невозможен без информации о механических характеристиках проволоки, применяемой для плетения сетки.

При исследовании механических характеристик несущей сетки в составе пластинчато-сетчатых панелей [2, 3] установлено, что модуль упругости растяжения проволоки в сетке существенно (в 5...7 раз) меньше модуля Юнга стали ($E = 1,95 \cdot 10^5$ МПа). Существенно отличаются и другие механические характеристики. Расчеты на растяжение проволоки в составе сетки, проведенные методами сопротивления материалов, показали, что это отличие не может быть только следствием кривизны проволоки. В инженерной практике, особенно на стадии проектирования, отсутствует информация о механических характеристиках проволоки до плетения. Задача получения адекватной исходной проволоки не всегда организационно возможна, а ее испытания для каждого типа сетки и диаметра проволоки d трудоемки и длительны. Задачу можно упростить, имея математическую модель, определяющую механические характеристики с минимальным количеством испытаний непосредственно проволоки или сетки.

В работе [4] авторами предложена реологическая модель проволоки. Показано, что отличие механических характеристик стали и проволоки является следствием остаточных напряжений в про-

волоке, возникающих при волочении. Модель оценочна, так как использует билинейную диаграмму растяжения и не моделирует разгрузку.

В настоящей работе предлагается уточненная модель, опирающаяся на аппроксимированную диаграмму растяжения — зависимость напряжений от относительного удлинения $\sigma(\varepsilon)$, касательный модуль $D = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ и соответствующие зависимости $D(\sigma)$ и $\sigma(D)$.

При моделировании приняты следующие положения:

1. До нагружения $\sigma = 0$, а средние растягивающие напряжения в поверхностных слоях $\bar{\sigma}_1$ и сжимающие в сердцевине $\bar{\sigma}_2$ занимают относительную площадь сечения A_1 и A_2 , которая не меняется в процессе нагружения вплоть до выравнивания остаточных напряжений. Соответственно,

$$A_1 + A_2 = 1 \quad (1)$$

$$\bar{\sigma}_1 \cdot A_1 + \bar{\sigma}_2 \cdot A_2 = 0. \quad (2)$$

2. При нагружении до σ напряжения в слоях получают приращение $\Delta\bar{\sigma}_1$ и $\Delta\bar{\sigma}_2$, и $\Delta\bar{\sigma}_1 \cdot A_1 + \Delta\bar{\sigma}_2 \cdot A_2 = \sigma$ (рис. 1) или

$$d\Delta\bar{\sigma}_1 \cdot A_1 + d\Delta\bar{\sigma}_2 \cdot A_2 = d\sigma. \quad (3)$$

2.1 Принята гипотеза плоских сечений. Соответственно, приращения $d\Delta\varepsilon$ деформаций слоев при приращении напряжения нагрузки на $d\sigma$, а в слоях

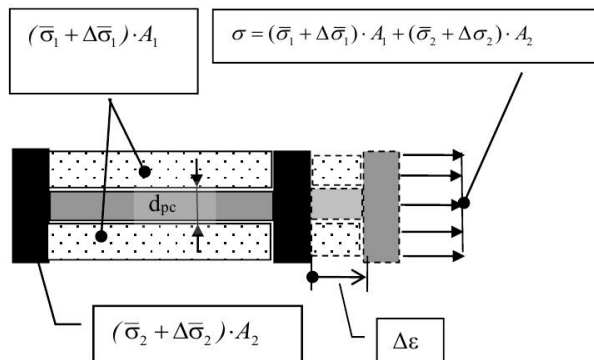


Рис. 1. Схема напряжений в слоях проволоки при нагружении

на величины $d\Delta\bar{\sigma}_1$ и $d\Delta\bar{\sigma}_2$, равны

$$d\Delta\varepsilon = \frac{d\Delta\bar{\sigma}_1}{D(\bar{\sigma}_1 + \Delta\bar{\sigma}_1)} = \frac{d\Delta\bar{\sigma}_2}{D(\bar{\sigma}_2 + \Delta\bar{\sigma}_2)}, \quad (4)$$

где

$$\Delta\bar{\sigma}_1 = \sum d\Delta\bar{\sigma}_1, \quad (5)$$

$$\Delta\bar{\sigma}_2 = \sum d\Delta\bar{\sigma}_2. \quad (6)$$

2.2 Текущий касательный модуль проволоки

$$D^{пров} = \frac{d\sigma_H}{d\Delta\varepsilon}. \quad (7)$$

Касательный модуль нагружения слоя равен $D(\sigma)$, а модуль разгрузки — E .

При начальном растяжении внешний слой догружается, т.е. $D_1 = D(\bar{\sigma}_1)$, а внутренний слой разгружается и $D_2 = -E$. При разгрузке $D_1 = -E$, $D_2 = D(\bar{\sigma}_2)$. После элементарных преобразований с учетом (7), (3), (4)

$$D_{нагр}^{пров}(\sigma = 0) = D(\bar{\sigma}_1) \cdot A_1 + E \cdot A_2, \quad (8)$$

$$D_{разгр}^{пров}(\sigma = 0) = -[E \cdot A_1 + D(\bar{\sigma}_2) \cdot A_2]. \quad (9)$$

При определенных экспериментально $D_{нагр}^{пров}(\sigma = 0)$ и $D_{разгр}^{пров}(\sigma = 0)$, а также известном E система уравнений (1), (2), (8), (9) сводится к двум нелинейным алгебраическим уравнениям относительно A_1 и $D(\bar{\sigma}_1)$

$$\begin{cases} D(\bar{\sigma}_1) \cdot A_1 + (1 - A_1) \cdot E = D_{нагр}^{пров}(\sigma = 0), \\ E \cdot A_1 + (1 - A_1) \cdot D(-\bar{\sigma}_1) \cdot \frac{A_1}{(1 - A_1)} = D_{разгр}^{пров}(\sigma = 0) \end{cases} \quad (10)$$

После численного решения (10) вычисляем

$$\bar{\sigma}_1(D_1), \quad \bar{\sigma}_2 = -\bar{\sigma}_1 \cdot \frac{A_1}{(1 - A_1)}, \quad A_2 = 1 - A_1.$$

Преимущество такого подхода заключается в том, что эксперимент проводится практически в пределах закона Гука и возможен расчет механических параметров сетки методами сопротивления материалов. При отсутствии проволоки и результатов ее испытаний можно испытывать непосредственно сетку, а затем пересчитать $D_{нагр}^{пров}(\sigma = 0)$ и $D_{разгр}^{пров}(\sigma = 0)$ по результатам этих испытаний.

В соответствии с требуемым законом нагружения и двигаясь с некоторым шагом $d\sigma$ от $\sigma = 0$, вычисляем значения $\sigma(\Delta\varepsilon)$ и $D^{пров}(\sigma_H)$.

Из (3), (4) на каждом i -том шаге

$$d\Delta\bar{\sigma}_2^i = \frac{d\sigma_i}{\frac{D_1^i}{D_2^{i-1}} \cdot A_1 + A_1}, \quad d\Delta\bar{\sigma}_1^i = \frac{D_1^i}{D_2^{i-1}} \cdot d\Delta\bar{\sigma}_2^i,$$

где

$$D_2^{i-1} = \begin{cases} D(\bar{\sigma}_2 + \sum_1^{i-1} d\Delta\bar{\sigma}_2^k), \\ \text{если } (\bar{\sigma}_2 + \sum_1^{i-1} d\Delta\bar{\sigma}_2^k) \cdot \text{sign}(d\sigma_i) > 0 \\ \text{(догрузка слоя 2)} \\ E, \text{ если } (\bar{\sigma}_2 + \sum_1^{i-1} d\Delta\bar{\sigma}_2^k) \cdot \text{sign}(d\sigma_i) < 0 \\ \text{(разгрузка слоя 2)} \end{cases}$$

$$D_1^i = \begin{cases} D(\bar{\sigma}_1 + \sum_1^i d\Delta\bar{\sigma}_1^k), \\ \text{если } (\bar{\sigma}_1 + \sum_1^i d\Delta\bar{\sigma}_1^k) \cdot \text{sign}(d\sigma_i) > 0 \\ \text{(догрузка слоя 1)} \\ E, \text{ если } (\bar{\sigma}_1 + \sum_1^i d\Delta\bar{\sigma}_1^k) \cdot \text{sign}(d\sigma_i) < 0 \\ \text{(разгрузка слоя 1)} \end{cases}$$

$$\text{Из (4)} \quad d\Delta\varepsilon^i = \frac{d\Delta\bar{\sigma}_1^i}{D_1^i},$$

а также

$$\Delta\varepsilon^i = \sum_1^i d\Delta\varepsilon^i, \quad \sigma_i = \sum_1^i d\sigma_k.$$

Текущее значение касательного модуля проволоки в соответствии с (7)

$$(D^{пров})^i = \frac{d\sigma_i}{d\Delta\varepsilon^i}.$$

При выбранном (достаточно малом) шаге $d\sigma_i > 0$ получаем зависимости $\sigma_i(\Delta\varepsilon^i)$ и $(D^{пров})^i(\sigma_i)$. Последовательно изменяя знак $d\sigma_i$, получаем эти зависимости при различных циклах нагрузки-разгрузки. Для определения условного предела текучести варьируем максимальное значение σ_{iH} , пока при последующей полной разгрузке не получим $\Delta\varepsilon = 0,002$; тогда $\max \sigma_i = \sigma_{0,2}$.

Реализация алгоритма модели требует адекватного описания функции $\sigma(\varepsilon)$. Если имеются образцы проволоки, то требуемая функция может быть определена испытаниями на современных машинах с достаточной точностью в табличном виде. Однако на практике эта информация недоступна и приходится ограничиваться справочными значениями E , предела текучести $\sigma_{0,2}$, предела прочности σ_B и относительного удлинения при разрыве δ и на их основе аппроксимировать функцию $\sigma(\varepsilon)$.

Для повышения точности отдельно аппроксимируем начальную и конечную части диаграммы. Примем известное соотношение для предела упругости $\sigma_y = (0,25 \dots 0,49) \cdot \sigma_{0,2}$, считаем, что $D(\sigma \leq \sigma_y) = E$. Обзор стандартов на механические характери-

стики стали 12X18H9T [5] дает $\sigma_{0,2} = (196...216) \text{ МПа}$, $\sigma_B = (510...880) \text{ МПа}$, $\delta = (20...50)\%$. Предел выносливости $\sigma_{-1} \leq 279 \text{ МПа}$, что определяет рабочий диапазон напряжений растяжения.

Величины σ_B и δ , как показали опыты, примерно одинаковы для исходной проволоки и извлеченной из сетки. Испытание на растяжение извлеченной проволоки диаметром $d = (0,22 \dots 0,40)$ мм дали $\sigma_B \approx 756 \text{ МПа}$ и $\delta \approx 43\%$. Для аппроксимации принято также $\sigma_{0,2} = 216 \text{ МПа}$.

Начальную часть диаграмм аппроксимируем по четырем точкам:

$$\sigma = \sigma_y, \varepsilon = \frac{\sigma_y}{E}; \quad \sigma = \sigma_y - \Delta\sigma, \varepsilon = \frac{\sigma_y - \Delta\sigma}{E};$$

$$\sigma = \sigma_y + \Delta\sigma, \varepsilon = \frac{\sigma_y + \Delta\sigma}{E}, \quad \sigma = \sigma_{0,2}, \varepsilon = 0,002 + \frac{\sigma_{0,2}}{E}.$$

Принято $\Delta\sigma = 5 \text{ МПа}$. Результат аппроксимации $\sigma = 66,572 \cdot \ln \varepsilon + 600,69$ при достоверности аппроксимации $R^2 = 0,999$.

Конечную часть диаграмм аппроксимируем по пяти точкам.

Принимаем касательный модуль при $\sigma_{0,2}$ равным результату предыдущей аппроксимации, а при σ_B равным нулю.

$$\sigma = \sigma_{0,2}, \varepsilon = 0,002 + \frac{\sigma_{0,2}}{D(\sigma_{0,2})};$$

$$\sigma = \sigma_{0,2} + \Delta\sigma, \varepsilon = 0,002 + \frac{\sigma_{0,2} + \Delta\sigma}{D(\sigma_{0,2})};$$

$$\sigma = \sigma_{0,2} - \Delta\sigma, \varepsilon = 0,002 + \frac{\sigma_{0,2} - \Delta\sigma}{D(\sigma_{0,2})};$$

$$\sigma = \sigma_B + \Delta\sigma, \varepsilon = \delta + \Delta\varepsilon, \quad \sigma = \sigma_B - \Delta\sigma, \varepsilon = \delta - \Delta\varepsilon.$$

Принято $\Delta\varepsilon = 0,05$.

Результат аппроксимации $\sigma = 109,57 \cdot \ln \varepsilon + 848,91$ при достоверности аппроксимации $R^2 = 0,999$.

Итоговая диаграмма растяжения образована как сумма табличных значений по аппроксимации начальной и конечной частей и также аппроксимирована. Получено $\sigma = 108,53 \cdot \ln \varepsilon + 847,18$. Вычислив $D = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{108,53}{\varepsilon}$, имеем таблицы значений $\sigma(D)$ и $D(\sigma)$. После их аппроксимации получаем окончательно:

$$D(\sigma) = -1,429 \cdot 10^{-8} \cdot \sigma^5 + 0,000038 \cdot \sigma^4 - 0,0396075643 \cdot \sigma^3 + 20,27 \cdot \sigma^2 - 5133 \cdot \sigma + 524968,$$

$$\sigma(D) = -109,27 \cdot \ln(D) + 1360,9.$$

Авторами проведена серия испытаний проволоки $d = 0,40$ мм до плетения на растяжение. Опыты проводились на испытательных машинах ZWICK/ROELL Z010 и Tinius Olsen H10KT. Фиксировалось до 1800 значений относительного удлинения и соответствующих усилий, которые выводились в MS Excel и обрабатывались.

Суть обработки диаграмм деформирования заключалась в вычислении касательного модуля и его осреднения по (5...7) точкам, коррекции результатов из-за некоторой кривизны образцов. Выпрямление образцов перед испытаниями изменило бы фактические характеристики. Для этого в каждом опыте регистрировались максимальный модуль D_{max} и соответствующая деформация ε_{max} . Пример диаграмм

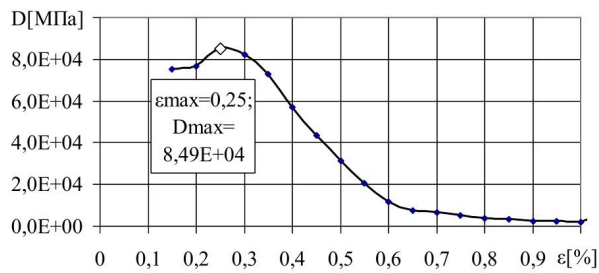


Рис. 2. Зависимость $D(\varepsilon)$ образца № 3 проволоки диаметром 4 мм

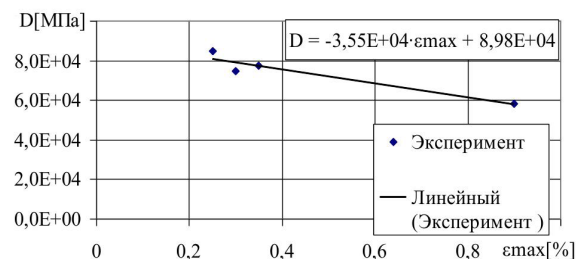


Рис. 3. Определение $D_{нагр}^{про}(\sigma = 0)$

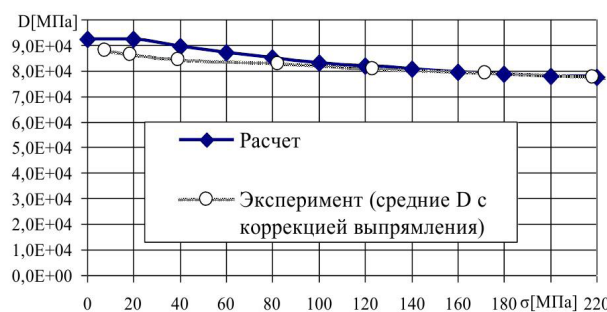


Рис. 4. Рабочая часть зависимости $D_{нагр}^{про}(\sigma)$

мы растяжения одного образца приведен на рис. 2. На рис. 3 приведена зависимость $D_{max}(\varepsilon_{max})$ для 4-х образцов и ее линейризация, по которой определен $D_{нагр}^{про}(\sigma = 0) = 8,98 \cdot 10^4 \text{ МПа}$. Эту операцию мы назвали коррекцией выпрямления.

Для определения $D_{разр}^{про}(\sigma = 0)$ на ZWICK/ROELL Z010 задавался цикл нагружения $\sigma = (8...100...8) \text{ МПа}$. Расчет модуля проводился не по начальной, а по конечной длине образца на момент начала разгрузки. Коррекция выпрямления не проводилась. В опытах определялся максимальный модуль разгрузки и корректировался с учетом удлинения образца после начального растяжения. Получено $D_{разр}^{про}(\sigma = 8...100...8) = 1,48 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

По возможностям машины в испытаниях при близких к нулю напряжениях (усилиях) не обеспечивалась требуемая точность. Поэтому по модели для $D_{разр}^{про}(\sigma = 0) = (1,2...1,4) \cdot 10^5 \text{ МПа}$ определялся коэффициент пересчета, который составил 1,13.

$$\text{В итоге получено } D_{разр}^{про}(\sigma = 0) = \frac{1,48 \cdot 10^5}{1,13} = 1,31 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

Расчет по модели дал: $A_1 = 0,661$, $A_2 = 0,339$, $\bar{\sigma}_1 = 214 \text{ МПа}$, $\bar{\sigma}_2 = -418 \text{ МПа}$.

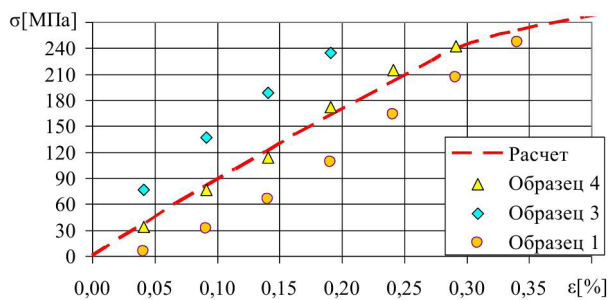


Рис. 5. Рабочая часть диаграммы растяжения проволоки

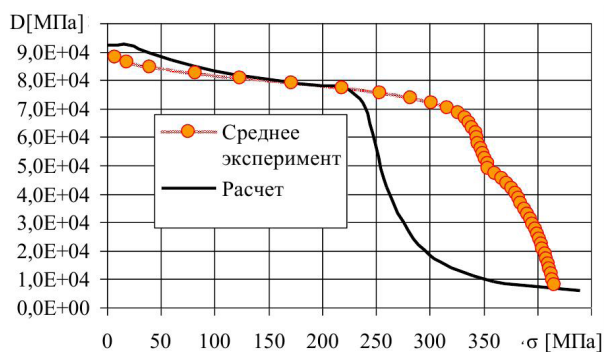
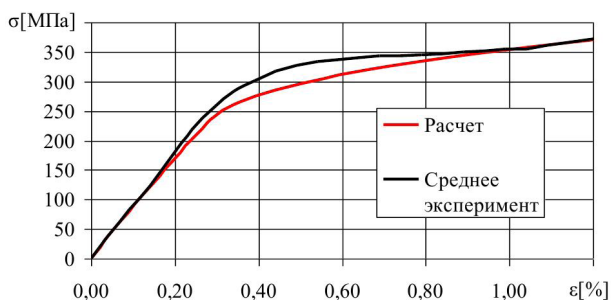
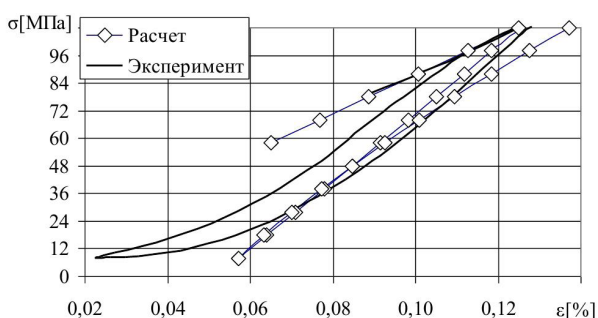
Рис. 6. Зависимость $D_{нагр}^{пров}(\sigma)$ за пределами рабочего диапазона напряжений

Рис. 7. Аппроксимированная и экспериментальная диаграммы растяжения проволоки

Рис. 8. Диаграммы деформирования в цикле $\sigma = (8-108-8) МПа$

Диаметр границы слоев при этом составляет $d_{pc} = \sqrt{A_2} \cdot d = 0,582 \cdot d$ (рис. 1).

Проверка адекватности модели велась сравнением расчетных параметров с экспериментальными данными.

Условный предел текучести составил $\sigma_{0,2} = 258 МПа$, т.е. ожидаемо повысился от наклепа после волочения. Предел пропорциональности $\sigma_{ПЦ}$, вычисленный как σ , при котором $(D_{нагр}^{пров})'(\sigma_i) \approx D_{нагр}^{пров}(\sigma=0)/2$, практически совпал с величиной $\sigma_{0,2}$.

В рабочем диапазоне напряжений $\sigma < \sigma_{-1}$ расчетные и экспериментальные (с коррекцией выпрямления) значения модуля растяжения совпадают удовлетворительно (рис. 4). Диаграмма растяжения проволоки также удовлетворительно согласуется с экспериментом (рис. 5).

При повторной нагрузке после разгрузки в цикле нагружения $\sigma = (0...100...8) МПа$ максимальный модуль составил: в модели $1,58 \cdot 10^5 МПа$, в эксперименте $1,62 \cdot 10^5 МПа$. В цикле $\sigma = (0...300...100) МПа$ — $1,69 \cdot 10^5 МПа$ и $1,77 \cdot 10^5 МПа$ соответственно.

За пределами рабочего диапазона погрешность в расчете модуля значительна (рис. 6). Как видно на рис. 7, это связано с погрешностью аппроксимации в средней части диаграммы растяжения стали, так как нет справочных данных в диапазоне напряжений $\sigma_{0,2} < \sigma < \sigma_B$.

На рис. 8 приведено соотношение расчетной и экспериментальной диаграмм деформирования проволоки в цикле нагружения $\sigma = (8...100...8) МПа$. Совпадение при максимальных значениях модулей можно считать удовлетворительным. Модель не учитывает некоторое уменьшение модуля в начале разгрузки.

Заключение и выводы.

1. Установлено, что основной причиной отличия механических характеристик проволоки от аналогичных параметров исходного материала являются остаточные напряжения от волочения.

2. Предложена реологическая модель, позволяющая расчетным путем адекватно оценить величину и область распространения остаточных напряжений и основные механические характеристики проволоки. Исходными для расчета являются справочные данные и результаты экспериментального определения модулей нагрузки и разгрузки проволоки. Последние при отсутствии исходной проволоки могут быть пересчитаны методами сопротивления материалов по результатам испытаний сетки.

3. Результаты работы могут быть использованы при оперативном расчете конкретных несущих секток на прочность и выносливость.

Библиографический список

1. Пат. РФ № 2340478, МПК В60R 13/08, ПО1К 11/16. Панель звукоизолирующая / Зубарев А. В., Трибельский И. А., Адонин В. А., Малютин В. И.; заявитель и патентообладатель ФГУП «НПП «Прогресс». — опубл. 10.12.2008, Бюл. № 24. — 7 с.
2. ГОСТ 6613-86. Сетки проволочные тканые с квадратными ячейками. Технические условия. — М.: Изд-во стандартов. 1986. — 16 с.
3. Федорова, М. А. Исследование механических характеристик несущей металлической сетки из стали 12Х18Н9Т в составе пластинчато-сетчатой панели / М. А. Федорова, З. Н. Соколовский, С. А. Корнеев, В. А. Таран // Динамика систем, механизмов и машин: материалы IX Междунар. науч.-техн. конф., 11–13 ноября 2012 г. В 5 кн. Кн. 1. — Омск, 2014. — С. 161–164.
4. Таран, В. А. Исследование механических характеристик тонкой проволоки из нержавеющей стали 12Х18Н9Т / В. А. Таран, Г. С. Русских, З. Н. Соколовский // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: мате-

риалы XXIV Всерос. конф., 2–4 июня 2015 г. – Омск, 2015. – С. 190–194.

5. Марочник сталей и сплавов / Под ред. В. Г. Сорокина. – М. : Машиностроение, 1989. – 640 с.

ТАРАН Владимир Алексеевич, инженер-конструктор 1-й категории Научно-производственного предприятия «Прогресс», г. Омск; аспирант кафедры основ теории механики и автоматического управления Омского государственного технического университета (ОмГТУ).

Адрес для переписки: vltaran-omsk@yandex.ru

РУССКИХ Григорий Серафимович, кандидат технических наук, доцент кафедры основ теории механики и автоматического управления ОмГТУ.

Адрес для переписки: rgs@omgtu.ru

СОКОЛОВСКИЙ Зиновий Наумович, кандидат технических наук, доцент (Россия), доцент кафедры сопротивления материалов ОмГТУ.

Адрес для переписки: ninasok@yandex.ru

КОНДЮРИН Алексей Юрьевич, заместитель генерального директора по производству — директор опытного производства Научно-производственного предприятия «Прогресс», г. Омск.

Адрес для переписки: info@progress-omsk.ru

Статья поступила в редакцию 11.09.2015 г.

© В. А. Таран, Г. С. Русских, З. Н. Соколовский,

А. Ю. Кондюрин

Книжная полка

51/Б68

Благодатских, А. И. Сборник задач и упражнений по теории игр : учеб. пособие / А. И. Благодатских, Н. Н. Петров. – 2-е изд., испр. и доп. – СПб. : Лань, 2014. – 296 с.

Задачник предназначен как для первоначального, так и для углубленного изучения теории игр. Представлены задачи и упражнения по всем основным классам игр: матричным, антагонистическим, позиционным, кооперативным, дифференциальным играм, играм n лиц в нормальной форме. Приведены индивидуальные задания для студентов. Каждый параграф начинается со сводки основных фактов.

Для студентов, аспирантов и научных работников, изучающих теорию игр.

51/А13

Абдрахманов, В. Г. Элементы вариационного исчисления и оптимального управления. Теория, задачи, индивидуальные задания : учеб. пособие / В. Г. Абдрахманов, А. В. Рабчук. – 2-е изд., испр. – СПб. : Лань, 2014. – 111 с.

Учебное пособие рассчитано на студентов технического университета, изучающих раздел «Вариационное исчисление и оптимальное управление». Вариационное исчисление занимается задачами поиска экстремума функционалов и является основой изучения теории оптимального управления. Пособие содержит большое количество примеров с решениями, задачи для самостоятельной подготовки и варианты индивидуальных расчетных работ.

51/Г69

Горлач, Б. А. Тензорная алгебра и тензорный анализ : учеб. пособие / Б. А. Горлач. – СПб. : Лань, 2015. – 156 с.

Содержатся основные сведения из тензорной алгебры и тензорного анализа. Изложение ведется от частного к общему. Тензоры представляются в операторной, матричной и компонентно-индексной формах в ортонормированном и произвольном базисах. Предлагаются необходимые для усвоения материала упражнения и расчетные работы.

Пособие предназначено специалистам, бакалаврам и магистрам, обучающимся по направлениям: «Прикладная математика и информатика», «Математика», «Прикладная математика», «Механика и математическое моделирование», «Прикладная математика и физика».

51/Ф15

Фаддеев, М. А. Основные методы вычислительной математики : учеб. пособие / М. А. Фаддеев, К. А. Марков. – СПб. : Лань, 2014. – 154 с.

В учебном пособии изложены численные методы, наиболее часто применяемые при решении прикладных задач. Приведены методы интерполяции и аппроксимации элементарными функциями, решения систем линейных и нелинейных уравнений, методы вычисления определителей и обращения матриц, численного интегрирования и дифференцирования. Отобраны простые и достаточно эффективные методы, которые легко реализуются на современной компьютерной технике.

Учебное пособие предназначено в первую очередь для студентов, магистрантов и аспирантов естественнонаучных, физико-математических и инженерно-технических специальностей. Отдельные разделы могут быть использованы школьниками старших классов, занимающимися научной работой в рамках НОУ.