

# ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 514.185:512.7

**В. Ю. ЮРКОВ**

Омский государственный  
педагогический университет

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙЧАТЫХ МОНОИДАЛЬНЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

Формулируются условия, позволяющие получать линейчатые моноидальные гиперповерхности многомерных пространств. Приводятся соответствующие формулы для коэффициентов. Описанный метод позволяет учитывать условия линейчатости гиперповерхностей при построении аналитической модели. Результаты могут быть полезны при обработке экспериментальных данных для получения оптимальной математической модели многофакторной зависимости.

**Ключевые слова:** гиперповерхность, свойство линейчатости, гиперплоскость параллелизма, математическая модель.

Одними из самых трудных объектов математического моделирования в инженерной геометрии являются гиперповерхности различной, часто большой, размерности и различных, иногда высоких, порядков. Как правило, они являются конечным результатом научных исследований сложных систем, зависящих от нескольких факторов. Построение их математических моделей возможно только экспериментальным путём с учётом имеющейся априорной информации, позволяющей ограничить степень уравнения, определить вид уравнения или размерность факторного пространства [1, 2]. Поэтому использование термина «конструирование» в таком случае не

совсем корректно, так как под конструированием обычно понимается проектирование и воспроизведение двумерных поверхностей сложной формы, удовлетворяющих набору предварительно заданных условий, различного геометрического и технического характера [3].

С другой стороны, над математическим моделированием сложных гиперповерхностей довлеет «проклятие размерности», заключающееся в быстром росте технических и вычислительных трудностей при решении задачи. Трудности возрастают ещё в большей степени, если учитывать нелинейность объекта моделирования. Поэтому при обработке

экспериментальных данных для систем с большим количеством факторов ограничиваются второй или третьей степенью уравнения модели с последующими процедурами определения оптимальной формы уравнения. Кроме того, во всех случаях любые используемые математические модели описывают моноидальные гиперповерхности, то есть гиперповерхности вида  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Целью настоящей статьи является описание возможности учёта некоторой априорной информации геометрического характера при построении математической модели гиперповерхности. Такой информацией может стать предполагаемое свойство линейчатости гиперповерхности, и тогда свойство линейчатости необходимо будет совместить со свойством моноидальности в одной модели. Эти два свойства естественным образом совмещаются в случае линейной модели в виде гиперплоскости.

Поэтому рассмотрим общую моноидальную квадратичную модель

$$y = c_{1,1} x_1^2 + c_{2,2} x_2^2 + \dots + c_{n,n} x_n^2 + c_{1,2} x_1 x_2 + \dots + c_{n-1,n} x_{n-1} x_n + c_1 x_1 + \dots + c_n x_n + c_0. \quad (1)$$

Свойство моноидальности в сочетании со свойством линейчатости предполагает существование гиперплоскости параллелизма. Тогда

$$y = f_m(t) x_m + f_{m-1}(t) x_{m-1} + \dots + f_1(t) x_1 + f_0(t);$$

$$f_i(t) = a_{i,1} t + a_{i,0}, \quad i = 0, \dots, m;$$

$$t = b_m x_m + b_{m+1} x_{m+1} + \dots + b_n x_n.$$

Первое уравнение описывает однопараметрическое семейство  $m$ -плоскостей в  $(m+1)$ -мерном пространстве  $\langle y, x_1, \dots, x_m \rangle$ . Каждая  $m$ -плоскость семейства является следом гиперплоскости, параллельной пространству  $\langle x_{m+1}, \dots, x_n \rangle$ . Линейная форма  $t$  в  $(n-m)$ -мерном пространстве  $\langle x_{m+1}, \dots, x_n \rangle$  есть след гиперплоскости, параллельной пространству  $\langle y, x_1, \dots, x_m \rangle$ . При изменении параметра  $t$  эта гиперплоскость описывает пучок параллельных гиперплоскостей. Пересечение соответственных по параметру  $t$  гиперплоскостей первого семейства и гиперплоскостей пучка есть однопараметрическое множество  $(n-1)$ -плоскостей, то есть гиперповерхность, расслаивающаяся в пучке параллельных гиперплоскостей на  $(n-1)$ -плоскости.

Свойство линейчатости отразится в коэффициентах общей квадратичной модели следующим образом:

$$c_i = a_{i,0}, \quad i = 0, \dots, m-1;$$

$$c_m = a_{m,0} + a_{0,1} b_m;$$

$$c_j = a_{0,1} b_j, \quad j = m+1, \dots, n;$$

$$\begin{pmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{1,m-1} & c_{1,m} & c_{1,m+1} & \dots & c_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & c_{m,m} & \dots & \dots & c_{m,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & c_{m+1,m+1} & \dots & c_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & c_{n,n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1,1} b_m & a_{1,1} b_{m+1} & \dots & a_{1,1} b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} b_m & a_{m,1} b_{m+1} & \dots & a_{m,1} b_n & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно, для того чтобы моноидальная гиперповерхность (1) была линейчатой с плоскостью параллелизма, необходимо и достаточно равенство нулю коэффициентов

$$\begin{pmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{1,m-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{m-1,1} & \dots & c_{m-1,m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_{m+1,m+1} & \dots & c_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n,m+1} & \dots & c_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Если значения остальных коэффициентов  $c_{i,j}$  известны, то найти гиперплоскость параллелизма можно, если придать параметру  $t$  любое значение, например  $t = 0$ , а одному из коэффициентов линейной формы придать единичное значение, например  $b_m = 1$ . Тогда при любом значении  $i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ; из любой системы уравнений  $c_{i,j} = a_{i,j} b_j$ ,  $j = m, \dots, n$ ; можно определить значения остальных коэффициентов  $b_j$ .

Общая моноидальная кубическая модель

$$y = c_{1,1,1} x_1^3 + c_{2,2,2} x_2^3 + \dots + c_{n,n,n} x_n^3 + c_{1,1,2} x_1^2 x_2 + \dots + c_{1,1,1} x_1^2 + c_{2,2,2} x_2^2 + \dots + c_{n,n} x_n^2 + c_{1,2} x_1 x_2 + \dots + c_{n-1,n} x_{n-1} x_n + c_1 x_1 + \dots + c_n x_n + c_0. \quad (2)$$

обладающая свойством линейчатости и имеющая гиперплоскость параллелизма может быть представлена в виде

$$y = f_m(t) x_m + f_{m-1}(t) x_{m-1} + \dots + f_1(t) x_1 + f_0(t);$$

$$f_i(t) = a_{i,2} t^2 + a_{i,1} t + a_{i,0}, \quad i = 0, \dots, m;$$

$$t = b_m x_m + b_{m+1} x_{m+1} + \dots + b_n x_n. \quad (3)$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} c_{i,2,2} & \dots & c_{i,2,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{i,n,n} \end{pmatrix} = a_{i,2} \begin{pmatrix} b_2^2 2b_2 b_3 \dots 2b_2 b_n \\ b_3^2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ b_n^2 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, m;$$

коэффициенты при членах второй степени

$$\begin{pmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{1,m-1} & c_{1,m} & c_{1,m+1} & \dots & c_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & c_{m-1,m-1} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & c_{m,m} & c_{m,m+1} & \dots & c_{m,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & c_{m+1,m+1} & \dots & c_{m+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & c_{n,n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \dots 0 & a_{1,1}b_m & a_{1,1}b_{m+1} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{m-1,1}b_m & a_{m-1,1}b_{m+1} & \dots & \dots \\ a_{m,1}b_m + a_{0,2}b_m^2 & a_{m,1}b_{m+1} + 2a_{0,2}b_m b_{m+1} & \dots & \dots & \dots \\ & a_{0,2}b_{m+1}^2 & 2a_{0,2}b_{m+1}b_{m+2} & \dots & \dots \\ & & a_{0,2}b_{m+2}^2 & \dots & \dots \\ & & & \dots & \dots \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \dots & a_{1,1}b_n \\ \dots & \dots \\ \dots & a_{m-1,1}b_n \\ \dots & a_{m,1}b_n + 2a_{0,2}b_m b_n \\ \dots & 2a_{0,2}b_{m+1}b_n \\ \dots & 2a_{0,2}b_{m+2}b_n \\ \dots & \dots \\ \dots & a_{0,2}b_n^2 \end{pmatrix}$$

Коэффициенты при линейных членах остаются прежними.

Рассмотрим пример. Пусть для  $n=2$  требуется построить отображение  $y=y(x_1, x_2)$  единичного квадрата,  $0 \leq x_1 \leq 1$ ,  $0 \leq x_2 \leq 1$ , в отсек моноидальной линейчатой поверхности при следующих условиях:

$$y(0, 0) = y_{0,0}, \quad y(1, 0) = y_{1,0}, \quad y(0, 1) = y_{0,1}, \quad y(1, 1) = y_{1,1},$$

$$y(x_1, 0) = d_{1,0,2}x_1^2 + d_{1,0,1}x_1 + d_{1,0,0}, \quad y(x_1, 1) = d_{1,1,2}x_1^2 + d_{1,1,1}x_1 + d_{1,1,0},$$

$$y(0, x_2) = d_{0,2,2}x_2^2 + d_{0,2,1}x_2 + d_{0,2,0}, \quad y(1, x_2) = d_{1,2,2}x_2^2 + d_{1,2,1}x_2 + d_{1,2,0}.$$

Тогда сразу видно, что

$$d_{1,0,0} = d_{0,2,0} = y_{0,0}, \quad d_{1,0,1} = y_{1,0} - y_{0,0} - d_{1,0,2}, \quad d_{1,1,1} = y_{1,1} - y_{0,1} - d_{1,1,2},$$

$$d_{0,2,1} = y_{0,1} - y_{0,0} - d_{0,2,2}, \quad d_{1,2,1} = y_{1,1} - y_{1,0} - d_{1,2,2}.$$

Поэтому

$$y(x_1, 0) = d_{1,0,2}x_1^2 + (y_{1,0} - y_{0,0} - d_{1,0,2})x_1 + y_{0,0},$$

$$y(x_1, 1) = d_{1,1,2}x_1^2 + (y_{1,1} - y_{0,1} - d_{1,1,2})x_1 + y_{0,1},$$

$$y(0, x_2) = d_{0,2,2}x_2^2 + (y_{0,1} - y_{0,0} - d_{0,2,2})x_2 + y_{0,0},$$

$$y(1, x_2) = d_{1,2,2}x_2^2 + (y_{1,1} - y_{1,0} - d_{1,1,2})x_2 + y_{1,0}.$$

Уравнение искомой поверхности имеет вид

$$y = y(x_1, 0)(1-x_2) + y(x_1, 1)x_2 + y(0, x_2)(1-x_1) + y(1, x_2)x_1 - [y_{0,0}(1-x_1)(1-x_2) + y_{1,0}x_1(1-x_2) + y_{0,1}(1-x_1)x_2 + y_{1,1}x_1x_2].$$

Подставляя предыдущие выражения и сравнивая с уравнением (2), заметим, что  $c_{1,1,1} = c_{2,2,2} = 0$ . Но, учитывая (3),  $c_{1,1,1} = a_{1,2}b_1^2$ ,  $c_{2,2,2} = a_{2,2}b_2^2$ . Кроме этого, сами условия задачи определяют неравенства  $b_1 \neq 0$ ,  $b_2 \neq 0$ . Если бы  $b_1 = 0$  или  $b_2 = 0$ , то какие-либо две противоположные из четырех заданных граничных кривых  $y(x_1, 0)$ ,  $y(x_1, 1)$ ,  $y(0, x_2)$ ,  $y(1, x_2)$  были бы прямыми. Поэтому возможны только равенства  $a_{1,2} = a_{2,2} = 0$ . Это означает, что

$$d_{1,1,2} - d_{1,0,2} = 0, \quad d_{1,2,2} - d_{0,2,2} = 0$$

или

$$d_{1,1,2} = d_{1,0,2}, \quad d_{1,2,2} = d_{0,2,2}.$$

Окончательный вывод: для того, чтобы отсек поверхности, опирающийся на четыре пересекающиеся граничные кривые второго порядка и являющийся моноидальным образом квадрата, был линейчатым, необходимо и достаточно, чтобы были равны коэффициенты при старших членах в уравнениях противоположных кривых.

#### Библиографический список

1. Математика и САПР. В 2-х кн. Кн. 1 / П. Шенен [и др.]. – М.: Мир, 1988. – 204 с.
2. Математика и САПР. В 2-х кн. Кн. 2 / П. Жермен-Лакур [и др.]. – М.: Мир, 1989. – 264 с.
3. Юрков, В. Ю. Инженерная геометрия и основы геометрического моделирования: учеб. пособие / В. Ю. Юрков, В. Я. Волков, О. М. Куликова. – Омск: ОГИС, 2005. – 118 с.

**ЮРКОВ Виктор Юрьевич**, доктор технических наук, профессор (Россия), профессор кафедры прикладной информатики и математики.

Адрес для переписки: viktor\_yurkov@mail.ru

Статья поступила в редакцию 26.02.2015 г.

© В. Ю. Юрков

## Книжная полка

**Георгиевский, О. Строительные чертежи: справ. пособие / О. Георгиевский. – М.: Архитектура-С, 2015. – 368 с. – ISBN 978-5-9647-267-2.**

Изложены правила выполнения и оформления рабочих строительных чертежей зданий различного назначения, строительных конструкций. Приведены примеры выполнения и оформления чертежей на разных стадиях проектирования. Отличительная особенность данного справочного пособия — наличие упражнений на чтение строительных чертежей. Приведены задания на графические работы по строительному черчению, выполняемые в строительных техникумах в соответствии с программой курса. Для учащихся строительных и архитектурных специальностей техникумов, колледжей, студентов вузов, бакалавров, а также студентов вечерних отделений и экстернатов.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТСЕКОВ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Формулируются условия, позволяющие получать математические модели отсеков гиперповерхностей, топологически эквивалентных гиперкубу и симплексу. Приводятся соответствующие уравнения отсеков. Описанный метод позволяет выполнять процедуру нелинейной интерполяции при построении аналитической модели.

**Ключевые слова:** гиперповерхность, гиперкуб, симплекс, отображение, математическая модель.

В инженерной геометрии часто приходится решать задачу математического описания гиперповерхностей различной, часто большой, размерности и различных, иногда высоких, порядков. Как правило, они являются конечным результатом научных исследований сложных систем, зависящих от нескольких факторов. Построение их математических моделей возможно только экспериментальным путём. При этом возникает необходимость учитывать некоторый набор предварительно заданных условий, различного геометрического и технического характера. В качестве таких условий могут задаваться множества точек, линий, поверхностей и многообразий разных размерностей, которым должна быть инцидентна конструируемая гиперповерхность [1, 2].

С другой стороны, над математическим моделированием сложных гиперповерхностей довлеет «проклятие размерности», заключающееся в быстром росте технических и вычислительных трудностей при решении задачи. Трудности возрастают ещё в большей степени, если учитывать нелинейность объекта моделирования. Поэтому при обработке экспериментальных данных для систем с большим количеством факторов ограничиваются второй или третьей степенью уравнения модели с последующими процедурами определения оптимальной формы уравнения. Кроме того, во всех случаях любые используемые математические модели описывают монотонные гиперповерхности, то есть гиперповерхности вида  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Целью настоящей статьи является описание возможности учёта априорной информации геометрического характера при построении математической модели отсека гиперповерхности. Такой информацией может стать предполагаемое свойство аппроксимируемости гиперповерхности линейными полиэдрами и преобразование каждого линейного полиэдра в нелинейный.

Предположим, что в  $n$ -мерном пространстве с системой  $x_1, x_2, \dots, x_n$  в результате предварительной работы определены следующие множества: точки  $A_i(x_{1,i}, \dots, x_{n,i})$ ; одномерные рёбра  $A_i A_j, i \neq j$ ; двумерные грани  $A_i A_j A_k A_m, i \neq j \neq k \neq m$ ; трёхмерные грани; ...; гиперграни. Предположим, что объединение этих множеств образует полиэдр, топологически эквивалентный единичному гиперкубу:  $u_1 \times u_2 \times \dots \times u_{n-1} \times u_n$ ,

$u_i \in [0, 1]$ . Определённость полиэдра означает следующее:

— точки  $A_i(x_{1,i}, \dots, x_{n,i})$  являются образами вершин гиперкуба  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  при  $u_i$  равно 0 или 1;

— рёбра  $A_i A_j$  являются образами рёбер гиперкуба, то есть любая точка  $A$  полиэдра,  $A \in A_i A_j$ , определяется как  $A = A_i(1 - u_i) + A_j u_i$  при условии, что её положение на ребре определяется только параметром  $u_i$ ;

— двумерные грани  $A_i A_j A_k A_m$  полиэдра являются образами двумерных граней гиперкуба, то есть любая точка  $A$  полиэдра,  $A \in A_i A_j A_k A_m$ , определяется как

$$A = A_i(1 - u_i)(1 - u_j) + A_j(1 - u_i)u_j + A_k u_i(1 - u_j) + A_m u_i u_j$$

при условии, что её положение на грани определяется только параметрами  $u_i, u_j$  и так далее.

Продолжая процесс таким образом, мы получим известную полиэдральную ( $n$ -линейную) аппроксимацию отсека гиперповерхности, при которой точка отсека гиперповерхности будет определяться как образ соответствующей точки единичного гиперкуба

$$A = A_{0\dots 0}(1 - u_1)(1 - u_2)\dots(1 - u_n) + A_{10\dots 0}u_1(1 - u_2)\dots(1 - u_n) + \dots + A_{0\dots 01}(1 - u_1)(1 - u_2)\dots u_n + A_{110\dots 0}u_1 u_2 \dots \dots(1 - u_n) + \dots + A_{0\dots 011}(1 - u_1)(1 - u_2)\dots u_{n-1} u_n + \dots + A_{1\dots 1}u_1 u_2 \dots u_{n-1} u_n$$

Сам отсек гиперповерхности будет аппроксимирован отсеком линейчатой (во всех размерностях от нуля до  $n$ ) гиперповерхности  $n$ -го порядка.

Предположим, что на каждом ребре единичного куба выбрано конечное число точек, кроме уже известных крайних, и найдены их образы. Последние уже не будут лежать на отрезке — образе соответствующего ребра, но могут быть аппроксимированы кривой  $x_i = x_i(u_j), i = 1, \dots, n$ , где хотя бы одна из параметрических функций — нелинейная. Таким образом, будут аналитически описаны все одномерные рёбра отсека гиперповерхности.

Для того, чтобы описать грани отсека гиперповерхности, поступим следующим образом.

Предположим, что выбрана двумерная грань гиперкуба

$$u_1 \times u_2 = [0, 1] \times [0, 1], u_3 = u_4 = \dots = u_n = 0.$$

Известны образы её вершин — точки  $A_{00}(0, 0) = y_{00}$ ,  $A_{10}(1, 0) = y_{00}$ ,  $A_{01}(0, 1) = y_{00}$ ,  $A_{11}(1, 1) = y_{00}$ ; её рёбер — кривые  $y(0, u_2)$ ,  $y(1, u_2)$ ,  $y(u_1, 0)$ ,  $y(u_1, 1)$ . Тогда образ двумерной грани можно представить при помощи билинейной интерполяции в виде

$$\begin{aligned} y(u_1, u_2) = & y(0, u_2)(1 - u_1) + y(1, u_2) u_1 + \\ & + y(u_1, 0)(1 - u_2) + y(u_1, 1) u_2 - \\ - & [y_{00}(0, 0) (1 - u_1) (1 - u_2) + y_{10}(1, 0) u_1 (1 - u_2) + \\ & + y_{01}(0, 1) (1 - u_1) u_2 + y_{11}(1, 1) u_1 u_2]. \end{aligned}$$

Предположим, что выбрана трёхмерная грань гиперкуба

$$u_1 \times u_2 \times u_3 = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1], u_4 = \dots = u_n = 0.$$

Известны образы её вершин — точки  $y_{000}$ ,  $y_{100}$ ,  $y_{010}$ ,  $y_{110}$ ,  $y_{001}$ ,  $y_{101}$ ,  $y_{011}$ ,  $y_{111}$ ; её рёбер — кривые  $y(0, u_2, 0)$ ,  $y(1, u_2, 0)$ ,  $y(u_1, 0, 0)$ ,  $y(u_1, 1, 0)$ ,  $y(0, u_2, 1)$ ,  $y(1, u_2, 1)$ ,  $y(u_1, 0, 1)$ ,  $y(u_1, 1, 1)$ ,  $y(0, 0, u_3)$ ,  $y(1, 0, u_3)$ ,  $y(0, 1, u_3)$ ,  $y(1, 1, u_3)$ ; её двумерных граней —  $y(u_1, u_2, 0)$ ,  $y(u_1, u_2, 1)$ ,  $y(u_1, 0, u_3)$ ,  $y(u_1, 1, u_3)$ ,  $y(0, u_2, u_3)$ ,  $y(1, u_2, u_3)$ . Тогда образ трёхмерной грани можно представить при помощи трилинейной интерполяции в виде

$$\begin{aligned} y(u_1, u_2, u_3) = & y(0, u_2, u_3)(1 - u_1) + y(1, u_2, u_3) u_1 + \\ & + y(u_1, 0, u_3)(1 - u_2) + y(u_1, 1, u_3) u_2 + \\ & + y(u_1, u_2, 0) (1 - u_3) + y(u_1, u_2, 1) u_3 - \\ - & [y(0, 0, u_3) (1 - u_1)(1 - u_2) + y(0, 1, u_3) (1 - u_1) u_2 + \\ & + y(1, 0, u_3) u_1(1 - u_2) + y(1, 1, u_3) u_1 u_2] - \\ - & [y(0, u_2, 0)(1 - u_1)(1 - u_3) + y(0, u_2, 1)(1 - u_1) u_3 + \\ & + y(1, u_2, 0) u_1(1 - u_3) + y(1, u_2, 1) u_1 u_3] - \\ - & [y(u_1, 0, 0)(1 - u_2)(1 - u_3) + y(u_1, 1, 0) u_2 (1 - u_3) + \\ & + y(u_1, 0, 1) (1 - u_2) u_3 + y(u_1, 1, 1) u_2 u_3] + \\ + & [y_{000} (1 - u_1) (1 - u_2) (1 - u_3) + y_{100} u_1 (1 - u_2) (1 - u_3) + \\ & + y_{010} (1 - u_1) u_2 (1 - u_3) + y_{001} (1 - u_1) (1 - u_2) u_3 + \\ & + y_{110} u_1 u_2 (1 - u_3) + y_{101} u_1 (1 - u_2) u_3 + \\ & + y_{011} (1 - u_1) u_2 u_3 + y_{111} u_1 u_2 u_3]. \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс, в итоге получим следующую интерполяционную формулу

$$\begin{aligned} y(\bar{U}) = & \sum_{i=1}^n [y(\bar{U}, u_i = 0)(1 - u_i) + y(\bar{U}, u_i = 1)u_i] - \\ - & \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n [y(\bar{U}, u_i = u_j = 0)(1 - u_i)(1 - u_j) + y(\bar{U}, u_i = 1, u_j = 0)u_i(1 - u_j) + \\ & + y(\bar{U}, u_i = 0, u_j = 1)(1 - u_i)u_j + y(\bar{U}, u_i = u_j = 1)u_i u_j] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + & \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j \\ k=1 \\ i \neq j \neq k}}^n [y(\bar{U}, u_i = u_j = u_k = 0)(1 - u_i)(1 - u_j)(1 - u_k) + \dots \\ & \dots + y(\bar{U}, u_i = u_j = u_k = 1)u_i u_j u_k] - \dots \\ \dots + & (-1)^{n+1} \left[ y(0, \dots, 0) \prod_{i=1}^n (1 - u_i) + \dots + y(1, \dots, 1) \prod_{i=1}^n u_i \right]. \end{aligned}$$

Предположим, что в  $n$ -мерном пространстве объединение таких же множеств образует полиэдр, топологически эквивалентный единичному симплексу с системой барицентрических координат:  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1} = 1, 0 \leq u_i \leq 1$ . Осуществляя аналогичный процесс моделирования полиэдрального отсека, получим  $n$ -мерное нелинейное симплицеальное отображение со следующей формулой

$$\begin{aligned} y(\bar{U}) = & \sum_{i=1}^{n+1} u_i [ \sum_{j=1}^{C_n^{n-1}} y(\bar{U}, u_i \neq 0, u_j = 0) - \\ & - \sum_{\substack{j=1 \\ k=1}}^{C_n^{n-2}} y(\bar{U}, u_i \neq 0, u_j = u_k = 0, j \neq k) + \\ & + \sum_{\substack{j=1 \\ k=1 \\ m=1}}^{C_n^{n-3}} y(\bar{U}, u_i \neq 0, u_j = u_k = u_m = 0, j \neq k \neq m) + \dots \\ & \dots + \sum_{j=1}^{C_n^{n-p}} (-1)^{p+1} y(\bar{U}, u_i \neq 0, u_j = \dots = 0, j \neq k \neq \dots) + \dots \\ & \dots + (-1)^{n+1} y(u_i, 0, \dots, 0) ]. \end{aligned}$$

Таким образом, полученные формулы позволяют осуществить многомерную полиэдральную нелинейную интерполяцию моноидальной гиперповерхности, разбитой на гиперкубы или симплексы, с вычислением значения в любой точке, не лежащей на границах.

#### Библиографический список

1. Математика и САПР. В 2-х кн. Кн. 1 / П. Шенен [и др.]. — М. : Мир, 1988. — 204 с.
2. Математика и САПР. В 2-х кн. Кн. 2 / П. Жермен-Лакур [и др.]. — М. : Мир, 1989. — 264 с.

**ЮРКОВ Виктор Юрьевич**, доктор технических наук, профессор (Россия), профессор кафедры прикладной информатики и математики.  
Адрес для переписки: viktor\_yurkov@mail.ru

Статья поступила в редакцию 26.02.2015 г.

© В. Ю. Юрков

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ПЕРЕДАЧИ СО ВСТРОЕННОЙ ЦЕПЬЮ УПРАВЛЕНИЯ

Предложено схемное решение конструкции и алгоритм динамического исследования поведения механического автовариатора, с функцией стабилизации компонентов мощности силового потока при переменном внешнем нагружении.

**Ключевые слова:** автовариатор, цепь управления, обобщенная координата, передаточная функция.

В последнее время в технологических и транспортных машинах все большее применение находят механические бесступенчатые передачи, функционирование которых обеспечивает повышение производительности, экономичность эксплуатации машин за счет гармонизации компонентов трансформируемой мощности, что достигается адекватным изменением скорости исполнительного органа машины при стационарном режиме работы приводного двигателя.

Создание и дальнейший расчет параметров, характеризующих поведение механической системы, содержащей бесступенчатую фрикционную передачу, со встроенной цепью управления и, как следствие, автоматически управляемым движением, которое возможно реализовать законом управления передаточной функцией, в зависимости от критериев синтеза, является задачей настоящего исследования.

В качестве объекта исследования выберем схемное решение конструкции механического торового автовариатора по [1] (рис. 1). Представленная конструкция, содержит в своем составе цепь управления передаточной функцией, составными элементами которой являются: винтовое соединение ведомого вала 3 с ведомым звеном 4, втулка 5, поводки 10 и пружина 12. Принцип работы такого устройства заключается в следующем: изменяющийся внешний силовой поток от ведомого звена 4, передаваясь через винтовое соединение 6 создает осевую силу, действующую на ведомый вал 3, эта осевая сила вызывает осевое движение ведомого вала 3 вместе со втулкой 5 до достижения равновесия с упругой силой деформации пружины 12. Движение втулки 5, в свою очередь, передается через поводки 10 и преобразуется в угловое движение промежуточных роликов 7, что приводит к автоматическому изменению передаточного отношения вариатора.

В исследуемой механической системе возможно выделить две координаты, определяющие движение исследуемой конструкции. Координата  $\varphi_1$  определяет основное движение, передаточная функция которого будет следующей:

$$U_{1,4} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{R_1}{R_4},$$

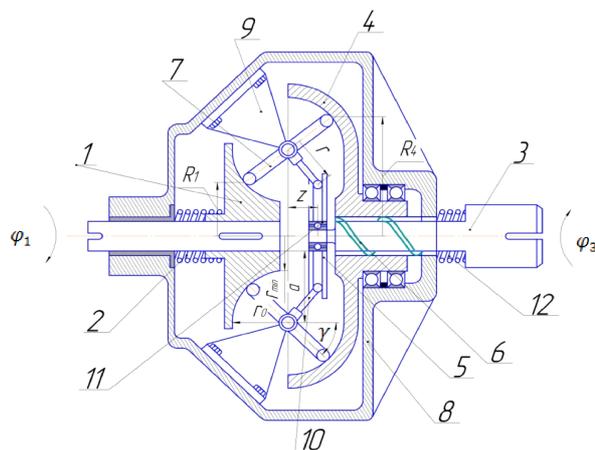


Рис. 1. Конструкция фрикционного торового автовариатора [1]:

- 1 — ведущее звено с наружной торцевой поверхностью;
- 2 — упругий элемент ведущего звена; 3 — ведомый вал;
- 4 — ведомое звено с внутренней торцевой поверхностью;
- 5 — втулка; 6 — винтовое (кулачковое) соединение;
- 7 — ролики; 8 — неподвижный корпус;
- 9 — кронштейны; 10 — поводки; 11 — подшипники;
- 12 — упругий элемент в цепи управления

а координата  $z$  устанавливает линейное осевое движение втулки 5 в составе цепи управления автовариатора. Изменяемая координата  $z$  приводит к повороту осей установки промежуточных роликов 7, что, в свою очередь, вызывает изменение кинематических радиусов  $R_1$  и  $R_4$  основных звеньев 1 и 4 (рис. 1) и, следовательно, передаточной функции  $U_{1,4}$  основного движения.

Причиной эволюции кинематической схемы автовариатора, реализуемой встроенной цепью управления, является переменное значение внешнего силового нагружения моментом сил, приложенных к ведомому звену 4 (рис. 1), его увеличение или уменьшение для определенности моделируется линейной зависимостью вида:

$$M_4 = M_0 \pm 9t, \quad (1)$$

где  $M_0$  — некоторое начальное значение момента;  $\vartheta$  — тангенс угла наклона изменяемой характеристики нагрузки с осью аргумента  $t$ ;  $t$  — время.

Рассмотрим эволюцию кинематической схемы в статике, приняв линейно изменяемое внешнее силовое возмущение.

Начальное (исходное) положение звеньев автовариатора целесообразно принять при  $R_1 = R_4$ , т.е. при  $U_{1,4} = 1$ ;

Изменение момента сил на ведомом звене  $M_4$  приводит к изменению возникающей осевой силы  $P_{oc}$  в винтовом соединении согласно зависимости:

$$P_{oc} = \frac{2M_4}{d_{cp} \operatorname{tg}(\beta + \rho)}, \quad (2)$$

где  $d_{cp}$  — средний диаметр резьбы в соединении 6;  $\beta$  — угол подъема винтовой линии резьбы;  $\rho$  — угол трения (для шариковинтовой передачи это значение примем  $\rho \approx (2 \div 5)^\circ$ , хотя в общем случае для винтового соединения

$$\rho = \operatorname{arctg} f', \quad (3)$$

где  $f'$  — приведенный угол трения и  $f' = \frac{f}{\cos \frac{\delta}{2}}$ , где

$f$  — коэффициент трения скольжения;  $\delta$  — половина угла профиля резьбы.

Осевая сила  $P_{oc}$  вызовет осевое перемещение  $z$  втулки:

$$z = \frac{P_{oc}}{c}, \quad (4)$$

где  $c$  — жесткость упругого элемента в цепи управления.

В свою очередь, такое осевое перемещение  $z$  вызывает угловое движение промежуточных роликов:

$$\gamma = \operatorname{arcsin} \frac{z}{r}, \quad (5)$$

где  $r$  — радиус поводка 10, взаимодействующего с втулкой 5.

Введя обозначения по [2]  $r_{min}$  и  $r_0$ , тогда по рис. 1  $a = r_{min} + r_0$  получаем

$$R_4 = r_{min} + r_0 + r_0 \cdot \sin \gamma, \quad R_4 = r_{min} + r_0 - r_0 \cdot \sin \gamma$$

и

$$U_{1,4} = \frac{a + r_0 \cdot \sin \gamma}{a - r_0 \cdot \sin \gamma},$$

откуда

$$\sin \gamma = \frac{a(U_{1,4} - 1)}{r_0(U_{1,4} + 1)}. \quad (6)$$

Объединяя (2) и (4), получим:

$$z = \frac{2M_4}{c \cdot d_{cp} \operatorname{tg}(\beta + \rho)}$$

и по (5) получим

$$\gamma = \operatorname{arcsin} \frac{2M_4}{c \cdot d_{cp} \operatorname{tg}(\beta + \rho)}. \quad (7)$$

Объединяем полученное выражение (7), учитывая характеристику  $M_4$  изменения силового момента на ведомом звене 4 с (6), где по [2] угловое перемещение роликов 7 зависит от изменения основных конструктивных параметров цепи управ-

ления вариатора. Приравнивая правые части указанных выражений, имеем следующее:

$$\frac{2M_4}{c \cdot d_{cp} \operatorname{tg}(\beta + \rho)} = \frac{a(U_{1,4} - 1)}{r_0(U_{1,4} + 1)}. \quad (8)$$

Уравнение (8) можно использовать для синтеза цепи управления автовариатора, а именно, в зависимости от критерия синтеза (например, обеспечение требуемой заданной передаточной функции) определить значение угла  $\beta$  подъема винтовой линии или значение «с» — жесткости упругого элемента, входящего в цепь управления, в зависимости от переменного внешнего нагружения.

Так, например, удовлетворяя критерию стационарности работы двигателя, на основе вариационного принципа механики, имеем:

$$M_A \omega_1 \eta = M_4 \omega_4, \quad (9)$$

где  $\eta$  — механический к.п.д. автовариатора, при этом

$$M_A \omega_1 \eta = \operatorname{const} \text{ и } \omega_4 = \frac{M_A \cdot \omega_1 \eta}{M_4}, \text{ следовательно,}$$

$$U_{1,4} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{M_4 \cdot \omega_1}{M_A \cdot \omega_1 \eta} = \frac{M_4}{M_A \cdot \eta}. \quad (10)$$

По (9), изменяя силовое нагружение, характеризующее  $M_4$ , находим соответствующее ему необходимое значение передаточного отношения  $U_{1,4}$ , тогда (8) следует решать относительно «с» или « $\beta$ », при этом геометрические параметры  $d_{cp}$ ,  $r$ ,  $r_{min}$ ,  $r_0$  являются свободными, что позволяет принимать их, решая конструкторскую задачу, по общим критериям работоспособности (прочность, жесткость и др.), исходя из величины трансформируемой мощности и ее компонентов (моментов сил, скоростей звеньев и др.) и учета реальных свойств механической системы.

Осевая сила  $P_{oc}$ , формируемая  $M_4$ , посредством винтового (кулачкового) соединения в цепи управления автовариатора, должна быть способна преодолевать не только силу пружины 12, но и значительное трение в зонах фрикционного контакта промежуточных роликов 7 с активными поверхностями ведущего и ведомого звеньев.

По рис. 2 силы трения  $F_A$  в зоне А должны пере-

крывать значение  $F_A \geq \frac{M_1}{R_1}$  или  $N \cdot f \geq \frac{M_1}{R_1}$ , где  $N$  —

нормальная сила во фрикционном контакте ведущее звено и ролик (зона А),  $f$  — коэффициент трения

скольжения, а в зоне В  $F_B \geq \frac{M_4}{R_4}$ , что необходимо по

условиям передачи силового потока. Следует отметить, что потребные значения сил трения в зонах  $F_A$  и  $F_B$  будут переменными, и для расчета элементов привода необходимо использовать их максимальные значения.

Силовой момент  $M_{тр}$  поворота промежуточных роликов для преодоления сил трения должен быть не менее

$$M_{тр} = F_A r_0 + F_B r_0 = r_0 (F_A + F_B).$$

Этот момент обеспечивает сила  $P_{oc1}$ , создаваемая упругим элементом 2 (рис. 1), значение которой

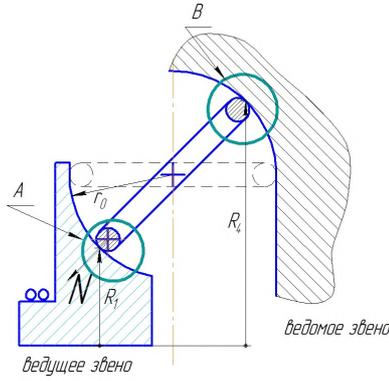


Рис. 2. Зоны фрикционного контакта промежуточных роликов и ведущего и ведомого звеньев по [1]

в исходном положении звеньев при принятых обозначениях

$$P_{oc1} \geq \frac{M_{TP}}{r},$$

а в промежуточном

$$P_{oc1} \geq \frac{M_{TP}}{r \cos \gamma} \tag{11}$$

т.е. при увеличении угла поворота промежуточных роликов расчетное значение  $P_{oc1}$  возрастает, поскольку нормальная сила в контакте возрастает, и изменение осевой силы в цепи управления определяется с учетом жесткости «с» упругого элемента 12 и усилий во фрикционном контакте

$$P_{oc} = c \cdot z + \frac{M_{TP}}{r \cos \gamma}.$$

Можно предположить, что из-за значительных диссипативных потерь (трение во фрикционных контактах велико) эволюция схемы автовариатора будет иметь признаки статического процесса. Свободные (собственные) колебания будут затухать не развиваясь, а вынужденные, порождаемые внешним нагружением будут иметь неколебательный характер.

Тем не менее составим модель динамического поведения автовариатора и, в первую очередь, определим собственные частоты динамической системы, образующей цепь управления автовариатора по координате  $z$ , которая определяет как положение звеньев цепи управления, так и кинематические размеры основных звеньев.

Изменение координаты  $z$  свяжем с втулкой, тем самым втулка будет звеном приведения.

Кинетическая энергия звена приведения будет такой:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{z})^2 + \frac{1}{2} J (\dot{\theta})^2, \tag{12}$$

где  $m$  — масса втулки, упорного подшипника качения, винтового соединения  $b$  (рис. 1);  $J$  — совокупный момент инерции промежуточных роликов в их поворотном движении, равный сумме моментов инерции роликов (зависит от их количества).

Поскольку кинетическая энергия звена приведения при поступательном движении

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{z})^2,$$

то приведенная масса определится как

$$m_{пр} = m + J \left( \frac{\dot{\theta}}{\dot{z}} \right)^2. \tag{13}$$

В цепи управления имеет место один упругий элемент с жесткостью «с», следовательно, собственная круговая частота в цепи управления определится как:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m_{пр}}} = \sqrt{\frac{c}{m + J \left( \frac{\dot{\theta}}{\dot{z}} \right)^2}}. \tag{14}$$

Значение  $k$  следует сравнить с частотой  $p$  линейного изменения момента  $M_4$ . В случаях, когда  $k \gg p$ , что характерно при монотонном апериодическом изменении  $M_4$  (следовательно,  $P_{oc}$ ) поведение исследуемой системы будет статическим, тем более это предположение будет справедливым при значительной диссипации энергии в цепи управления.

Приведем порядок составления модели динамического поведения механического автовариатора.

Уравнение Лагранжа для описания движения звена приведения по принятой нами координате  $z$  имеет известный вид:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial T}{\partial z} = P_{oc} + P_{\Pi} + P_R, \tag{15}$$

где  $P_{oc}$  — осевая сила, создаваемая  $M_4$  от винтового соединения;  $P_{\Pi}$  — сила упругости упругого элемента (пружина в цепи управления);  $P_R$  — сила трения, приведенная ко втулке.

Поскольку кинетическая энергия  $T$ , потенциальная энергия  $\Pi$  и энергия диссипации  $R$  могут быть представлены квадратичными формами:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{z})^2 \quad \Pi = \frac{1}{2} c z^2 \quad R = \frac{1}{2} b (\dot{z})^2,$$

то обобщенные силы получим дифференцированием

$$P_{oc} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) = m_{пр} \ddot{z}; \quad P_{\Pi} = \frac{\partial \Pi}{\partial z} = c \cdot z; \quad P_R = \frac{\partial R}{\partial \dot{z}} = b \cdot \dot{z};$$

тогда (15) преобразуется к виду

$$m_{пр} \ddot{z} + b \dot{z} + c z = P(t), \tag{16}$$

или, после деления на  $m_{пр}$ , получим известную форму уравнения движения звена приведения

$$\ddot{z} + 2n \dot{z} + k^2 z = \frac{1}{m_{пр}} P(t), \tag{17}$$

где  $P(t)$  — приведенная сила в общем случае, зависи-

мая от времени;  $2n = \frac{b}{m_{пр}}$  — коэффициент диссипации,

а  $k^2 = \frac{c}{m_{пр}}$  — квадрат частоты собственных колебаний цепи управления.

Уравнение (17) является общим дифференциальным уравнением вынужденного движения системы (цепи управления) с одной степенью свободы.

Общее решение дифференциального уравнения находят по известному алгоритму. Прежде всего, находят общее решение однородного уравнения без

правой части, которое моделирует собственные колебания системы, характеристики которых необходимы для назначения безрезонансных режимов работы цепи управления или отстройки собственных частот от частот режимов эксплуатации путем управления  $m_{пр}$  и «с».

Однородное уравнение:

$$mz'' + 2n\dot{z} + k^2z = 0 \quad (18)$$

при  $n < k$  (случай ограниченной диссипации) имеет решение:

$$z = e^{-nt} (c_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2}t + c_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2}t). \quad (19)$$

Первый сомножитель  $e^{-nt}$  характеризует затухание по времени колебаний, обусловленных сопротивлением, постоянные  $c_1$  и  $c_2$  определяются по начальным условиям, в частности, при  $t=0$  и  $z=z_0$ ,  $\dot{z}=\dot{z}_0$ , если при этом  $z_0=0$ , то  $c_1=0$ ; если  $t=0$  и  $\dot{z}=\dot{z}_0$ , то

$$c_2 = \frac{\dot{z}_0}{k} \quad \text{и}$$

$$z = e^{-nt} \frac{\dot{z}_0}{k} \sin \sqrt{k^2 - n^2}t. \quad (20)$$

Начальное положение системы принимаем

$$z_0 = \frac{P(t_0)}{c},$$

где  $P(t_0)$  — значение внешней силы, приложенной к системе при  $t=t_0$ .

При отсутствии начальной скорости и значительной диссипации движение становится аperiодическим:

$$z_0 = \frac{P(t)}{c} e^{-nt}. \quad (21)$$

Вязкое сопротивление (трение) направлено против скорости движения звена приведения и, как правило, зависит от скорости в первой степени или постоянно. При таком представлении характеристики сопротивления модель движения будет линейной при постоянных значениях коэффициентов при производных искомой функции. Задача об определении закономерностей движения в этих условиях может быть решена аналитически в конечном виде как для свободного движения системы так и при интегрируемой функции изменения внешнего силового возбуждения в модели вынужденного движения.

Отметим попутно, что в обширной литературе [3–8] приводятся доказательства о том, что частота свободных колебаний системы с демпфером практически равна частоте колебаний идеализированной системы.

Колебания в системе с демпфером затухают, о чем свидетельствует первый сомножитель  $e^{-nt}$  в уравнении (18) и (20) и в свободном движении отношение каждой последующей амплитуды к предыдущей

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_2}{z_3} = \dots = e^{-nt}, \quad \text{т.е. последовательность отношений}$$

пиковых значений амплитуды образует геометрическую прогрессию, а логарифм отношений пиковых значений  $\ln \frac{z_1}{z_2} = \lambda$  будет логарифмическим декре-

ментом затухания, который является характеристикой диссипативных свойств колебательной системы.

Иногда полезно определить работу сил трения за цикл для ее сравнения с энергией колебательного процесса. В первом приближении отношения этих работ называют коэффициентом поглощения  $\Psi$ , который для моделирования движения принимают  $\Psi = 2\lambda$ , т.е. коэффициент поглощения вдвое больше коэффициента логарифмического декремента колебаний и для поддержания колебательного процесса нужен источник энергии, компенсирующий ее поглощение диссипацией.

При наличии в системе сухого (Кулонова) трения оно может быть представлено в дифференциальном уравнении в виде нелинейного компонента, в том числе переменного коэффициента при первой производной искомой функции движения.

Точное решение такого уравнения невозможно, поэтому иногда прибегают к линеаризации значения этого коэффициента, переводя его в эквивалентный коэффициент вязкости, и к упрощенному учету его в уравнении, например,

$$P_k(\dot{z}) = m \frac{P_R}{m_{пр}}, \quad (22)$$

при этом, если  $\dot{z} > 0$ , то  $P_R$  отрицательно, если  $\dot{z} < 0$ , то знак  $P_R$  изменится на положительный.

Уменьшение амплитуды колебаний за цикл, равный  $T = \frac{2\pi}{k}$ , по многим источникам оценивают как

$$\Delta z = \frac{4P_R}{c}, \quad \text{при этом фактически } \frac{P_R}{c} \text{ представляет}$$

собой статическое отклонение системы от равновесного положения под действием силы  $P_R$  кулонова трения, т.е. амплитуда колебаний при наличии кулонова трения убывает во время движения за каждый период на одну и ту же величину, т.е. уменьшается по закону арифметической прогрессии в отличие от вязкого трения, обуславливающего убывание амплитуд по закону геометрической прогрессии.

В результате можно сделать следующие выводы по итогам моделирования динамического поведения автовариатора:

— координаты  $\varphi$  и  $z$  являются независимыми и моделирование движения по ним вполне возможно на основе уравнений Лагранжа 2-го рода;

— при синтезе цепи управления некоторые параметры остаются свободными, что позволяет провести их расчет по инженерным методикам с удовлетворением критериям прочности и жесткости;

— трение в цепи управления фрикционного вариатора является значительным, и колебательный процесс в цепи не развивается.

#### Библиографический список

1. Пат. 139930 Российская Федерация, МПК F 16 Н 15/38. Автоматический торový вариатор / П. Д. Балакин, Е. А. Дюндик, О. С. Дюндик; заявитель и патентообладатель Омский государственный технический университет. — № 2013155132/11; заявл. 11.12.13; опубл. 27.04.14, Бюл. № 12. — 3 с.
2. Балакин, П. Д. Синтез цепи управления торového автовариатора / П. Д. Балакин, Е. А. Дюндик // Омский научный вестник. Сер. Приборы, машины и технологии. — 2014. — № 1 (127). — С. 51–54.

3. Яблонский, А. А. Курс теории колебаний : учеб. пособие для студентов вузов / А. А. Яблонский, С. С. Норейко. — Изд. 3-е исправ. и доп. — М. : Высшая школа, 1975. — 248 с.
4. Вибрации в технике. Справочник. В 6 т. Т. 2 / Под ред. В. Н. Челомея, И. И. Блехмана. — М. : Машиностроение, 1979. — 351 с.
5. Бутенин, Н. В. Введение в теорию нелинейных колебаний : учеб. пособие для вузов / Н. В. Бутенин, Ю. И. Неймарк, Н. А. Фуфаев. — 2-е изд., испр. — М. : Наука, 1987. — 384 с.
6. Бутенин, Н. В. Элементы теории нелинейных колебаний / Н. В. Бутенин. — Л. : Гос. изд-во судостроит. промышленности, 1962. — 194 с.
7. Поновко, Я. Г. Основы прикладной теории колебаний и удара / Я. Г. Поновко. — Изд. 3-е, доп. и перераб. — Л. : Машиностроение, 1976. — 320 с.

8. Поновко, Я. Г. Введение в теорию механических колебаний / Я. Г. Поновко. — М. : Наука, 1971. — 240 с.

**БАЛАКИН Павел Дмитриевич**, доктор технических наук, профессор (Россия), профессор, заведующий кафедрой «Машиноведение».

**ДЮНДИК Евгений Александрович**, соискатель по кафедре «Машиноведение».

**ДЮНДИК Ольга Сергеевна**, кандидат технических наук, доцент кафедры «Машиноведение».

Адрес для переписки: tmm@omgtu.ru

Статья поступила в редакцию 27.03.2015 г.

© П. Д. Балакин, Е. А. Дюндик, О. С. Дюндик

УДК 629.764

**В. Н. БЛИНОВ**  
**В. В. КОСИЦЫН**  
**Е. Б. ЧАРУШИНА**  
**В. В. ШАЛАЙ**

Омский государственный  
технический университет

## НАПРАВЛЕНИЯ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ АММИАЧНОГО ЭЛЕКТРОТЕРМИЧЕСКОГО МИКРОДВИГАТЕЛЯ С ТРУБЧАТЫМИ НАГРЕВАТЕЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

На основе опыта создания электротермического микродвигателя (ЭТМД) с трубчатыми нагревательными элементами предложены направления повышения удельного импульса тяги и совершенствования конструктивно-технологических решений аммиачного ЭТМД за счет модернизации конструктивной схемы ЭТМД.

**Ключевые слова:** аммиак, герметичность, термopара, удельный импульс тяги, электротермический микродвигатель.

**Работы выполнены при финансовой поддержке Минобрнауки России в ходе реализации соглашения о предоставлении субсидии от 08.09.2014 г. 14.574.21.0104, а также в рамках научной школы НШ-5998.2014.10.**

Рассматривается ЭТМД на аммиаке, выполненный по схеме с резервированными трубчатыми нагревательными элементами, термopарами и со сменным профилированным соплом [1].

Данный ЭТМД разработан на основе ЭТМД с коническим соплом, прошедшего полный цикл наземной экспериментальной отработки автономно и в составе корректирующей двигательной установки (КДУ) малого космического аппарата (МКА) и натурные испытания [2–4]. Оба ЭТМД содержат кожух токовыводов, центральная часть которого заполняется герметиком для герметизации мест выхода токовыводов из ЭТМД.

Общий вид ЭТМД показан на рис. 1.

Опыт создания и эксплуатации ЭТМД выявил конструктивно-технологические недостатки, обусловленные высокой массой кожуха и трудностью

обеспечения требуемой герметичности внутренних полостей ЭТМД, а именно:

— в реализованном образце ЭТМД длина защитного кожуха составляет 35 мм, диаметр — 16 мм; кроме того, имеются два боковых кожуха длиной 25 мм, диаметром 10 мм; внутри данных кожухов размещены токовыводы нагревательных элементов и термopар; для металлических кожухов из нержавеющей стали 12Х18Н10Т масса кожухов составляет 21 г; масса всего ЭТМД составляет 80 г; значительная масса кожухов увеличивает прогреваемую массу ЭТМД, что приводит к снижению величины нагрева рабочего топлива и, как следствие, к снижению удельного импульса тяги ЭТМД;

— при сборке ЭТМД возникает необходимость в постоянном контроле состояния применяемой заливочной композиции, используемой в качестве

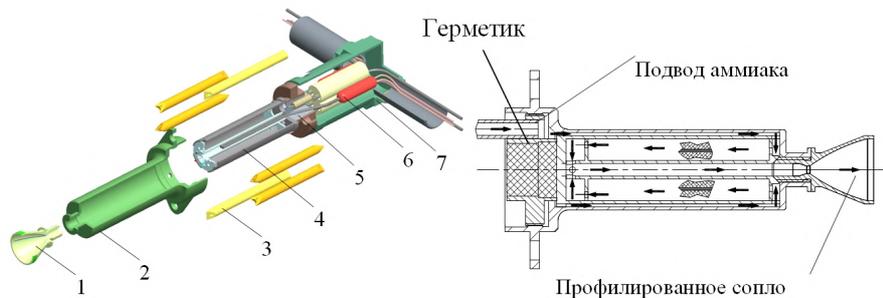


Рис. 1. Составные части (а) и схема (б) ЭТМД с трубчатым нагревательным элементом:  
1 — сопло; 2 — наружный корпус ЭТМД; 3 — нагревательный элемент, уложенный в керамические трубки;  
4 — внутренний корпус с газодомом; 5 — место герметизации ЭТМД; 6 — термопара;  
7 — кожух токовыводов и термопара

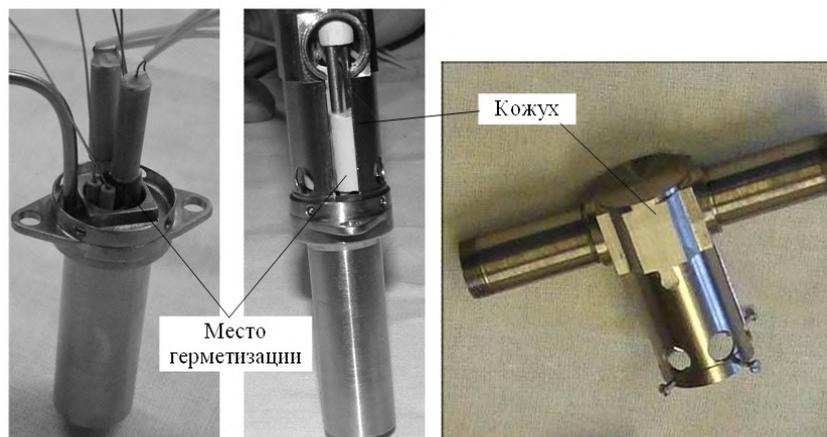


Рис. 2. Труднодоступные места герметизации ЭТМД

герметика; процесс заливки характеризуется послойным многократным нанесением герметика с последующей сушкой при повышенной температуре; для предотвращения порообразования и увеличения плотности заливки, в процессе высыхания герметика требуется «трамбовать» заливочную смесь, чему мешает ограниченный доступ к полости заливки ЭТМД;

— подвод рабочего тела в ЭТМД осуществляется через подводящий трубопровод, расположенный в месте герметизации токовыводов нагревателей и термопар; при монтаже подводящего трубопровода применяется его подгибка по месту, что может приводить к растрескиванию заливочной смеси и нарушению герметичности;

— в процессе наземной экспериментальной отработки рассматриваемого ЭТМД были отмечены отказы термопар; выводы термопар загерметизированы совместно с токовыводами нагревательных элементов; при демонтаже термопар происходит повреждение нагревательных элементов и некоторых конструктивных элементов ЭТМД.

Для устранения недостатков, связанных с обеспечением герметичности, были исследованы направления совершенствования ЭТМД без изменения конструктивной схемы. В ходе экспериментальных исследований были рассмотрены и исследованы различные герметизирующие композиции, к которым предъявлялись следующие требования:

— обеспечение прочности при воздействии вибро-механических нагрузок на ЭТМД в составе КДУ МКА;

— обеспечение прочности при воздействии тепловых нагрузок при работе ЭТМД;

— обеспечение технологичности процесса герметизации ЭТМД.

Были проведены исследования способов герметизации ЭТМД с использованием следующих высокотемпературных заливочных смесей [5]:

- на основе высокотемпературного клея КМ-41М;
- на основе клеев ТКФ-4А, ФФК;
- на основе силикатного герметика;
- на основе силикатного герметика в комбинации с клеем КМ-41М.

Нанесение герметика осуществлялось поэтапно слоями, с последующей сушкой каждого слоя. После нанесения герметика осуществлялась предварительная сушка, включающая в себя разогрев до 60–70 °С в течение 3–4 часов с последующим нагревом до 500 °С в печи с регулировкой темпа нагрева и контролем температуры. Места герметизации показаны на рис. 2.

Проверка на герметичность осуществлялась пузырьковым методом с опусканием залитых частей в воду и подачей в подводящий трубопровод ЭТМД азота давлением 0,025 МПа в течение 60 секунд. При этом в месте заливки визуально фиксировались течи в виде пузырьков азота  $\approx \varnothing 3$  мм и  $\approx \varnothing 0,5$  мм.

При оценке негерметичности были приняты следующие допущения:

— расход через течь при образовании одного пузырька  $\varnothing 3$  мм соответствует расходу при образовании 200 пузырьков  $\varnothing 0,5$  мм;

— отдельные мелкие пузырьки  $\varnothing 0,5$  мм с частотой появления не чаще одного раза в 3 секунды не учитывались.

При работе ЭТМД при атмосферном давлении максимальный расход азота составлял до 45 см<sup>3</sup>/с. Негерметичность течи через заливку ЭТМД в один пузырек  $\approx \varnothing 3$  мм в секунду (0,01414 см<sup>3</sup>/с) соответствует потере 0,03 % потока газа. Потери аммиака

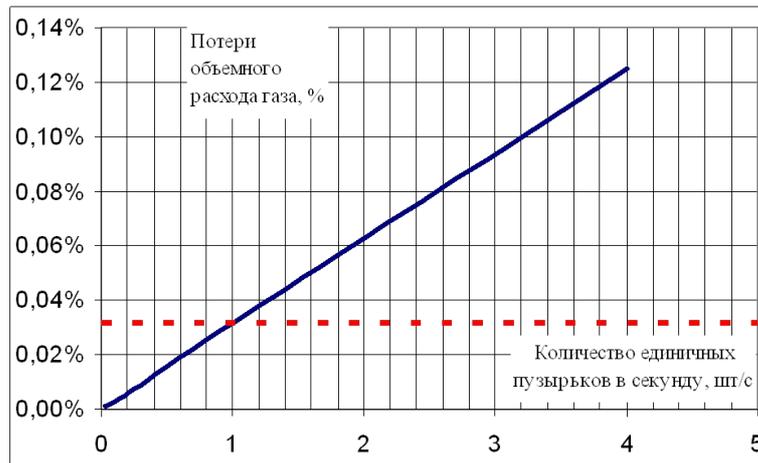


Рис. 3. Зависимость относительных потерь потока газа через ЭТМД от числа видимых пузырьков в секунду (в расчет принимались единичные пузырьки  $\varnothing 3$  мм)

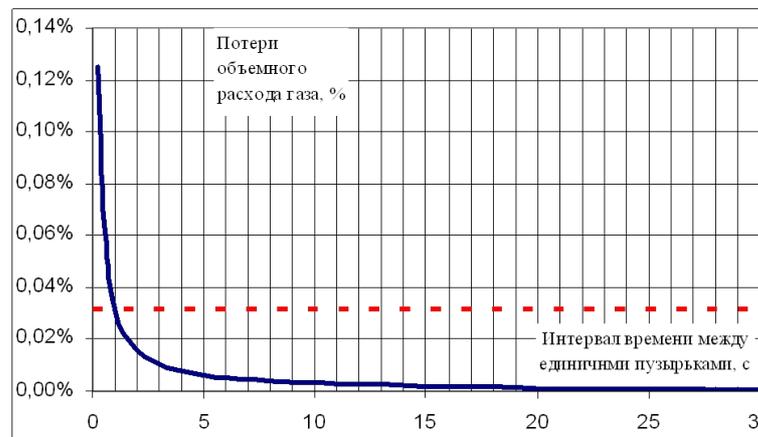


Рис. 4. Зависимость относительных потерь потока газа через ЭТМД от длительности интервала между отдельными пузырьками (в расчет принимались единичные пузырьки  $\varnothing 3$  мм)

при такой степени негерметичности составят 3–5 г за весь срок активного существования ЭТМД в составе МКА.

В этой связи, допустимая степень негерметичности ЭТМД принята один пузырек  $\approx \varnothing 3$  мм в секунду.

На рис. 3, 4 приведены расчетные зависимости относительных потерь потока газа через ЭТМД от числа видимых пузырьков и временного интервала между ними. Пунктирной линией показана граница допустимого уровня негерметичности, составляющая 0,03 % потока газа.

Технологические образцы ЭТМД, собранные с применением заливочной смеси на основе клея КМ-41М, показали высокую степень герметичности, составившую не более одного пузырька азота  $\approx \varnothing 3$  мм за время 25 с и более. Вместе с тем использование данной заливочной смеси отличается низкой технологичностью и высокой трудоемкостью и длительностью работ.

В этой связи были собраны и испытаны на герметичность и функционирование образцы ЭТМД с использованием более технологичных заливочных смесей на основе клеев ТКФ-4А, ФФК, силикатных герметиков.

Проведенные исследования показали:

— заливочная смесь на основе клеев ТКФ-4А и ФФК не удовлетворяет требованию прочности при воздействии тепловых нагрузок при работе ЭТМД;

— заливочная смесь на основе силикатного герметика не удовлетворяет требованию прочности при воздействии вибромеханических нагрузок.

В ходе дальнейших исследований рассматривалась комбинированная заливка, представляющая собой силикатный герметик в сочетании с заливочной смесью на основе клея КМ-41М. Силикатный герметик использовался для герметизации токовыводов и нагревательных элементов и термодар, а заливочной смесью на основе клея КМ-41М обеспечивалась фиксация герметика в кожухе токовыводов ЭТМД (рис. 5).

Использование комбинированной заливки несколько сокращает трудоемкость и длительность процесса герметизации ЭТМД, но также в целом не обладает приемлемой технологичностью.

Проведенные исследования показали, что помимо выбора заливочной композиции, на герметичность ЭТМД с трубчатыми нагревательными элементами существенное влияние оказывает конструктивное исполнение места герметизации. Использование кожуха токовыводов в виде цилиндрических полостей, в соответствии с рис. 5, затрудняет доступ к местам герметизации ЭТМД.

В этой связи была разработана конструктивная схема ЭТМД, в которой герметизация токовыводов нагревательных элементов, термодар выполняется автономно с обеспечением свободного доступа к местам герметизации, а также замены вышедших

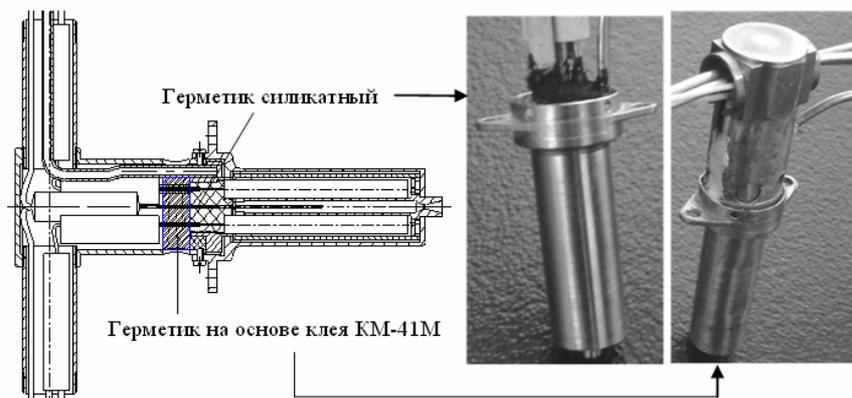


Рис. 5. Схема заливки ЭТМД комбинированной смесью «герметик силикатный + герметик на основе клея КМ-41М»

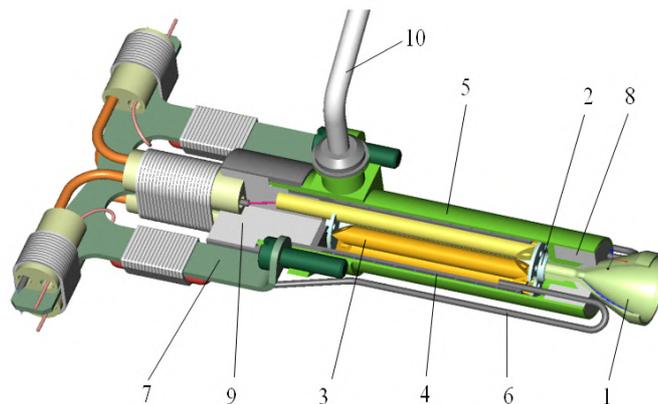


Рис. 6. Общий вид модернизированного ЭТМД:  
 1 — сопло; 2 — газодук;  
 3 — керамические трубки с нагревательными элементами (условно не показаны);  
 4 — внутренний корпус; 5 — внешний корпус;  
 6 — термопара; 7 — кронштейн крепления токовыводов; 8, 9 — герметик;  
 10 — трубопровод подачи рабочего тела

из строя термопар с сохранением нагревательных и конструктивных элементов ЭТМД (рис. 6).

Увеличение удельного импульса тяги, как основного показателя эффективности ЭТМД, во многом определяется температурой нагрева газообразного топлива. Температура нагрева газообразного топлива при заданной электрической мощности зависит от массовых характеристик ЭТМД.

Оценим массовые характеристики модернизированного ЭТМД. При оценке будем иметь в виду, что отличия ЭТМД по массе обусловлены различными конструкциями токоподводящих частей микродвигателя (защитные кожуха для прототипа и кронштейн для модернизированного ЭТМД).

В модернизированном ЭТМД кронштейн крепления токовыводов выполнен фигурным и плоским. Его общая площадь с соблюдением основных габаритов кожухов ЭТМД, выполненного в соответствии с [1], составит  $1100 \text{ мм}^2$ . При толщине кронштейна  $0,8 \text{ мм}$  его масса составит  $6,4 \text{ г}$ . Сокращение массы кожухов составит  $69,5 \%$ , сокращение массы микродвигателя составит  $18 \%$ .

При использовании титановых сплавов для изготовления кожухов (кронштейна) сокращение массы микродвигателя составит  $14 \%$ .

Сокращение массы модернизированного ЭТМД ( $14-18\%$ ) приведет к увеличению удельного импульса тяги на  $16-18 \%$ .

Герметизация ЭТМД осуществляется нанесением специального герметика 8, 9 в соответствующие

доступные полости, что обеспечивает высокое качество герметизации ЭТМД с получением сплошной (без пор) структуры герметика и, как следствие, высокую степень герметизации ЭТМД.

При выходе из строя в процессе испытаний ЭТМД термопары, как наиболее «слабого» элемента, ее замена осуществляется удалением герметика 8. При этом все конструктивные элементы ЭТМД сохраняются. Таким образом:

- сокращается время ремонта и его стоимость за счет исключения повреждения конструктивных элементов микродвигателя в процессе ремонта;

- обеспечивается высокое качество герметизирующей композиции и герметичность ЭТМД за счет доступа к герметизируемым полостям.

#### Библиографический список

1. Пат. 2442011 РФ, МПК F02K 9/68. Электротермический микродвигатель / Блинов В. Н., Рубан В. И. [и др.]; заявитель и патентообладатель Федер. гос. унитарное предприятие «Государственный космический научно-производственный центр имени М. В. Хруничева» (ФГУП «ГКНПЦ им. М. В. Хруничева») RU; заявл. 02.07.2010; опубл. 10.02.2012.
2. Пат. 2332583 РФ, МПК F02K 9/68. Электротермический микродвигатель / Блинов В. Н., Рубан В. И. [и др.]; заявитель и патентообладатель Закрытое акционерное общество «Полет-Интер» (ЗАО «Полет-Интер») (RU); заявл. 13.02.2007; опубл. 27.08.2008.

3. Исследование параметров двигательной установки микро-тяги на аммиаке по результатам натурных испытаний / В. Н. Блинов [и др.] // Омский научный вестник. Сер. Приборы, машины и технологии. — 2010. — № 2 (90). — С. 90–93.

4. Исследования электротермических микродвигателей корректирующих двигательных установок маневрирующих малых космических аппаратов: монография / В. Н. Блинов, В. В. Шалай [и др.]. — Омск : ОмГТУ, 2014. — 264 с.

5. Блинов, В. Н. Исследования способов герметизации электротермических микродвигателей на аммиаке с трубчатыми нагревательными элементами / В. Н. Блинов, В. И. Рубан, Д. Р. Ашпакова // Проблемы разработки, изготовления и эксплуатации ракетно-космической и авиационной техники : материалы 4-й Всерос. науч. конф., посвящ. памяти гл. конструктора ПО «Полет» А. С. Клинышкова. — Омск, 2012. — С. 16–21.

**БЛИНОВ Виктор Николаевич**, доктор технических наук, профессор (Россия), профессор кафедры авиа-

и ракетостроения Омского государственного технического университета (ОмГТУ); заместитель главного конструктора ПО «Полет» — филиала Государственного космического научно-производственного центра им. М. В. Хруничева.

**КОСИЦЫН Валерий Владимирович**, кандидат технических наук, научный сотрудник НИЧ кафедры авиа- и ракетостроения ОмГТУ; ведущий специалист ПО «Полет».

**ЧАРУШИНА Елена Борисовна**, старший преподаватель кафедры «Нефтегазовое дело» ОмГТУ.

**ШАЛАЙ Виктор Владимирович**, доктор технических наук, профессор (Россия), заведующий кафедрой «Нефтегазовое дело», ректор ОмГТУ, заслуженный работник высшей школы РФ.

Адрес для переписки: 644050, г. Омск, пр. Мира 11.

Статья поступила в редакцию 13.03.2015 г.

© В. Н. Блинов, В. В. Косицын, Е. Б. Чарушина, В. В. Шалай

УДК 624.953:665.754

**В. Р. ВЕДРУЧЕНКО**  
**В. В. КРАЙНОВ**  
**Е. С. ЛАЗАРЕВ**

Омский государственный  
университет путей сообщения

## О ДЕФОРМАЦИИ СТенок ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ РЕЗЕРВУАРОВ ДЛЯ ХРАНЕНИЯ НЕФТЕПРОДУКТОВ КОТЕЛЬНЫХ И ДРУГИХ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ ЖИДКОГО ТОПЛИВА

Рассмотрены эксплуатационные особенности резервуаров и емкостей для хранения жидких нефтепродуктов: от бензинов до сырой нефти, используемых в качестве топлива промышленных котельных, на нефтебазах и хранилищах. Для снижения эксплуатационных расходов, уменьшения металлоемкости и стоимости материалов при постройке емкостей и резервуаров их целесообразно конструировать и строить обоснованно прочных параметров. Предлагается методика расчета и конструирования прочных цилиндрических емкостей для нефтепродуктов и других жидких топлив использованием метода расчета деформации стенок.

**Ключевые слова:** резервуары для хранения нефтепродуктов, прочные размеры, безопасность эксплуатации, метод расчета деформации стенок.

Дальнейшее снижение расходов на проектирование, постройку, повышение надежности и уменьшение эксплуатационных расходов на устройства для хранения жидкого топлива связано не только с оптимальными проектными решениями [1], но и с использованием научно обоснованных методов расчета на прочность и другие критерии.

Котельные установки промышленных предприятий, работающие на мазуте, оборудованы устройствами и системами для приема, хранения топлива и подготовки его к сжиганию [1–3].

Хранение жидкого топлива производится в металлических или неметаллических резервуарах, а небольшого количества — в специальной таре — бочках и бидонах.

Мазут и дизельное топливо хранятся в закрытых бетонных или железобетонных резервуарах, подземных или полуподземных. Эти резервуары оборудуются подъемной трубой для отбора продукта из любого слоя и подогревающим устройством.

Для хранения высокосернистых мазутов необходимо обеспечивать хорошую вентиляцию хранилищ и своевременное удаление из них воды.

Светлое топливо (бензин, керосин) хранится в закрытых стальных вертикальных или горизонтальных цилиндрических резервуарах (рис. 1).

Резервуары снабжаются гидравлическими клапанами, обеспечивающими снижение потерь топлива при так называемых «дыханиях» резервуаров. Это явление заключается в периодическом вытеснении

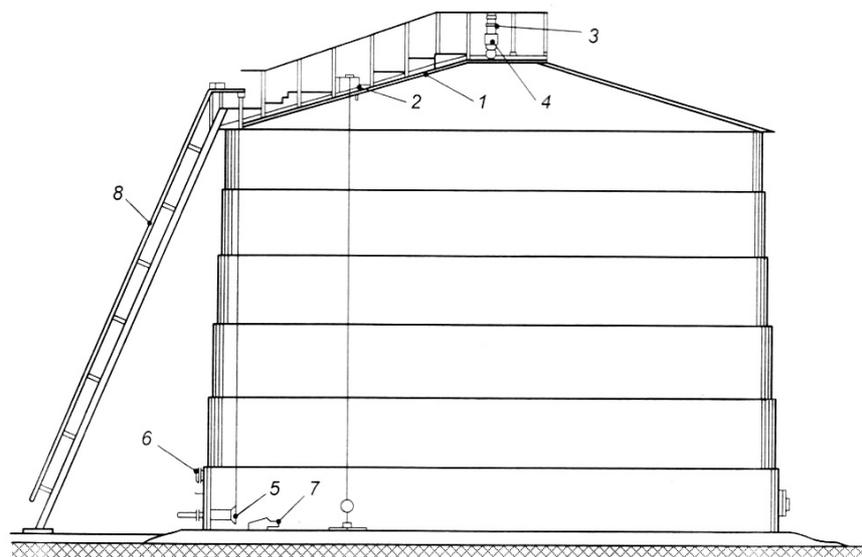


Рис. 1. Стальной вертикальный резервуар для хранения светлого топлива:  
1 — люки; 2 — указатель уровня; 3 — дыхательный клапан; 4 — огневой предохранитель;  
5 — устройство для предотвращения утечки при аварии раздаточного трубопровода;  
6 — лебедка; 7 — кран для спуска воды и отстоя; 8 — лестница

в атмосферу находящейся в верхней части резервуара газовой смеси при повышении температуры (днем) и наливке топлива и поступлении в резервуар атмосферного воздуха при понижении температуры (ночью) и сливе топлива.

Мазутные хозяйства крупных котельных и ТЭЦ подразделяются на основные и растопочные. Основное мазутное хозяйство предназначено для работы котельной только на мазуте, мазуте и газе или мазуте в качестве резервного топлива.

Схемы мазутного хозяйства, зависящие от давления топлива перед форсунками котлов, подразделяются на двухступенчатые — с насосами и мазутонасосной первого и второго подъема — и одноступенчатые — с одной ступенью насосов.

Одноступенчатые схемы применяются в промышленных котельных с мощностью менее 250 МВт. В одноступенчатых схемах прокачка топлива из основных резервуаров через фильтры тонкой очистки и подогреватели через котельную с рециркуляцией обратно в основные емкости осуществляется одной ступенью насосов.

В двухступенчатых схемах прокачка мазута через котельную осуществляется насосами второго подъема.

Применяется также схема мазутопроводов с двухступенчатой мазутной насосной с выделенным контуром рециркуляции с насосами рециркуляции и прокачиванием мазута из основных резервуаров через подогреватели после рециркуляционных насосов обратно в основные емкости.

Жидкость, налитая в резервуар, вызывает в материале его стенок напряжение, сопротивляющееся усилию разрыва, которое, как известно, пропорционально диаметру резервуара и высоте налитой в него жидкости. Следовательно, наибольшее напряжение в материале резервуара будет вызываться в его нижнем кольце, а наименьшее — в верхнем, и если определить толщину стенок под условием достаточного сопротивления, то величина ее для верхнего кольца резервуара будет незначительной. С другой стороны, практика сооружения дает возможность только при известной толщине стенок построить резервуар достаточно жестким и герметичным.

Выдающийся русский инженер Владимир Григорьевич Шухов, видимо, впервые предложил строить цилиндрические резервуары минимального веса для хранения нефтепродуктов, используя строго научный метод расчета. Разработанная им методика расчета еще в 1883 г. была опубликована в техническом журнале в статье «механические сооружения нефтяной промышленности»; позднее Шухов определил конкретные размеры цилиндрических резервуаров и составил для них ряд типовых проектов.

В основу расчета было положено «дифференциальное уравнение 4-го порядка изогнутой оси балки», которое В. Г. Шухов в дальнейшем применил при расчете нефтеналивных барж и решении различных задач строительной механики, при расчетах прочности бруса, лежащего на сплошном упругом основании.

Постановка задачи. Цилиндрический резервуар радиусом  $R$  подвергается силовому воздействию давления заполнившей его жидкости. Толщина стенки  $D$  мала по сравнению с радиусом  $R$ . Сечение стенки — прямоугольник высотой  $H$ . Необходимо найти уравнение деформации стенок резервуара.

Для решения задачи составим расчетную схему (рис. 2), на которой обозначено:  $abcd$  — основные элементы стенки;  $dx$  — высота элемента, взятого на глубине  $x$ ;  $y$  — перемещение точек элемента в радиальном направлении,  $T_1$  и  $T_2$  — силы упругости стенки, приложенные к граням  $dc$  и  $ad$  и равные между собой;  $MN$  — вертикальная полоска (сечение стенки). На элемент стенки действует также сила давления жидкости, равная  $\gamma x R dx dy$ , приложенная к грани  $ab$ , где  $\gamma$  — вес единицы массы жидкости,  $E$  — модуль упругости материала стенки.

Силы упругости:

$$T_1 = T_2 = \frac{E \cdot y}{R} \cdot D \cdot dx, \quad (1)$$

Равнодействующая всех сил, приложенных к элементу, будет:

$$dQ = \gamma \cdot x \cdot R \cdot d\varphi \cdot dx - T_1 \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} - T_2 \cdot \sin \frac{d\varphi}{2}, \quad (2)$$

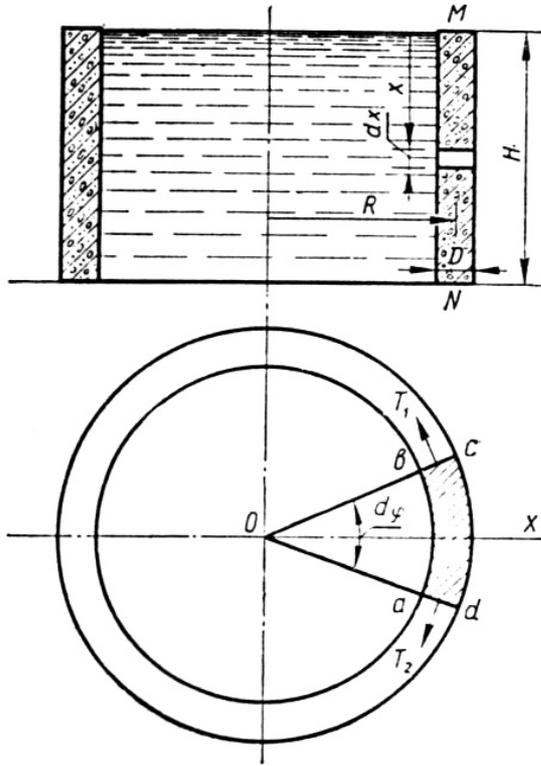


Рис. 2. Расчетная схема резервуара

или, считая приближенно,

$$\sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}, \quad (3)$$

получаем:

$$dQ = \gamma \cdot x \cdot R \cdot d\varphi \cdot dx - \frac{E \cdot y}{R} \cdot D \cdot d\varphi \cdot dx. \quad (4)$$

Эта сила  $dQ$  представляет собой приращение поперечной силы, соответствующее приращению  $dx$  глубины элемента.

Известно, что изгибающий момент  $M_{из}$  и поперечная сила  $Q$  связаны соотношением:

$$\frac{dM_{из}}{dx} = Q, \quad (5)$$

а

$$M_{из} = E \cdot J \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad (6)$$

где  $J$  — момент инерции площади  $abcd$  относительно ее нейтральной оси.

Тогда, учитывая вышеизложенное, получим:

$$E \cdot \frac{d^2}{dx^2} \left( J \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \gamma \cdot x \cdot R \cdot d\varphi - \frac{y \cdot E}{R} \cdot D \cdot d\varphi. \quad (7)$$

Так как

$$J = \frac{D^3 \cdot R \cdot d\varphi}{12}, \quad (8)$$

то после подстановки этого выражения в (1) и сокращения на  $R \cdot d\varphi$  получим неоднородное линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка:

$$\frac{E \cdot D^3}{12} \cdot \frac{d^4 y}{dx^4} = \varphi \cdot x - \frac{y \cdot E \cdot D}{R^2}, \quad (9)$$

или

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 4 \cdot \alpha^4 \cdot y = m^4 \cdot x, \quad (10)$$

где

$$\alpha^4 = \frac{3}{R^2 \cdot D^2}; \quad m^4 = \frac{12 \cdot \gamma}{E \cdot D^3}. \quad (11)$$

Общий интеграл полученного уравнения будет:

$$y = z + y_0, \quad (12)$$

где  $z$  — общее решение соответствующего однородного уравнения;  $y_0$  — какое-либо частное решение уравнения (10).

Соответствующее однородное уравнение для (10) имеет вид:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 4 \cdot \alpha^4 \cdot y = 0. \quad (13)$$

Составляем характеристическое уравнение:

$$r^4 + 4 \cdot \alpha^4 = 0, \quad (14)$$

корни которого

$$r = (1+i) \cdot \alpha; \quad r = (1-i) \cdot \alpha; \quad r = (-1+i) \cdot \alpha \quad \text{и} \quad r = (-1-i) \cdot \alpha.$$

Составляем общее решение уравнения (10):

$$z = C_1 e^{\alpha x} \cos(\alpha x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\alpha x) + C_3 e^{-\alpha x} \cos(\alpha x) + C_4 e^{-\alpha x} \sin(\alpha x). \quad (15)$$

Частное решение уравнения (10) ищем методом неопределенных коэффициентов [4, 5]. Т. к. правая часть уравнения (10) представляет собой двучлен первой степени относительно  $x$ , то частное решение уравнения (10) ищем в такой же форме, т. е. полагаем:

$$y_0 = A \cdot x + B. \quad (16)$$

Здесь  $A$  и  $B$  — постоянные, подлежащие определению. Находим их в предположении, что  $y_0$  есть решение уравнения (10). Дифференцируем  $y_0$  по  $x$ :

$$y_0' = A; \quad y_0'' = y_0''' = y_0^{IV} = 0. \quad (17)$$

Подставляем эти значения в уравнение (10):

$$4 \cdot \alpha^4 \cdot (A \cdot x + B) = m^4 \cdot x, \quad (18)$$

или

$$4 \cdot \alpha^4 \cdot A \cdot x + 4 \cdot \alpha^4 \cdot B = m^4 \cdot x. \quad (19)$$

В этом тождестве, приравнявая коэффициенты соответствующих степеней  $x$ , получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 4 \cdot \alpha^4 \cdot A = m^4 \\ 4 \cdot \alpha^4 \cdot B = 0 \end{cases}, \quad (20)$$

откуда

$$A = \frac{m^4}{4 \cdot \alpha^4}; \quad B = 0.$$

Тогда частное решение уравнения (10) будет:

$$y_0 = \frac{m^4 \cdot x}{4 \cdot \alpha^4}. \quad (21)$$

Таким образом, решение неоднородного линейного уравнения (10) будет иметь вид:

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos(\alpha x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\alpha x) + C_3 e^{-\alpha x} \cos(\alpha x) + C_4 e^{-\alpha x} \sin(\alpha x) + \frac{m^4 x}{4\alpha^4}. \quad (22)$$

Произвольные постоянные  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  и  $C_4$  могут быть определены из условий на концах вертикальной полоски  $MN$ , имеющей фигуру  $abcd$  поперечным сечением.

В случае, например, когда резервуар имеет недеформирующееся днище, эти условия будут таковы: при  $x=0$  и  $x=H$ ,  $y=0$  и  $y'=0$ , где  $H$  — высота цилиндрического резервуара. Найдем решение (22) при таких условиях. Для этого найдем производную от (22):

$$y' = C_1 \alpha (e^{\alpha x} \cos(\alpha x) - e^{\alpha x} \sin(\alpha x)) + C_2 \alpha (e^{\alpha x} \cos(\alpha x) + e^{\alpha x} \sin(\alpha x)) + C_3 \alpha (-e^{-\alpha x} \cos(\alpha x) - e^{-\alpha x} \sin(\alpha x)) + C_4 \alpha (-e^{-\alpha x} \cos(\alpha x) + e^{-\alpha x} \sin(\alpha x)) + \frac{m^4}{4\alpha^4}. \quad (23)$$

После подстановки начальных условий получим: при  $x=0$ :

$$y = C_1 + C_3 = 0;$$

$$y' = C_1 + C_2 - C_3 + C_4 = 0.$$

при  $x=H$ :

$$y = C_1 e^{\alpha H} \cos(\alpha H) + C_2 e^{\alpha H} \sin(\alpha H) + C_3 e^{-\alpha H} \cos(\alpha H) + C_4 e^{-\alpha H} \sin(\alpha H) + \frac{m^4 H}{4\alpha^4} = 0;$$

$$y' = C_1 \alpha (e^{\alpha H} \cos(\alpha H) - e^{\alpha H} \sin(\alpha H)) + C_2 \alpha (e^{\alpha H} \cos(\alpha H) + e^{\alpha H} \sin(\alpha H)) + C_3 \alpha (-e^{-\alpha H} \cos(\alpha H) - e^{-\alpha H} \sin(\alpha H)) + C_4 \alpha (-e^{-\alpha H} \cos(\alpha H) + e^{-\alpha H} \sin(\alpha H)) + \frac{m^4}{4\alpha^4}.$$

Таким образом, для нахождения четырех коэффициентов  $C_1, \dots, C_4$  имеем систему четырех линейных уравнений, записываемую в матричной форме:

$$A \cdot X = B, \quad (24)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ e^{\alpha H} \cos(\alpha H) & e^{\alpha H} \sin(\alpha H) \\ e^{\alpha H} \alpha (\cos(\alpha H) - \sin(\alpha H)) & e^{\alpha H} \alpha (\cos(\alpha H) + \sin(\alpha H)) \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{m^4 H}{4\alpha^4} \\ \frac{m^4}{4\alpha^4} \end{pmatrix}.$$

Система (24) однозначно решается любым из известных способов, однако, ввиду ее громоздкости, более предпочтительным кажется применение численных методов и соответствующего программного обеспечения. Результатом решения (24) являются коэффициенты  $C$  для решения (22) исходного дифференциального уравнения при условии недеформирующегося днища резервуара.

#### Библиографический список

1. Ведрученко, В. Р. О проектировании оптимальных цилиндрических резервуаров для нефтепродуктов промышленных котельных и других потребителей жидкого топлива / В. Р. Ведрученко, Н. В. Жданов, Е. С. Лазарев // Омский научный вестник. Сер. Приборы, машины и технологии. — Омск : ОмГТУ, 2013. — № 3 (123). — С. 170–174.
2. Сидельковский, Л. Н. Котельные установки промышленных предприятий / Л. Н. Сидельковский, В. Н. Юренев. — М. : Энергоатомиздат, 1988. — 528 с.
3. Белосельский, Б. С. Топочные мазуты / Б. С. Белосельский. — М. : Энергия, 1978. — 256 с.
4. Пономарев, К. К. Составление и решение дифференциальных уравнений инженерно-технических задач / К. К. Пономарев. — М. : Госпедиздат, 1962. — 184 с.
5. Эльсгольц, Л. Э. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. Э. Эльсгольц. — М. : Гостехиздат, 1954. — 240 с.

**ВЕДРУЧЕНКО Виктор Родионович**, доктор технических наук, профессор (Россия), профессор кафедры теплоэнергетики.

Адрес для переписки: VedruchenkoVR@mail.ru

**КРАЙНОВ Василий Васильевич**, кандидат технических наук, доцент (Россия), доцент кафедры теплоэнергетики.

Адрес для переписки: KrainovVV@mail.ru

**ЛАЗАРЕВ Евгений Сергеевич**, аспирант кафедры теплоэнергетики.

Адрес для переписки: Incoe@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 15.04.2015 г.

© В. Р. Ведрученко, В. В. Крайнов, Е. С. Лазарев

## Книжная полка

**Юша, В. Л. Термодинамический анализ эффективности мобильных компрессорных установок с рекуперацией тепловых потерь : моногр. / В. Л. Юша, Г. И. Чернов. — Омск : ОмГТУ, 2014. — 102 с. — ISBN 978-5-8149-1918-2.**

Рассмотрены вопросы рекуперации тепловых потерь мобильной компрессорной установки. Представлены возможные структурные схемы мобильных компрессорных установок с системой рекуперации тепловых потерь. Для каждого из вариантов выполнен термодинамический анализ энергетической эффективности; установлена ее зависимость от основных режимных факторов, влияющих на работу установки. Для научных, инженерно-технических работников и студентов.

Омский государственный  
технический университет

Политехнический колледж  
корпорации «Казахмыс», г. Балхаш,  
Республика Казахстан

Карагандинский государственный  
университет им. Е. А. Букетова,  
Республика Казахстан

## ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОЭЛЕМЕНТНЫХ ИОННО-ПЛАЗМЕННЫХ ПОКРЫТИЙ, ПОЛУЧЕННЫХ ПРИ ОДНОВРЕМЕННОМ РАСПЫЛЕНИИ КАТОДОВ В АРГОНЕ

В работе приведены экспериментальные результаты по структуре и свойствам ионно-плазменных покрытий, полученных при одновременном распылении композиционного катода из сплава Al—Cu—Si и катода из стали 12X18H10T. Покрытия наносились в среде аргона на подложку из стали 45. Структура покрытий исследована методами оптической, электронной и атомно-силовой микроскопии. Установлено, что покрытия 12X18H10T+Al—Cu—Si, полученные в газовой среде аргона, имеют столбчатую структуру, характерную для однофазных пленок. Среднее значение микротвердости покрытия составляет 364 МПа при среднем значении микротвердости основы подложки в 256 МПа. Различие получается более чем в 1,4 раза. Показано, что микротвердость покрытия определяется наноструктурами карбидов и интерметаллидов основных легирующих элементов покрытия. Установлено, что увеличение микротвердости покрытия и уменьшение коэффициента трения приводят к повышению эксплуатационных свойств деталей из стали 45.

**Ключевые слова:** ионно-плазменное напыление, конструкционные стали, многофазное покрытие, структура, микротвердость, износостойкость.

**Введение.** Создание новых методов модифицирования поверхностных слоев деталей является одной из наиболее актуальных проблем материаловедения, от решения которой зависит будущее современных технологий.

В настоящее время широкое распространение получили вакуумные технологии формирования тонкопленочных упрочняющих покрытий на поверхности пар трения деталей машин [1–3]. Современными перспективными материалами для таких технологий являются нанокompозитные покрытия на основе тугоплавких металлов, обладающих высокими физико-механическими свойствами [2, 3]. Однако современные твердые пленки, формируемые распылением в вакууме катодов на основе титана, хрома, молибдена и других элементов при высокой твердости и прочности обладают и высоким коэффициентом динамического трения в контакте с множеством используемых материалов.

Современные требования к эксплуатационным характеристикам деталей пар трения из конструкционных сталей ставят актуальной задачу поиска

новых покрытий на основе многокомпонентных систем, образующих твердые растворы друг с другом или покрытий, представляющих собой комбинацию фаз металлов и их соединений [2].

Улучшить низкие антифрикционные характеристики твердых покрытий на деталях из конструкционных сталей с одной стороны, повысив при этом стойкость к абразивному изнашиванию, можно за счет одновременного использования различных материалов в композиционных структурах. В этом отношении перспективны многоэлементные нанокompозитные покрытия, формируемые одновременно осаждением в вакууме потоков, распыляемых твердых и твердосмазочных материалов из разных катодов [2, 4].

Одна из ключевых проблем, которые следует решить при создании нанокompозитных ионно-плазменных покрытий — генерация многокомпонентных потоков, осаждаемых на подложку. Целью настоящей работы является исследование структуры и свойств многоэлементных покрытий, формируемых совместным осаждением потоков ионов раз-

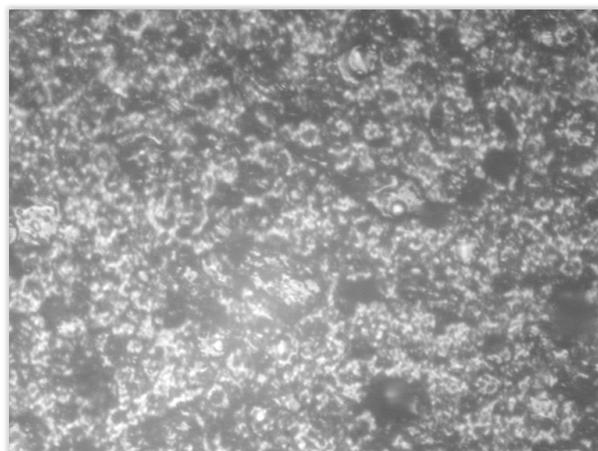


Рис. 1. Микроструктура покрытия системы 12X18H10T+Al-Cu-Si, полученного в газовой среде аргона ( $\times 400$ )

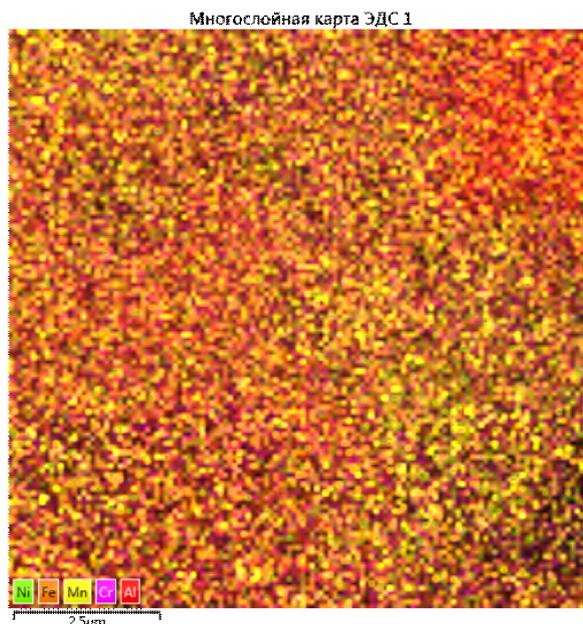
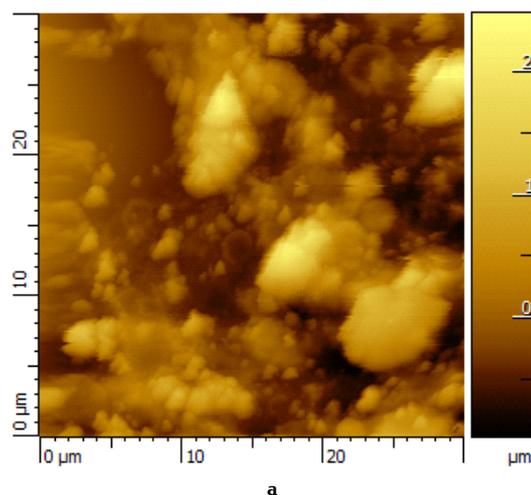
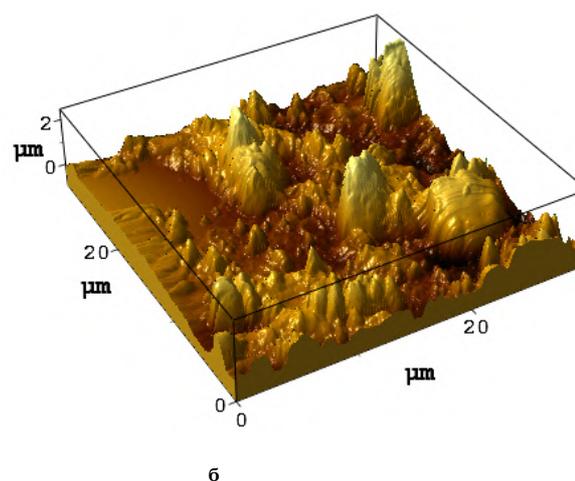


Рис. 2. Электронно-микроскопическое изображение покрытия системы 12X18H10T+Al-Cu-Si, полученного в газовой среде аргона



а



б

Рис. 3. АСМ изображения покрытия системы 12X18H10T+Al-Cu-Si, полученного в газовой среде аргона: а — 2D; б — 3D

личных металлов на подложку из конструкционной стали с использованием одновременно распыляемых отдельных катодов.

**Объекты и методика эксперимента.** Для нанесения покрытий использовались катоды Al-Cu-Si, полученные методом индукционного плавления и катоды из стали марки 12X18H10T. С помощью этих катодов наносились покрытия на ионно-плазменной установке ННВ-6.6.И1 на стальную подложку из стали 45 в газовой среде аргона в течение 40 мин при токе дуги  $I_{\text{д}} = 80$  А, опорном напряжении  $U_{\text{оп}} = 200$  В и давлении газа в камере  $P = 5 \times 10^{-3}$  мм рт. ст.

Микроструктура покрытий исследовалась на металлографическом микроскопе Эпиквант, электронном микроскопе JEOL JSM-5910 и атомно-силовом микроскопе NT-206. Для измерения микротвердости использовался микротвердомер HVS-1000A, а для трибологических исследований — созданная в лаборатории КарГУ установка для определения износостойкости и трения скольжения [5].

**Результаты и обсуждение.** В процессе одновременного распыления различных катодов ионы металлов перемешиваются в плазме и, после осаждения, формируют покрытие. На рис. 1 показана оптическая, на рис. 2 — электронно-микроскопическая микроструктура покрытия. Микроструктуру однофазных пленок качественно можно описать с помощью моделей, предложенных в работах [6, 7]. Однако эти модели сильно изменяются, если в пленку вводится легирующая примесь. Примеси останавливают рост зерна и стимулируют перезародышеобразование. Это явление приводит, как правило, к формированию глобулярной структуры [8]. На рис. 2 видно образование такой глобулярной структуры исследованных многоэлементных покрытий.

На рис. 3 показана морфология покрытия системы 12X18H10T + Al-Cu-Si, полученного в среде аргона.

Анализ изображений позволяет сделать вывод, что композиционное покрытие, полученное в среде

Таблица 1  
Результаты измерения микротвердости  
покрытия 12X18H10T+Al-Cu-Si,  
полученного в газовой среде аргона

Количество измерений	Микротвердость покрытия, МПа
1	361,3
2	449,9
3	282,9
4	342,6
5	390,5
6	296,5
7	330,3
8	350,9
9	300,8
10	322,2
11	403,8
12	355,4
13	393,3
14	479,4
15	406,5
Ср. арифмет.	364,38

аргона, характеризуется незначительной шероховатостью поверхности. При этом наблюдается столбчатая структура. Такая морфология может являться основой улучшения как физико-механических, так и трибологических свойств материала основы.

Результаты измерения микротвердости покрытия приведены в табл. 1.

Расчеты показывают, что среднее значение микротвердости покрытия 12X18H10T + Al – Cu – Si, полученного в среде аргона, составляет 364 МПа, при среднем значении микротвердости основы подложки в 256 МПа.

На рис. 4 показано распределение микротвердости вдоль образца.

Как видно, изменение микротвердости носит «квазипериодический» характер, который отвечает некоторому автоволновому процессу (АВП). Под АВП принято понимать самоподдерживающуюся в активной нелинейной среде волновой процесс (включая стационарные структуры), сохраняющий свои характеристики постоянными за счет распределенного в среде источника энергии [9]. В нашем случае АВП поддерживаются за счет энергии энергии ионной плазмы. Подобные явления определяются не

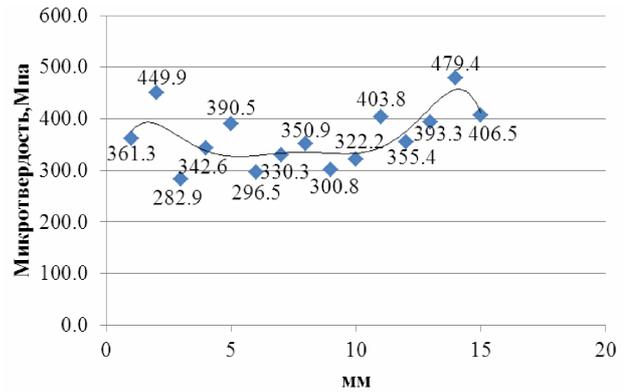


Рис. 4. Распределение микротвердости вдоль образца с покрытием системы 12X18H10T+Al-Cu-Si, полученного в газовой среде аргона

только диффузией и теплопередачей, но и гидродинамическими потоками, в частности конвекцией, испарением, кипением, поверхностным натяжением.

В табл. 2 приведен элементный состав покрытия. Видно, что состав покрытия представляет собой комбинацию фаз металлов и соединений. В покрытие наряду с железом содержится большое количество хрома, никеля, алюминия. Значительное количество углерода в покрытии обуславливает большое содержание в нем карбидных фаз. Вместе с этим отмечено наличие интерметаллидов основных легирующих элементов покрытия. Все это и объясняет наличие столбчатой структуры и существенное повышение микротвердости покрытия.

Результаты трибологических испытаний указывают на то, что износостойкость образцов с покрытием из стали 12X18H10T с имплантацией антифрикционного сплава Al – Cu – Si, полученных в среде аргона, существенно повышается по сравнению с образцами без покрытий. Покрытия при испытаниях истираются, но не отслаиваются, т.е. разрушаются по когезионному механизму, связанному с пластической деформацией и образованием усталостных трещин в материале покрытия. При этом коэффициент трения уменьшается почти в 2 раза. По-видимому, антифрикционная составляющая покрытия, действуя как смазочное вещество, снижает сопротивление сдвигу адгезионных связей, возникающих в трибосистемах. Происходит самоорганизация структурно-фазового состояния на поверхности под действием трения, которая состоит в пластической деформации шероховатостей поверхности и формировании трибослоя.

Таблица 2  
Состав покрытия системы 12X18H10T+Al-Cu-Si, полученного в среде аргона

Элемент	Тип линии	Условная концентрация	Отношение k	Вес. %	Сигма Вес. %
C	К серия	1,67	0,01671	3,09	0,34
Al	К серия	24,27	0,17431	13,30	0,15
Cr	К серия	61,61	0,61614	17,80	0,17
Fe	К серия	177,62	1,77625	58,36	0,31
Ni	К серия	17,71	0,17713	6,20	0,16
Ti	К серия	2,06	0,02058	0,63	0,06
Cu	К серия	1,05	0,01047	0,38	0,13
Si	К серия	0,49	0,00384	0,25	0,05

**Заключение.** Совмещение ионно-плазменных потоков двух катодов системы  $12X18H10T + Al - Cu - Si$  в аргоне позволяет сформировать многоэлементные покрытия, обладающие наряду с высокой твердостью, износостойкостью и повышенными триботехническими характеристиками.

Все это в совокупности определяет экономическую и техническую целесообразность использования технологии синтеза таких покрытий на конструкционных сталях.

#### Библиографический список

1. Андреев, А. А. Вакуумно-дуговые покрытия / А. А. Андреев, Л. П. Саблев, С. Н. Григорьев. — Харьков : ННЦ ХФТИ, 2010. — 318 с.
2. Псахье, С. Г. Синтез и свойства нанокристаллических и субструктурных материалов / С. Г. Псахье, К. П. Зольников, И. С. Коноваленко. — Томск : ТПУ, 2007. — 264 с.
3. Мрочек, Ж. А. Плазменно-вакуумные покрытия / Ж. А. Мрочек, А. К. Вершина, С. А. Иващенко. — Минск : Технопринт, 2004. — 369 с.
4. Покрытия и смазка в высокотемпературных подвижных сопряжениях и металлообработке / Л. Ш. Шустер [и др.]. — М. : Машиностроение, 2008. — 318 с.
5. Колесников, В. А. Информационно-измерительный прибор для определения коэффициента трения скольжения / В. А. Колесников, Я. Ж. Байсагов, В. М. Юров // Фундаментальные исследования. — 2011. — № 12. — Ч. 1. — С. 121–124.
6. Thornton, J. A. Structure and topography of sputtering coatings / J. A. Thornton // Ann. Rev. Material Sci. — 1977. — Vol. 7. — P. 239–260.
7. Carvalho S., Ribeiro E., Rebouta L. et al. Effect of morphology and structure on the elastic behavior of (Ti, Si, Al)N

nanocomposites / S. Carvalho, E. Ribeiro, L. Rebouta et al. // Surf. and Coat. Technol. — 2003. — V. 174–175. — P. 984–991.

8. Соболев, О. В. О воспроизводимости однофазного структурного состояния многоэлементной высокоэнтропийной системы  $Ti - V - Zr - Nb - Hf$  и высокотвердых нитридов на ее основе при их формировании вакуумно-дуговым методом / О. В. Соболев, А. А. Андреев, В. Ф. Горбань [и др.] // Письма в ЖТФ. — 2012. — Т. 38, вып. 13. — С. 40–47.

9. Васильев, В. А. Автоволновые процессы / В. А. Васильев, Ю. М. Романовский, В. Г. Яхно. — М. : Наука, 1987. — 240 с.

**ЕРЕМИН Евгений Николаевич**, доктор технических наук, профессор (Россия), декан машиностроительного института, заведующий кафедрой «Машиностроение и материаловедение» Омского государственного технического университета (ОмГТУ).

**СЫЗДЫКОВА Айгуль Шаяхметовна**, соискатель по кафедре «Машиностроение и материаловедение» ОмГТУ; директор Политехнического колледжа корпорации «Казахмыс».

**ЮРОВ Виктор Михайлович**, кандидат физико-математических наук, директор научно-исследовательского центра «Ионно-плазменные технологии и современное приборостроение».

**ГУЧЕНКО Сергей Александрович**, магистр, младший научный сотрудник научно-исследовательского центра Карагандинского государственного университета им. Е. А. Букетова.

Адрес для переписки: weld\_techn@mail.ru

Статья поступила в редакцию 21.04.2015 г.

© Е. Н. Еремин, А. Ш. Сыздыкова, В. М. Юров, С. А. Гученко

## Книжная полка

**Мозговой, И. В. Теория и практика силового ультразвука : моногр. В 4 ч. Ч. 1. Механизм колебаний / И. В. Мозговой. — Омск : ОмГТУ, 2014. — 189 с. — ISBN 978-5-8149-1915-1.**

Рассмотрены вопросы теории распространения колебаний в полимерных средах силового ультразвука, теплообразования, образования соединений и технологии сварки пластмасс. В первой части монографии представлены результаты исследований траекторий колебаний с помощью разработанных уникальных методик скоростного фотографирования, сверхскоростного фоторегистрирования и сверхскоростной киносъемки. Впервые установлены и описаны явления отрывов и соударений на границах разделов соединяемых ультразвуком пластмассовых деталей. Решены уравнения колебательных движений с различными краевыми условиями и получены математические выражения для расчета смещений в пластмассовом тракте при распространении колебаний силового ультразвука. Рекомендована специалистам, аспирантам и студентам, занимающимся ультразвуковыми технологиями.

**Юша, В. Л. Анализ термодинамической эффективности систем рекуперации тепловых потерь силовых агрегатов мобильных компрессорных установок : моногр. / В. Л. Юша, Г. И. Чернов. — Омск : ОмГТУ, 2014. — 114 с. — ISBN 978-5-8149-1919-9.**

Рассмотрены вопросы рекуперации тепловых потерь приводного двигателя внутреннего сгорания (ДВС) как одного из основных функциональных элементов мобильной компрессорной установки. Проведен анализ возможных способов рекуперации тепловых потерь ДВС. Разработаны математические модели, и на основе этих моделей выполнен теоретический анализ повышения экономичности приводных ДВС посредством внутренней и внешней рекуперации их тепловых потерь. Для научных, инженерно-технических работников и студентов, специализирующихся на разработке энерго- и ресурсосберегающих систем и технологий.

Омский государственный  
технический университетПолитехнический колледж  
корпорации «Казахмыс», г. Балхаш,  
Республика КазахстанКарагандинский государственный  
университет им. Е. А. Букетова,  
Республика Казахстан

## СТРУКТУРА И СВОЙСТВА ИОННО-ПЛАЗМЕННЫХ ПОКРЫТИЙ, ПОЛУЧЕННЫХ ПРИ ОДНОВРЕМЕННОМ РАСПЫЛЕНИИ КАТОДОВ 12X18H10T И Ti

В работе приведены экспериментальные результаты по структуре и свойствам ионно-плазменных покрытий, полученных при одновременном распылении титанового катода и катода из стали 12X18H10T. Покрытия наносились в среде азота и аргона на подложку из стали 45. Показано, что покрытия 12X18H10T+Ti в газовой среде азота и аргона имеют столбчатую структуру, характерную для однофазных пленок. Покрытие 12X18H10T+Ti в газовой среде азота имеет нанотвердость, равную 35,808 ГПа, а в среде аргона — 3,339 ГПа. Различие получается в 10 раз. Установлено, что покрытие 12X18H10T+Ti, полученное в газовой среде азота, содержит 73 % Ti, а покрытие 12X18H10T+Ti, полученное в газовой среде аргона, имеет высокое содержание Fe — 64,96 %. Экспериментальные результаты говорят о том, что нанотвердость покрытия 12X18H10T+Ti в среде азота определяется наноструктурами нитрида титана, размеры которых лежат в диапазоне 5–10 нм.

**Ключевые слова:** ионно-плазменное напыление, конструкционные стали, многофазное покрытие, рентгеновский анализ, электронная микроскопия, микроструктура, наноструктура, микротвердость, нанотвердость.

**Введение.** В настоящее время в условиях ограниченности материальных средств в промышленном комплексе особое значение приобретают технологии, увеличивающие долговечность (ресурс) деталей и узлов машин. Большинство деталей машин выходит из строя из-за поверхностного износа. Поэтому во многих случаях повышение долговечности различных деталей и инструмента может быть достигнуто путем изменения химического состава и структуры поверхностного слоя. На современном этапе развития техники актуальным методом модификации поверхностей является нанесение покрытий в виде тонких пленок различных материалов.

Среди методов нанесения защитных покрытий, основанных на воздействии на поверхность детали потоков частиц и квантов с высокой энергией, большое внимание привлекают вакуумные ионно-плазменные методы [1–3]. Характерной их чертой является прямое преобразование электрической энергии в энергию технологического воздействия, основанной на структурно-фазовых превращениях в осажденном на поверхности конденсате или в самом поверхностном слое детали, помещенной в вакуумную камеру.

Основным достоинством данных методов является возможность создания весьма высокого уровня фи-

зико-механических свойств материалов в тонких поверхностных слоях.

Наиболее перспективны для получения наноструктурированных покрытий являются вакуумные методы: магнетронного распыления, ионного и вакуумно-дугового осаждения. Это связано с тем, что, кроме термического фактора, появляются и другие — высокие степень ионизации, плотность потока и энергии частиц. Качество покрытия можно регулировать путем изменения температуры подложки, давления рабочего газа, потенциала подложки и других технологических параметров.

Для повышения износостойкости широкое распространение получили методы ионно-плазменного формирования покрытий на основе одинарных нитридов [3]. Вместе с тем актуальна задача создания новых покрытий на основе многоэлементных нанокомпозитов. Получение таких покрытий с помощью ионно-плазменных методов требует осаждения на подложку многокомпонентных потоков. В большинстве случаев синтез покрытий сложного элементного состава реализуется путем послойного или одновременного осаждения на подложку в атмосфере реакционных газовых потоков от ионных, магнетронных, вакуумно-дуговых источников и их комбинации [1–4].

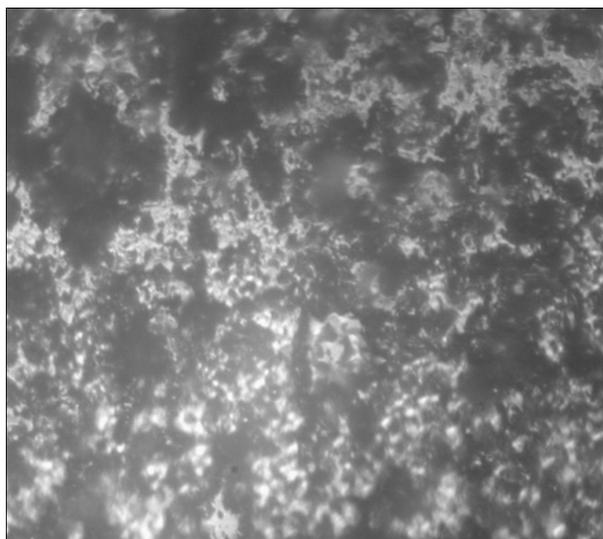


Рис. 1. Микроструктура покрытия системы 12X18H10T+Ti, полученного в газовой среде азота (×400)

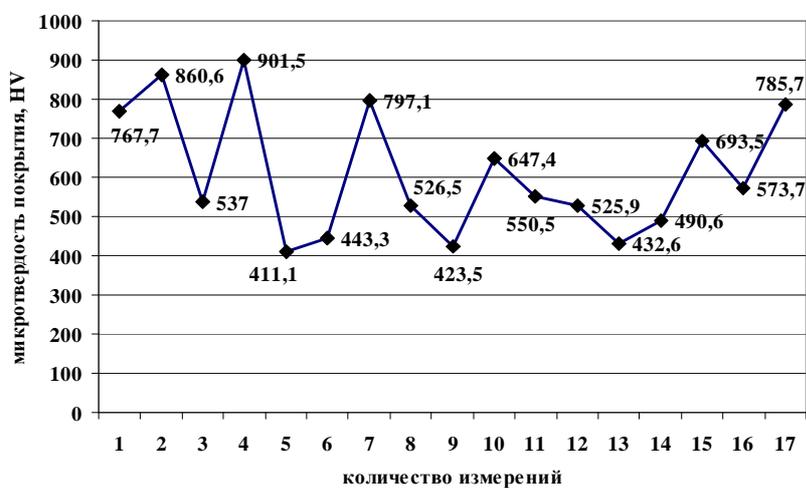


Рис. 2. Изменение микротвердости по площади поверхности покрытия 12X18H10T+Ti, полученного в газовой среде азота

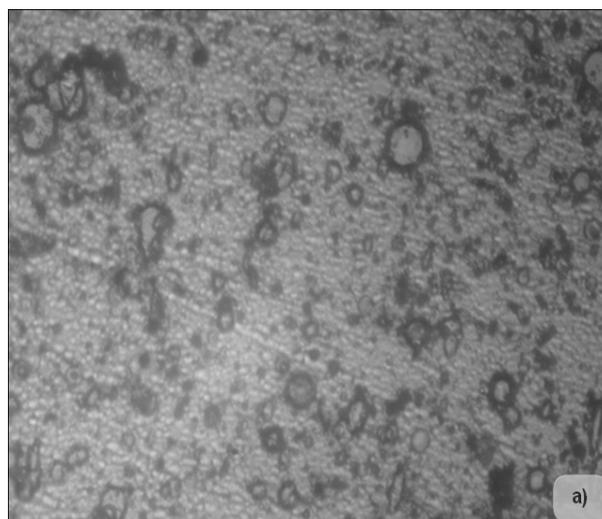


Рис. 3. Микроструктура покрытия системы 12X18H10T+Ti, полученного в газовой среде аргона

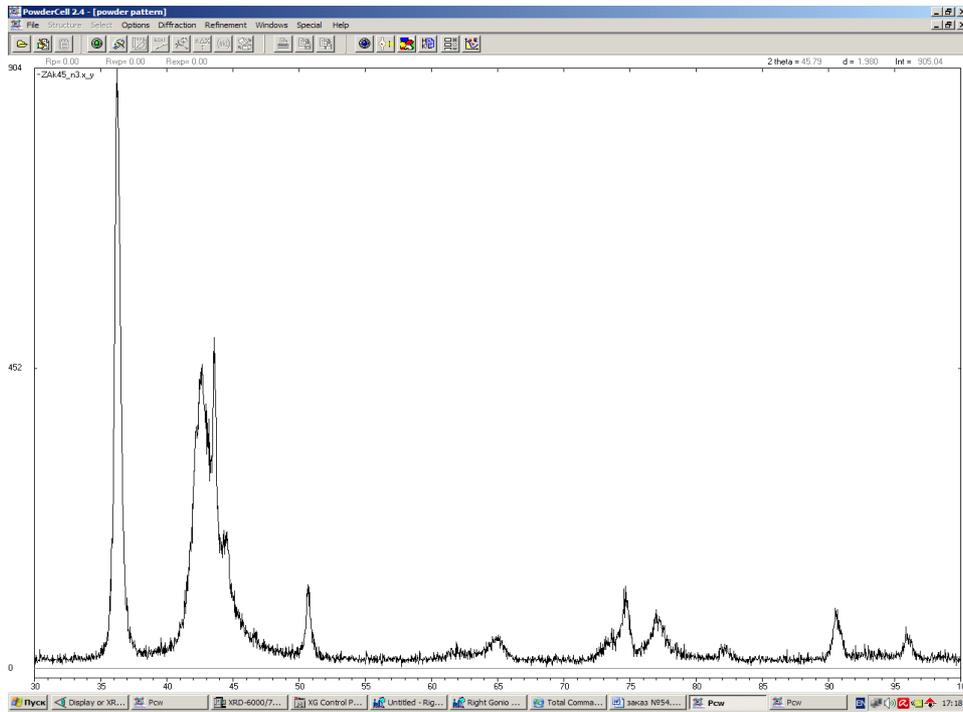


Рис. 4. Рентгенограмма покрытия системы 12X18N10T с Ti, полученного в газовой среде аргона

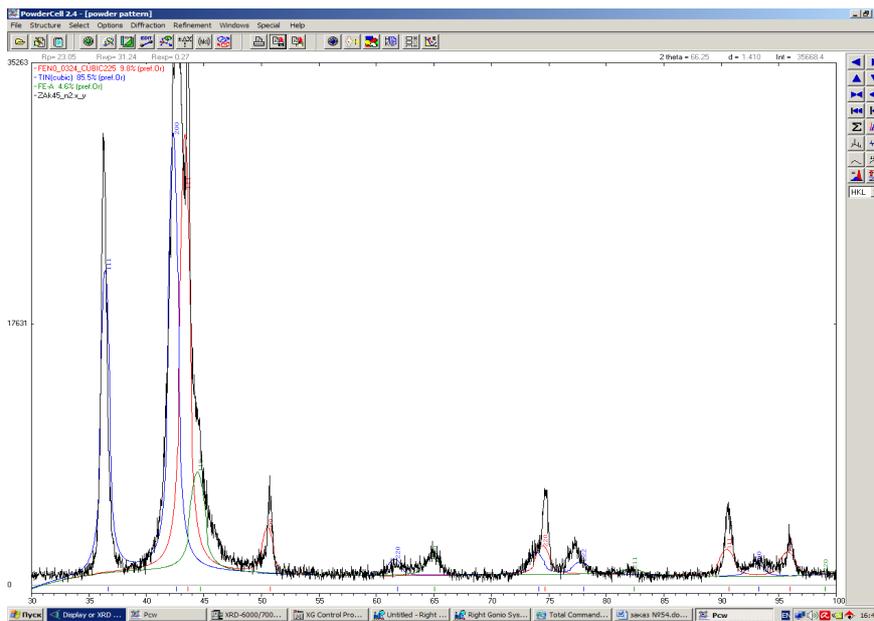


Рис. 5. Наложение рентгенограммы покрытия системы 12X18N10T+ Ti, полученного в газовой среде азота на библиотечные карточки FeN<sub>0,0324</sub> и TiN и Fe-α

В настоящей работе обсуждаются экспериментальные результаты по исследованию многоэлементных нанокompозитных покрытий, полученных при распылении одновременно двух катодов.

**Объекты и методика эксперимента.** Для нанесения покрытий использовались титановые катоды марки ВТ-1-00 по ГОСТ 1908 и катоды из стали марки 12X18N10T. С помощью этих катодов наносились покрытия на установке ННВ-6.6.И1 на стальную подложку из стали 45 в газовой среде аргона и азота в течение 40 мин при токе дуги  $I_{\text{д}} = 80$  А, опорном напряжении  $U_{\text{оп}} = 200$  В и давлении газа в камере  $P = 5 \times 10^{-3}$  мм рт. ст.

Микроструктура покрытий исследовалась на металлографическом микроскопе Эпиквант и электронном микроскопе JEOL JSM-5910. Для измерения микротвердости использовался микротвердомер HVS-1000A.

Часть экспериментальных данных, обсуждаемых в настоящей работе, получена в Материаловедческом центре коллективного пользования при Томском государственном университете (г. Томск, Россия). Толщина покрытий и их элементный состав измерялись с помощью электронного микроскопа Quantax 200 3D. Исследование фазового состава и структурных параметров образцов проводилось на диф-

Таблица 1  
Элементный состав покрытия системы 12X18H10T+Ti,  
полученного в газовой среде аргона

Element	Wt %	At %	K-Ratio	Z	A	F
Ti K	10,26	11,68	0,1089	1,0015	0,9839	1,0765
Cr K	16,05	16,82	0,1750	0,9981	0,9836	1,1103
Fe K	64,96	63,40	0,6408	0,9980	0,9798	1,0089
Ni K	8,73	8,10	0,0840	1,0127	0,9502	1,0000
Total	100	100				

Таблица 2  
Элементный состав покрытия системы 12X18H10T+Ti,  
полученного в газовой среде азота

Element	Wt %	At %	K- Ratio	Z	A	F
N K	5,25	16,32	0,0307	1,1825	0,4937	1,0027
Ti K	73,45	66,80	0,7337	0,9886	0,9973	1,0132
Cr K	5,68	4,76	0,0520	0,9844	0,9194	1,0126
Fe K	14,09	10,99	0,1317	0,9833	0,9487	1,0015
Ni K	1,53	1,13	0,0147	0,9965	0,9621	1,0000
Total	100	100				

Примечание. В табл. 1 и 2 K-Ratio — относительное разрешение =  $\Delta E/E_0$  ( $\Delta E$  — ширина спектральной линии в РФЭС,  $E_0$  — энергия электронов); Z — эффективный атомный заряд, A — аппаратная функция электронного спектрометра, F — поток возбуждающего рентгеновского излучения.

Таблица 3  
Структурно-фазовый состав покрытия системы 12X18H10T+ Ti,  
полученного в газовой среде азота

Обнаруженные фазы	Содержание фаз, об. %	Параметр решетки, Å	Размер ОКР, нм	$\Delta d/d \cdot 10^{-3}$
FeN <sub>0,0324</sub>	9,8	a = 3,592	10,35	2,18
TiN	85,5	a = 4,240	14,71	5,873
Fe- $\alpha$	4,6	a = 2,864	7,29	4,843

рактометре XRD-6000 на CuK $\alpha$ -излучении. Анализ фазового состава, размеров областей когерентного рассеяния, размеров области внутренних упругих напряжений ( $\Delta d/d$ ) проведен с использованием баз данных PCPDFWIN и PDF4+, а также программы полнопрофильного анализа POWDER CELL 2.4. Нанотвердость покрытий определена с помощью системы наноидентификации по методу Оливера и Фара с использованием индентера Берковича при нагрузке 1 г и времени выдержки 15 с.

**Результаты и обсуждение.** Способы получения наноструктурных покрытий довольно разнообразны, но все они основаны на механизме интенсивной диссипации энергии [4], обобщенной в трех стадиях формирования. На первой стадии идет процесс зародышеобразования, который из-за отсутствия соответствующих термодинамических условий, не переходит в массовую кристаллизацию. Вторая стадия представляет собой формирование вокруг нанокристаллических зародышей аморфных кластеров, которые на третьей стадии объединяются в межкристаллитную фазу с образованием диссипативной структуры.

На рис. 1 показана микроструктура стального покрытия 12X18H10T, легированного титаном, полученного в среде азота. Здесь наблюдается глобулярная дислокационная структура. О значительных напряжениях, возникающих при осаждении покры-

тий, свидетельствуют изменения значений микротвердости, измеренных в различных точках площади покрытия (рис. 2).

В газовой среде аргона структура покрытия значительно изменяется. На рис. 3 показана микроструктура покрытия 12X18H10T+Ti, полученного в газовой среде аргона. Покрытия 12X18H10T+Ti, полученные как в газовой среде азота, так и аргона имеют столбчатую структуру, характерную для однофазных пленок [3]. Хотя однофазная структура наблюдалась и в многоэлементной системе Ti-V-Zr-Nb-Hf, описанной в работе [5]. Однако результаты рентгенографических исследований показывают различия в покрытиях 12X18H10T+Ti, полученных в газовой среде азота и аргона.

На рис. 4 показана рентгенограмма покрытия 12X18H10T+Ti, полученного в газовой среде аргона, а в табл. 1 — его элементный состав.

На рис. 5 представлена рентгенограмма покрытия, полученного в среде азота, а в табл. 2 — его элементный и в табл. 3 — фазовый состав.

Как видно, покрытие 12X18H10T+Ti, полученное в газовой среде аргона, имеет высокое содержание Fe — 64,96%, в то время как в покрытии 12X18H10T+Ti, полученном в газовой среде азота, содержится 73% Ti. При этом в последнем случае выявлено наличие трех фаз, причем 85,5% составляет нитрид титана. Поэтому объяснением наличия столбчатой струк-

Свойства материалов,  
рассчитанные по данным наноиндентирования [6]

Таблица 4

Материал	H, ГПа	E, ГПа
Медь	2,1	121
Титан (OT4-1)	4,1	130
Многослойная пленка Ti/ $\alpha$ -C:H	8,0	128
Аморфная лента Zr-Cu-Ti-Ni	11,5	117
Кремний (100)	11,8	174
Тонкая пленка Ti-Si-N	28,4	295

туры может служить большое содержание фазы нитрида титана, которая «подавляет» наличие других фаз.

Нанотвердость покрытия 12X18H10T + Ti, полученного в газовой среде азота, определенная с использованием индентера Берковича, равна 35,808 ГПа, что соответствует 3316,2 единицы твердости по методу Виккерса. Модуль текучести такого покрытия равен 378,56 ГПа.

Нанотвердость покрытия 12X18H10T + Ti, полученного в газовой среде аргона равна 3,339 ГПа, что соответствует 309,27 единицам твердости по методу Виккерса. Модуль текучести такого покрытия равен 111,03 ГПа.

Таким образом, нанотвердость покрытия 12X18H10T + Ti, полученного в газовой среде азота, в 10 раз превосходит нанотвердость покрытия, полученного в среде аргона.

Представляет интерес сравнение полученных результатов с известными данными по наноиндентированию других материалов [6]. Такие данные представлены в табл. 4.

Результат сравнения показывает, что нанотвердость покрытия 12X18H10T + Ti, полученного в среде азота превосходит все представленные в табл. 4 материалы, среди которых последние три используются как упрочняющие и абразивные покрытия.

**Заключение.** Установлено, что структура и свойства покрытий системы 12X18H10T + Ti, сформированных методом конденсации совмещенных плазменных потоков, определяется фазовым составом получаемого нанокompозита. В атмосфере азота

формируется многофазное покрытие со свойствами, превышающими соответствующие характеристики известных материалов, используемых в качестве упрочняемых покрытий деталей и инструмента.

#### Библиографический список

1. Андреев, А. А. Вакуумно-дуговые покрытия / А. А. Андреев, Л. П. Саблев, С. Н. Григорьев. — Харьков : ННЦ ХФТИ, 2010. — 318 с.
2. Азаренков, Н. А. Инженерия вакуумно-плазменных покрытий / Н. А. Азаренков. — Харьков : Изд-во ХНУ им. Каразина, 2011. — 344 с.
3. Мрочек, Ж. А. Плазменно-вакуумные покрытия / Ж. А. Мрочек, А. К. Вершина, С. А. Иващенко. — Мн., 2004. — 368 с.
4. Псахье, С. Г. Синтез и свойства нанокристаллических и субструктурных материалов / С. Г. Псахье, К. П. Зольников, И. С. Коноваленко. — Томск : ТПУ, 2007. — 264 с.
5. Соболев, О. В. О воспроизводимости однофазного структурного состояния многоэлементной высокоэнтропийной системы Ti-V-Zr-Nb-Ni и высокотвердых нитридов на ее основе при их формировании вакуумно-дуговым методом / О. В. Соболев, А. А. Андреев, В. Ф. Горбань [и др.] // Письма в ЖТФ. — 2012. — Т. 38, вып. 13. — С. 40–47.
6. Головин, Ю. И. Наноиндентирование и механические свойства материалов в наномасштабе (обзор) / Ю. И. Головин // ФТТ. — 2008. — Т. 50, №12. — С. 2113–2142.

**ЕРЕМИН Евгений Николаевич**, доктор технических наук, профессор (Россия), декан машиностроительного института, заведующий кафедрой «Машиностроение и материаловедение» Омского государственного технического университета (ОмГТУ).

**СЫЗДЫКОВА Айгуль Шахметовна**, соискатель по кафедре «Машиностроение и материаловедение» ОмГТУ; директор Политехнического колледжа корпорации «Казахмыс».

**ЮРОВ Виктор Михайлович**, кандидат физико-математических наук, директор научно-исследовательского центра «Ионно-плазменные технологии и современное приборостроение».

Адрес для переписки: weld\_techn@mail.ru

Статья поступила в редакцию 16.04.2015 г.

© Е. Н. Еремин, А. Ш. Сыздыкова, В. М. Юров

## Книжная полка

**Еремин, Е. Н. Термическая обработка сварных соединений [Электронный ресурс] : учеб. электрон. изд. локального распространения : учеб. пособие для вузов по направлению подготовки дипломированных специалистов 150200 (ранее 651400) «Машиностроительные технологии и оборудование», специальности 150202 «Оборудование и технология сварочного производства» / Е. Н. Еремин. — Электрон. текстовые дан. (22,4 Мб). — Омск : ОмГТУ, 2014. — 1 эл. опт. диск (CD-ROM).**

Приведены основные положения теории термической обработки сварных конструкций. Рассмотрены виды и режимы термической обработки, способы нагрева и применяемые материалы, нагревательные устройства, оборудование. Описаны технологии термообработки, способы контроля температуры и качества. Предназначено для студентов специальности 150202 «Оборудование и технология сварочного производства», может быть использовано инженерно-техническими работниками предприятий, проектных и научно-исследовательских организаций, занимающихся проектированием и изготовлением сварных конструкций.

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ РЕЖИМОВ ТОРЦОВОГО ФРЕЗЕРОВАНИЯ СПЛАВОВ НА НИКЕЛЕВОЙ ОСНОВЕ ПО ТЕМПЕРАТУРЕ ФОРМОУСТОЙЧИВОСТИ (ЧАСТЬ 1)

В статье разработана методика теоретического определения рациональных режимов фрезерования никелевых сплавов. В качестве основного ограничения использовалась связь интенсивности изнашивания с температурой формоустойчивости режущего лезвия. Расчет температур выполнялся с учетом взаимосвязи температуры и характеристик сопротивления никелевых сплавов пластическим деформациям, а также с учетом влияния тепловых потоков, отводящихся из зоны резания в инструмент и в заготовку.

**Ключевые слова:** сплавы на никелевой основе, торцовое фрезерование, пластические деформации, температура формоустойчивости, рациональные режимы.

**Актуальность.** Сплавы на никелевой основе широко применяются при производстве деталей аэро- и ракетно-космической техники. Известные справочные материалы [1] по назначению режимов фрезерования никелевых сплавов разрабатывались исключительно на эмпирической основе и недостаточно полно и правильно учитывали схематизацию процесса фрезерования и влияние большого числа факторов на режимы резания. В частности, не учитывались взаимосвязь температуры и сопротивления никелевых сплавов пластическим деформациям [2], а также ограничения по износостойкости инструмента. В связи с этим теоретическое обоснование оптимальных режимов обработки никелевых сплавов фрезерованием является одной из важных и нерешенных задач современного аэро- и ракетостроительного производства.

**Состояние вопроса.** Важная роль температуры резания в определении режимов, характеризующихся минимальной интенсивностью изнашивания инструмента, была показана в работах А. Д. Макарова [3]. При этом не учитывалось влияние критерия затупления (ширины фаски износа задней поверхности), а температуры резания определялись экспериментально.

Теоретические методы расчета температуры в основном применительно к точению сталей активно разрабатывались в шестидесятые годы XX века и позже А. Н. Резниковым [4] и др. При задании плотностей тепловых потоков на поверхностях режущего лезвия использовались экспериментальные сведения о силах резания. Определенные погрешности были связаны с разделением общей мощности резания на мощности источников теплоты в зоне стружкообразования, на передней и задней поверхностях инструмента. Не учитывалась зависимость удельной работы деформации от деформации, скорости деформации и температуры, а также взаимо-

связь температуры и плотности тепловых потоков на участке пластического контакта инструмента со стружкой.

Целесообразность учета действительного упрочнения и разупрочнения никелевых сплавов в процессе резания, а также взаимосвязи предела текучести и температуры была показана в работах [5, 6].

В работе [5, с. 53–58] было показано, что при фрезеровании сталей рациональные режимы резания тесно связаны не с температурой резания, а с температурами передней и задней поверхностей режущих лезвий.

Более высокий уровень интенсивности изнашивания режущего лезвия при точении никелевых сплавов и сталей в тяжелых условиях резания связывался с деформацией режущих лезвий [6, с. 131–137; 7, 8]. В связи с этим в качестве основного температурного фактора, более тесно связанного с интенсивностью изнашивания, использовалась температура формоустойчивости режущего лезвия [6, с. 138–139; 8, с. 27–28].

**Задачи исследования.** Для определения рациональных режимов фрезерования никелевых сплавов с учетом интенсивностей изнашивания режущего инструмента в настоящей статье:

— установлена связь условий фрезерования с допустимой интенсивностью изнашивания режущего лезвия;

— усовершенствована методика расчета температуры деформации, контактных температур передней и задней поверхностей инструмента и температуры формоустойчивости;

— на основании анализа экспериментальных данных об изнашивании инструмента при обработке резанием никелевых сплавов выявлены зависимости интенсивности изнашивания от расчетной температуры формоустойчивости для различных значений критерия затупления твердосплавного инструмента;

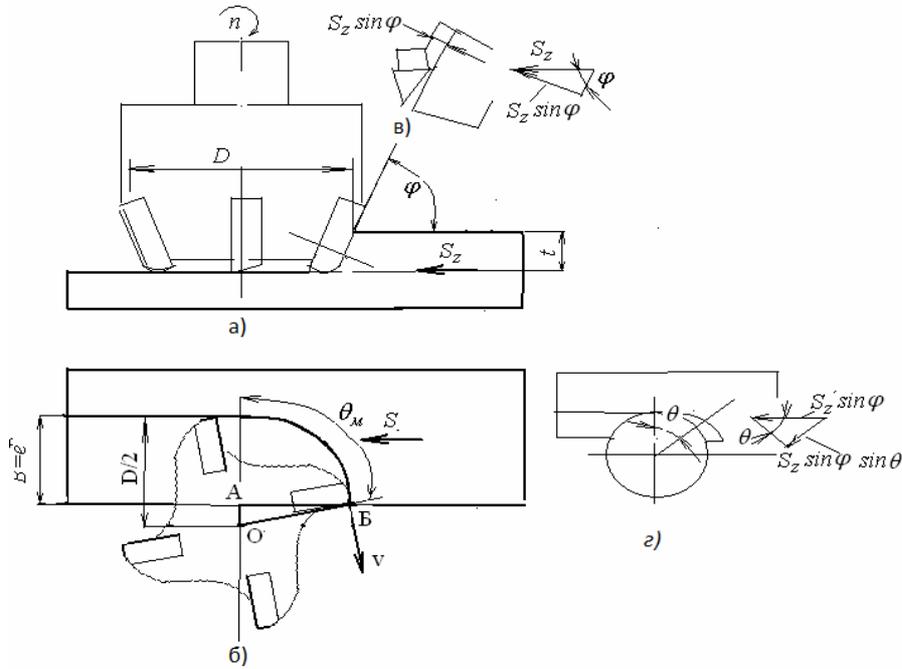


Рис. 1. Схема процесса торцового фрезерования:  
 а — в основной плоскости, б и г — в рабочей плоскости, в — в плоскости стружкообразования

— определены рациональные температуры формоустойчивости и получены рекомендации по назначению минутной подачи и частоты вращения фрезы.

**Связь характеристик износостойкости и изнашивания.** Принятая схема позволила учесть особенности торцового фрезерования и, в частности, рассмотреть условия фрезерования в плоскости стружкообразования при максимальном угле контакта  $\theta_m$ , сопоставимые с аналогичными условиями при стационарном резании (точении) (рис. 1)

В соответствии со схемой (рис. 1) площадь обработанной поверхности связана с подачей на зуб, шириной фрезерования  $B$  (или глубиной врезания  $e$ ), числом зубьев и количеством оборотов  $n$  фрезы соотношением:

$$F^* = S_z \cdot B \cdot Z \cdot n \quad (1)$$

С учетом (1) путь резания  $L^*$ , пройденный одним режущим лезвием, будет равен:

$$L^* = \frac{D}{2} \theta_m \frac{F^*}{S_z \cdot B \cdot Z}, \quad \text{где } \theta_m = \arccos\left(1 - \frac{2e}{D}\right) \quad (2)$$

Средняя интенсивность изнашивания, соответствующая заданной площади обработки, определится формулой:

$$\delta_L^* = \frac{h^* - h_0}{L^*} = \frac{2(h^* - h_0) \cdot S_z \cdot B \cdot Z}{F^* \cdot D \cdot \theta_m} \quad (3)$$

**Термомеханическая модель сопротивления никелевых сплавов пластическим деформациям в адиабатических условиях.** Зависимость предела текучести от деформации с учетом влияния температуры, скорости деформации в адиабатических условиях имеет вид:

$$\frac{\tau_p}{S_{b0}} = \frac{dA_w}{d\epsilon_p} = AK_\epsilon \epsilon_p^m \exp\left[-\frac{(1 - S_{b\theta_0}/S_{b0})AA_1K_\&K_{Pe}}{(T'_0 - T'_c)(m+1)} \epsilon_p^{m+1}\right] \quad (4)$$

$$\text{где } K_{Pe} = \left[1 + \frac{1 - \exp(Pe \cdot \tan \varphi_y)}{Pe \cdot \tan \varphi_y}\right]^{-1} \quad (5)$$

Из (4) следует, что зависимость удельной работы деформации от деформации сдвига с учетом влияния скорости деформации и температуры описывается формулой:

$$A_w = \frac{1 - \exp\left[-\frac{AA_1K_\&(1 - S_{b\theta_0}/S_{b0})K_{Pe}}{(T'_0 - T'_c)(m+1)} \epsilon_p^{m+1}\right]}{\frac{(1 - S_{b\theta_0}/S_{b0})A_1K_{Pe}}{(T'_0 - T'_c)}} \quad (6)$$

Соответственно, зависимость предела текучести от деформации (т.е. кривая течения) для условий резания никелевого сплава может быть получена дифференцированием (6) по деформации:

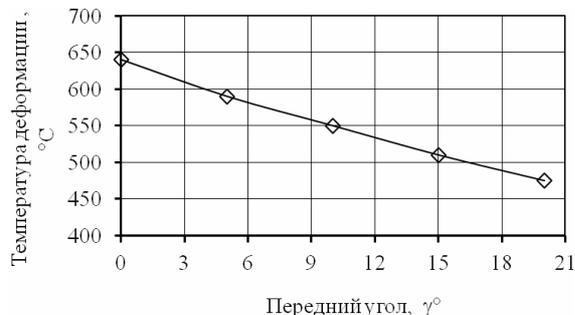
$$\frac{\tau_p}{S_b} = AK_\epsilon \epsilon_p^m \exp\left[-\frac{AA_1K_\&(1 - S_{b\theta_0}/S_{b0})K_{Pe}}{(T'_0 - T'_c)(m+1)} \epsilon_p^{m+1}\right] \quad (7)$$

Максимальные значения предела текучести, достигаются при выравнивании упрочнения и разупрочнения:

$$\frac{\bar{\tau}_p}{S_{b0}} = AK_\epsilon \frac{m \cdot \exp\left(-\frac{m}{m+1}\right)}{B_{q1} \left(1 - \frac{S_{b\theta_0}}{S_{b0}}\right) A_1 K_{Pe} AK_\epsilon \bar{\epsilon}_\tau^m} \quad (8)$$

$$\bar{\epsilon}_\tau = \left[ \frac{m}{AK_\epsilon K_{Pe} A_1 B_{q1} \left(1 - \frac{S_{b\theta_0}}{S_{b0}}\right)} \right]^{\frac{1}{1+m}}$$

Расчеты, выполненные по формулам (8) и по аналогичным формулам для предела текучести на перед-



**Рис. 2. Влияние переднего угла режущего лезвия на температуру деформации при резании никелевого сплава ХН56ВМТЮ-ВД ( $\sigma_b=1250$  МПа;  $\delta=0,2$ ;  $m=0,3$ )**

ней поверхности, показали, что при резании никелевого сплава ХН56ВМТЮ-ВД с прочностными характеристиками при растяжении  $\sigma_b = 1250$  МПа;  $\delta = 0,2$ ;  $m = 0,3$ ; наибольшее значение предела текучести на сдвиг в зоне стружкообразования  $\bar{\tau} = 1,24S_b = 1870$  МПа достигается при деформации  $\bar{\epsilon}_t = 1,9$ , примерно равной конечному истинному сдвигу  $\epsilon_u = 2$ . Это свидетельствует о том, что деформация обрабатываемого материала в рассматриваемых условиях резания происходит в широкой зоне стружкообразования и сопровождается упрочнением материала вплоть до стабилизации предела текучести при значениях, близких к наибольшему пределу текучести. При этом среднее значение предела текучести (удельная касательная сила в условной плоскости сдвига)  $\tau_y = 1,09S_b = 1640$  МПа.

Полученные результаты расчета свидетельствуют о том, что удельные касательные силы  $\tau_y$  при резании никелевого сплава значительно выше, чем при резании отожженных сталей. Это связано не только с более высоким действительным пределом прочности, но с большим упрочнением в зоне стружкообразования в процессе резания.

**Оценка температуры деформации.** На основании полученных значений для удельной работы деформации (6) с учетом конечного истинного сдвига  $\epsilon_u = 2$ , а также с учетом теплового потока, поступающего из зоны стружкообразования в обрабатываемую заготовку [2, с. 155–159] рассчитывалась температура деформации:

$$\theta_g = \frac{A_w}{C_v} K_{pe}. \quad (9)$$

При фрезеровании никелевых сплавов наряду с их прочностными характеристиками большое влияние на температуру деформации оказывает передний угол  $\gamma$  (рис. 2).

## Книжная полка

**Бельков, В. Н. Детали машин и основы конструирования. Передачи : учеб. пособие / В. Н. Бельков, Н. В. Захаров. — Омск : ОмГТУ, 2014. — 1 о=эл. опт. диск (CD-ROM). — ISBN 978-5-8149-1038-7.**

Изложены основы теории, расчета и конструирования передач зацеплением и трением машин общего назначения. Пособие по структуре, содержанию и методике ориентировано на изучение дисциплины «Детали машин и основы конструирования». Содержит справочные таблицы и данные на основе нормативных документов, принятых в практике консультирования.

Таким образом, для средних рациональных значений переднего угла  $\gamma = 10^\circ$  температура деформации равна  $550^\circ\text{C}$ , что составляет большую долю допускаемой рациональной температуры передней поверхности режущего лезвия. Влияние теплового потока из зоны стружкообразования в обрабатываемую заготовку оценивалось коэффициентом  $K_{pe}$ , который для рассматриваемых условий резания был примерно равен 0,7.

### Библиографический список

1. Режимы резания труднообрабатываемых материалов : справ. / Я. Л. Гуревич [и др.]. — М. : Машиностроение, 1986. — 240 с.
2. Верещака, А. С. Резание материалов : учеб. / А. С. Верещака, В. С. Кушнер. — М. : Высш. шк., 2009. — 535 с.
3. Макаров, А. Д. Оптимизация процессов резания / А. Д. Макаров. — М. : Машиностроение, 1976. — 278 с.
4. Резников, А. Н. Теплофизика резания / А. Н. Резников. — М. : Машиностроение, 1969. — 288 с.
5. Бургонова, О. Ю. Повышение эффективности обработки конструкционных материалов фрезерованием : моногр. / А. Ю. Бургонова, В. С. Кушнер. — Омск : ОмГТУ, 2013. — 140 с.
6. Крутько, А. А. Повышение эффективности восстановления токарной обработкой железнодорожных колесных пар : моногр. / А. А. Крутько, В. С. Кушнер, А. А. Воробьев. — Омск : ОмГТУ, 2013. — 176 с.
7. Кушнер, В. С. Оптимизация технологии токарной обработки дисков газотурбинных двигателей с целью уменьшения отклонений обработанной поверхности / В. С. Кушнер, О. Ю. Бургонова, Д. С. Губин // Проблемы разработки, изготовления и эксплуатации ракетно-космической техники : материалы VII Всерос. научн.-техн. конф., посвящ. памяти главного конструктора ПО «Полет» А. С. Клинышкова. — Омск, 2012. — С. 108–112.
8. Кушнер, В. С. Влияние температуры и напряжений на интенсивность формоизменения режущего лезвия при обработке никелевых сплавов / В. С. Кушнер, А. Н. Жавнеров, В. А. Горшенин // Омский научный вестник. Сер. Приборы, машины и технологии. — 2007. — № 3 (60). — С. 26–28.

**КУШНЕР Валерий Семенович**, доктор технических наук, профессор (Россия), профессор кафедры «Машиностроение и материаловедение».

Адрес для переписки: [valerii\\_kushner@mail.ru](mailto:valerii_kushner@mail.ru)

**ГУБИН Дмитрий Сергеевич**, аспирант, ассистент кафедры «Машиностроение и материаловедение».

Адрес для переписки: [gubin.89@list.ru](mailto:gubin.89@list.ru)

Статья поступила в редакцию 18.02.2015 г.

© В. С. Кушнер, Д. С. Губин

## ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ НА СОПРОТИВЛЕНИЕ ПЛАСТИЧЕСКИМ ДЕФОРМАЦИЯМ В ЗОНЕ ПЛАСТИЧЕСКОГО КОНТАКТА НА ПЕРЕДНЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ РЕЗАНИИ

Рассмотрены гипотезы об удельных касательных силах на передней поверхности при резании. На основании имеющихся экспериментальных и теоретических данных о влиянии скорости деформации и температуры на сопротивление пластическим деформациям описаны закономерности упрочнения и разупрочнения материала в зоне пластического контакта стружки с инструментом. Теоретические результаты сопоставлены с экспериментальными. Предложены уравнения, аппроксимирующие зависимость удельных касательных сил от температуры при резании. Полученные результаты могут быть использованы для расчета сил и температур резания.

**Ключевые слова:** удельные касательные силы, температура, скорость деформации, упрочнение, разупрочнение, аппроксимация, экстраполяция.

В качестве характеристик сопротивления материалов пластическим деформациям при резании широко используются данные об удельных касательных силах в зоне стружкообразования и значительно реже используются сведения об удельных силах на пластическом участке контакта передней поверхности инструмента со стружкой. При этом, несмотря на существенные различия в температурах, влияние температуры на удельные касательные силы при расчете сил и температур во многих случаях не учитывалось не только для зоны стружкообразования, но и для передней поверхности. В связи с этим выявления закономерностей влияния условий резания на сопротивление материала пластическим деформациям на передней поверхности является актуальной задачей.

В работах [1–3] контактное взаимодействие резца со стружкой отождествлялось с трением, не учитывавшим пластических деформаций. Наряду с этим установлено [2], что зона контакта режущего лезвия со стружкой состоит из двух примерно равных по длине участков контакта (рис. 1).

На первом участке длиной  $C_{\text{пл}}$  осуществляются значительные пластические деформации в виде неоднородного сдвига прирезцового материала стружки вдоль передней поверхности. По данным [2] истинный сдвиг в этой зоне пластических деформаций значительно превышает конечный истинный сдвиг в зоне стружкообразования и достигает 25–40, а скорость деформации примерно в  $10^6$  больше, чем в испытаниях на растяжение.

В работах [2, 4, 5] принимались допущения о том, что удельные касательные силы  $q$  на участке пластического контакта  $C_{\text{пл}}$  распределены равномерно и для конкретного обрабатываемого материала не зависят от условий резания. В частности, для резания инстру-

ментами с укороченной передней поверхностью [5],  $q_F \approx 0,6S_b$ . Аналогичные допущения принимались и для удельных касательных сил в плоскости стружкообразования [5]:  $\tau_y \approx 0,8S_b$ , а отношение  $q_F/\tau_y$  равно 0,75.

По данным [2] отношение максимального значения предела текучести  $q_0$  на передней поверхности к касательному напряжению в условной плоскости сдвига  $\tau_y$  равно 0,5.

В работах [2, 3] отмечалось, что при резании сталей и температуре резания менее 600 °С на передней поверхности резца образуется нарост. Т. Н. Лоладзе [6] было установлено, что твердость нароста должна быть примерно на 40 % выше твердости срезаемого им материала. Это косвенно свидетельствует о более высоких удельных касательных силах на передней поверхности вблизи режущей кромки.

Анализ зависимости предела текучести на сдвиг от условий деформирования в застойной зоне вблизи режущей кромки, выполненный в работах [7–9], показал, что максимальный предел текучести на сдвиг  $q_0$  примерно равен действительному пределу прочности  $S_b$  при растяжении.

Данные о влиянии температуры деформирования на предел прочности при растяжении образцов из стали 45 свидетельствовали о существенном уменьшении предела прочности с повышением температуры [7].

По данным Т. Н. Лоладзе [6] при резании стали 40 с предварительным подогревом обрабатываемого материала удельные касательные силы  $\tau_y$  в зоне стружкообразования были выше, чем при растяжении, и уменьшались с ростом температуры.

В работах [5, 7, 10, 11] получены формулы для расчета температуры  $\theta(0,y)$  на участке пластического контакта передней поверхности по заданной

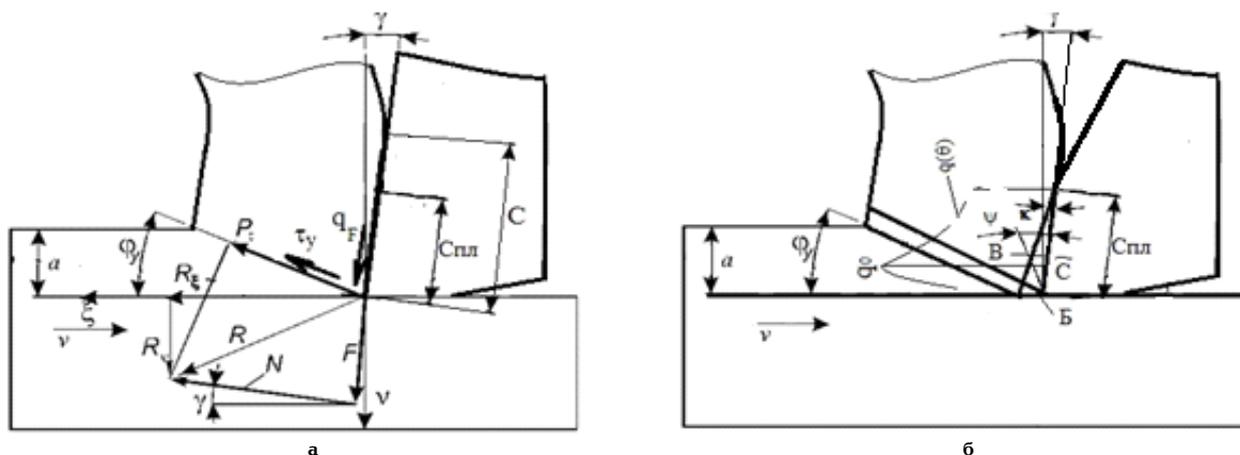


Рис. 1. Схема образования сливной стружки в плоскости стружкообразования при точении резцом с полной (сплошная линия) и с укороченной (пунктирная линия) передней поверхностью:  
 а — силы на участке пластического контакта стружки с передней поверхностью и в условной плоскости сдвига;  
 б — схема распределения предела текучести на сдвиг по передней поверхности в зоне упрочнения Б и в зоне разупрочнения В

Таблица 1

$\dot{\epsilon}/\dot{\epsilon}_0$	Гомологическая температура $T'$			
	< 0,3	0,3–0,5	0,5–0,7	> 0,7
1000	1,16–1,34	1,34–1,42	1,52–2,2	2,2–3,4

удельной касательной силе  $q_F$  удельной работе в зоне стружкообразования, критерию  $Pe$  и объемной теплоемкости:

$$\theta(0, C_{na}) = \frac{A_w}{C_v} + \frac{2 q_F}{\sqrt{\pi} C_v} \sqrt{Pe}, \text{ где } Pe = \frac{va}{\omega}. \quad (1)$$

Формула (3) может быть использована и для оценки удельных касательных сил  $q_0$  по заданной температуре.

В работах [7, 12–14] выявлено, что на предел текучести обрабатываемого материала существенное влияние оказывают деформация  $\epsilon$ , скорость деформации  $\dot{\epsilon}$  и приращение гомологической температуры деформации  $\Delta T'$ .

Так, например, в работе Т. Altan, Е. Yen [15] определяющее уравнение имело вид:

$$\sigma_s = (A + B(\bar{\epsilon}^p)^n) (1 + C \ln(\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0})) (1 - (T')^m) + a e^{-m_0 (T' - T_0)^2}. \quad (2)$$

Влияние скорости деформации на касательное напряжение  $\tau_y$  в условной плоскости сдвига исследовалось А. М. Розенбергом и Е. Н. Ереминым [3] при резании стали, алюминиевого сплава и свинца с весьма малыми скоростями: от 0,0001 до 0,1 м/мин. При резании стали гомологическая температура  $T' \approx 0,167$ , при резании алюминия  $T' \approx 0,32$ , при резании свинца  $T' \approx 0,5$ . Увеличение скорости в 1000 раз вызвало повышение удельной касательной силы  $\tau_y$  при резании свинца в 1,8 раза, при резании алюминия в 1,26 раза, при резании стали в 1,05 раза. Фактически результаты этих опытов свидетельствуют о влиянии гомологической температуры на коэффициент динамичности.

Аналогичные данные о влиянии гомологической температуры на коэффициент динамичности при

изменении скорости деформации в 1000 раз получены С. И. Губкиным (табл. 1) [16].

По данным М. А. Зайкова, влияние деформации, скорости деформации и температуры на предел текучести может быть аппроксимировано функцией:

$$\tau_T = \tau_0 \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^m \left( \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{k \Delta T'} \exp(-B \Delta T'). \quad (3)$$

Приведенные данные свидетельствуют о противоречивых утверждениях о сопротивлении материалов пластическим деформациям на участке пластического контакта резца со стружкой. В частности, имеются противоречия относительно влияния температуры передней поверхности на удельные касательные силы  $q_F$ . Согласно уравнению (3), влияние температуры является комплексным: непосредственно разупрочняющим, что учитывается экспоненциальным множителем, и косвенным — через усиление влияния скорости деформации, что учитывается показательно-степенным множителем.

**Определение зависимости предела текучести от деформации в зоне упрочнения Б на передней поверхности.** При аппроксимации зависимости предела текучести от деформации  $\epsilon_p$  уравнением

$$\frac{q_p}{S_b} = \frac{dA_{Wq}}{d\epsilon_p} = AK_{\dot{\epsilon}} \epsilon_p^m \exp(-BA_1 A_W), \quad (4)$$

$$\text{где } A = \left\{ \sqrt{3} \left[ \sqrt{3} \ln(1 + \delta/100) \right]^m \right\}^{-1}, \quad A_1 = \frac{S_b}{C_v T_{na}}$$

$$\Delta T' = A_1 A_W.$$

Зависимости удельной работы  $A_{Wp}$  и предела текучести на сдвиг  $q_p$  от текущего истинного сдвига  $\epsilon_p$  могут быть рассчитаны по формулам:



Рис. 2. Зависимость температурного коэффициента  $K_\theta$  от температуры при растяжении образцов из стали 45

$$A_{Wp} = \frac{1}{BA_1} \ln \left( 1 + \frac{AA_1 BK_{\&g} \varepsilon_p^{1+m}}{1+m} \right),$$

$$\frac{q_p}{S_b} = AK_{\&g} \varepsilon_p^m \left( 1 + \frac{AA_1 B_\tau K_{\&g} \varepsilon_p^{1+m}}{1+m} \right)^{-1}. \quad (5)$$

Соответственно, максимальное значение предела текучести определится из условия:

$$\frac{dq_p}{d\varepsilon_p} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{q_0}{S_b} = \frac{AK_{\&g} \tilde{\varepsilon}_q^m}{m+1}, \quad \text{где } \tilde{\varepsilon}_q = \left[ \frac{m(m+1)}{AA_1 K_{\&g} B_\tau} \right]^{\frac{1}{m+1}}. \quad (7)$$

Расчеты показали, что, в частности, для стали 45

$$\frac{q_0}{S_b} \approx 1,06 \quad \text{при } \tilde{\varepsilon}_q = 1,6.$$

**Влияние температуры на сопротивление пластическим деформации при растяжении и при резании.** Температура испытаний оказывает непосредственное влияние на предел текучести, который уменьшается с повышением температуры, а также косвенное влияние через изменение коэффициента динамичности, возрастающее с повышением гомологической температуры.

Непосредственное влияние температуры на температурный коэффициент  $K_\theta = \sigma_\theta / \sigma_b(300)$  может быть аппроксимировано функцией вида:

$$K_\theta = \left( 1 - \frac{T' - T'_0}{1 - T'_0} \right)^B. \quad (8)$$

Для стали 45 [17] предел прочности убывает с повышением температуры, начиная с 300 °C ( $T'_0 = 0,32$ ). Результаты испытаний на растяжение в интервале изменения температуры (300–1100 °C) хорошо аппроксимируются функцией (8) при  $B = 3,5$  (рис. 2).

Обобщенные результаты исследования влияния гомологической температуры на коэффициент динамичности при резании (по данным А. М. Розенберга [3]) и при растяжении (по данным С. И. Губкина [16]) при изменении скорости деформации в 1000 раз, представленные на рис. 3, хорошо аппроксимируются показательной функцией  $10^{\alpha k (T' - T'_0)}$  при  $T'_0 = 0,1$  и  $k = 0,2$ , где  $\alpha$  определяет порядок изменения скорости деформации.

Использование показательной функции  $10^{\alpha k (T' - T'_0)}$  с основанием 10 целесообразно в связи с большой разницей скоростей деформации при резании и растяжении, которая по данным Н. Н. Зорева [2] составляет для практически применяемых режимов резания от  $10^6$  (для передней поверхности) до  $10^8$  (для зоны стружкообразования). При этом изменение скорости деформации при резании, осуществляющееся в пределах одного порядка, следует считать статистически незначимым.

Полученные А. М. Розенбергом и С. И. Губкиным данные о влиянии гомологической температуры на коэффициент динамичности при изменении скорости деформации на 3 порядка на основании определяющего уравнения (5) экстраполированы на скорости деформации, характерные для резания изменением множителя  $\alpha = 3$  на  $\alpha = 6$  (рис. 3). Анализ полученной зависимости коэффициента динамичности от гомологической температуры для изменения скорости деформации в сравнении с растяжением в 1000000 раз свидетельствует о значительном влиянии скорости деформации при резании, повышающимся с ростом температуры. Так, при резании стали 45 и изменении температуры на передней поверхности от 950 до 1150 °C коэффициент динамичности может находиться в пределах от 5 до 7.

Столь существенное косвенное влияние температуры через скорость деформации объясняет значительно меньшее результирующее влияние температуры на удельные касательные силы на передней

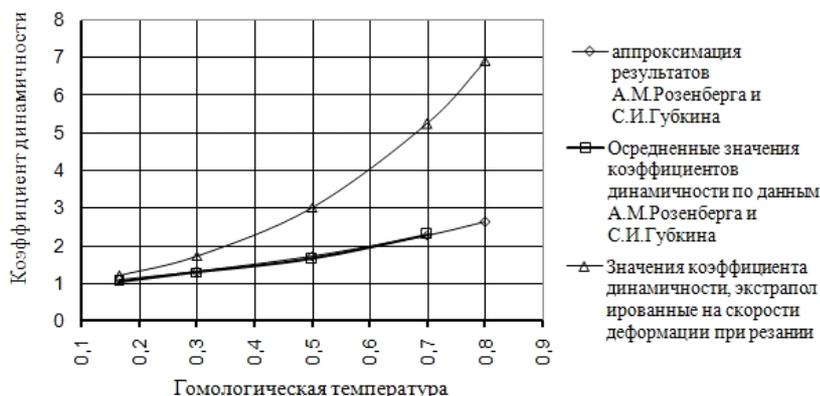


Рис. 3. Влияние гомологической температуры на коэффициент динамичности при изменении скорости деформации в 1000 раз и в 1000000 раз (в условиях испытаний  $\alpha=3$ )

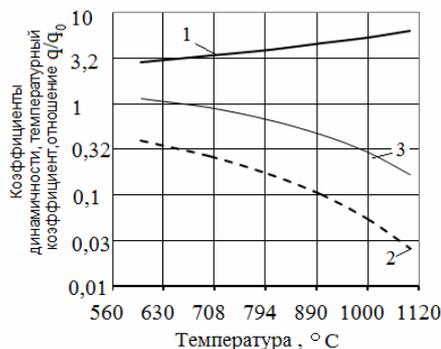


Рис. 4. Влияние температуры на относительное изменение предела текучести стали 45 на сдвиг  $q/q_0$ :

- 1 — коэффициент динамичности для отношения скоростей деформации при резании и растяжении  $\dot{\epsilon}/\dot{\epsilon}_0 = 10^6$ ,  
 2 — температурный коэффициент для растяжения ( $\dot{\epsilon}_0 \approx 10^{-2} 1/c$ ),  
 3 — температурный коэффициент  $K_{\sigma\theta} = q/q_0$  для резания

поверхности при резании в сравнении с растяжением (рис. 4).

Для большей наглядности графики зависимости предела текучести от температуры на рис. 4 представлены в координатах с логарифмическими шкалами.

Сопоставление теоретически полученной зависимости удельной касательной силы на укороченной передней поверхности с имеющимися экспериментальными и теоретическими результатами

Полученная комплексная теоретическая зависимость (кривая 3, рис. 4, кривая 1, рис. 5) предела текучести от температуры

$$q = q_0 10^{6[0,2(T'-0,1)]} \left( 1 - \frac{T'-0,33}{0,67} \right)^{3,5}. \quad (9)$$

удовлетворительно согласуется с известными экспериментальными и теоретическими данными, некоторые из которых представлены на рис. 5.

Зависимость 2 (рис. 5) получена обработкой экспериментальных данных Н. Н. Зорева [2] по силам резания и усадке стружке при точении стали 35ХЗМН с использованием уравнения

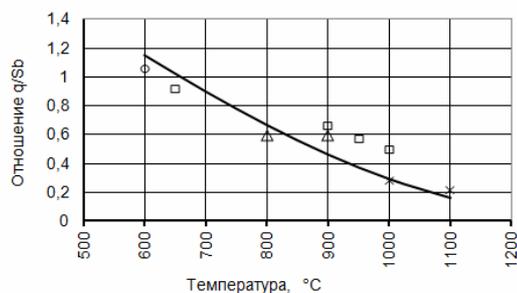
$$\frac{q_F}{\tau_y} = \frac{\left( \frac{R_\xi}{R_v} \sin \gamma + \cos \gamma \right) \left[ \left( \frac{\cos \gamma}{\zeta - \sin \gamma} \right)^2 + 1 \right]}{\left( \frac{R_\xi}{R_v} - \cos \gamma \right) 2\zeta \frac{\cos \gamma}{\zeta - \sin \gamma}}. \quad (10)$$

При этом вместо отношения сил на передней поверхности  $R_\xi/R_v$  использовалось отношение экспериментально измеренных сил резания

$$\frac{R_\xi}{R_v} \approx \frac{P_z}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2}}.$$

Зависимость 3 (рис. 5) получена путем аппроксимации экспериментальных данных об удельных силах  $q_F$  при точении сталей 65Г, 20ХГНР, 18ХГТ, 45ХН, ХВГ, У8, Х12М, 40Х, 45 резцами с укороченной передней поверхностью в относительно узком диапазоне изменения температуры передней поверхности (от 800 до 950 °С) в предположении о независимости этих сил от температуры [5].

Цифрой 4 (рис. 5) обозначены расчетные результаты о средней удельной касательной силе  $q_r$  вычис-



- 1 — Комплексная зависимость предела текучести от температуры  
 2 □ Зависимость удельной касательной силы от температуры, рассчитанная по силам резания и усадке стружки  
 3 Δ Экспериментальные данные об удельных касательных силах на укороченной передней поверхности  
 4 × Значения предела текучести, рассчитанные по заданным температурам и критериям  $Pe$   
 5 ○ Расчетное значение  $Q_0$

Рис. 5. Сопоставление теоретической зависимости предела текучести на сдвиг от температуры с экспериментальными и теоретическими данными



Рис. 6. Сопоставление расчетной (теоретической) зависимости (9) предела текучести на сдвиг от температуры с упрощенной аппроксимирующей зависимостью (11)

ленной по заданным температурам и критериям  $Pe$  по формуле (1) для реальных условий черновой токарной обработки прокатных валков из отожженных сталей твердостью  $HV = 2000$  МПа при  $Pe = 90$  и закаленных сталей твердостью  $HV = 2800$  МПа при  $Pe = 130$  [9].

Под цифрой 5 (рис. 5) представлено максимальное значение предела текучести на сдвиг на передней поверхности, вычисленной по формуле (7).

Все представленные экспериментальные и расчетные результаты не только не противоречат теоретической зависимости удельных касательных сил от температуры (9), но, скорее, подтверждают эту зависимость.

Учитывая, что удельные касательные силы на передней поверхности зависят только от максимального значения предела текучести  $q_0$  и от приращения гомологической температуры, уравнение (9) может быть аппроксимировано более простой эмпирической функцией (рис. 6):

$$q = q_0 10^{6[0,2(T'-0,1)]} \left( 1 - \frac{T'-0,33}{0,67} \right)^{3,5} \approx q_0 \left( 1 - \frac{T'-0,5}{0,5} \right)^2. \quad (11)$$

Упрощенная зависимость (11) может быть использована при расчете сил и температур на передней поверхности режущего лезвия.

На основании принятой схематизации, согласно которой зона пластического контакта режущего

лезвия со стружкой состоит из двух участков: участка упрочнения и участка разупрочнения, установлено, что на границе этих двух участков предел текучести на сдвиг достигает максимального значения  $q_0$  и не зависит от режимов резания. Максимальное значение предела текучести  $q_0$  может быть использовано в качестве характеристики сопротивления материала пластическим деформациям на передней поверхности.

Высокий уровень максимального значения предела текучести на сдвиг вблизи режущей кромки согласуется с явлением образования нароста на передней поверхности режущего лезвия в определенном диапазоне изменения температуры передней поверхности.

Распределение предела текучести на сдвиг на втором участке зоны пластического контакта зависит от температуры передней поверхности, причем при достаточно высоких режимах резания, характеризующихся температурами выше 1000 °С, удельные касательные силы могут быть в 4–5 раз меньше максимального значения  $q_0$ .

Установлено, что увеличение гомологической температуры существенно усиливает влияние скорости деформации на предел текучести, в связи с чем при практически применяемых режимах резания предел текучести возрастает в 5–7 раз.

В связи с постоянством удельных касательных сил на участке упрочнения и их изменением только на участке разупрочнения, а также в связи с существенным усилением влияния скорости деформации на предел текучести при высоких температурах, комплексное влияние гомологической температуры на сопротивление материала пластическим деформациям при резании значительно меньше, чем при растяжении.

В диапазоне изменения температуры передней поверхности от 600 до 1200 °С увеличение температуры приводит к уменьшению средних удельных касательных сил на передней поверхности и может быть аппроксимировано эмпирической степенной функцией (11).

#### Библиографический список

1. Trent, E. M. and Wright, P. K., Metal Cutting, 4th. Ed., Butterworth-Heinemann, Boston, 2000. — pp 446.
2. Развитие науки о резании металлов / В. Ф. Бобров [и др.] ; под ред. Н. Н. Зорева. — М. : Машиностроение, 1967. — 415 с.
3. Розенберг, А. М. Элементы теории процесса резания металлов / А. М. Розенберг, А. Н. Еремин. — М. : Машгиз, 1956. — 318 с.
4. Полетика, М. Ф. Основные типы контактных условий на передней поверхности инструмента и их связь с процессом стружкообразования / М. Ф. Полетика // Пути интенсификации производственных процессов при механической обработке. — Томск : Том. политехн. ин-т., 1979. — С. 3–8.
5. Кушнер, В. С. Термомеханическая теория процесса непрерывного резания пластичных материалов / В. С. Кушнер. — Иркутск : Изд-во Иркут. ун-та, 1982. — 125 с.
6. Лоладзе, Т. Н. Прочность и износостойкость режущего инструмента / Т. Н. Лоладзе. — М. : Машиностроение, 1982. — 352 с.
7. Верещака, А. С. Резание материалов : учеб. / А. С. Верещака, В. С. Кушнер. — М. : Высш. шк., 2009. — 535 с.
8. Бургонова, О. Ю. Повышение эффективности обработки конструкционных материалов фрезерованием : моногр. / А. Ю. Бургонова, В. С. Кушнер. — Омск : ОмГТУ, 2013. — 140 с.
9. Крутько, А. А. Повышение эффективности восстановления токарной обработкой железнодорожных колесных пар : моногр. / А. А. Крутько, В. С. Кушнер, А. А. Воробьев. — Омск : ОмГТУ, 2013. — 176 с.
10. Резников, А. Н. Теплофизика резания / А. Н. Резников. — Машиностроение, 1969. — 288 с.
11. Резников, А. Н. Теплофизика процессов механической обработки материалов / А. Н. Резников. — Машиностроение, 1981. — 279 с.
12. Кушнер, В. С. Влияние температуры на основные физические характеристики процесса резания пластичных металлов / В. С. Кушнер // Физика и химия обработки материалов. — 1985. — № 4. — С. 45–60.
13. Кушнер, В. С. Влияние температуры и напряжений на интенсивность формоизменения режущего лезвия при обработке никелевых сплавов / В. С. Кушнер, А. Н. Жавнеров, В. А. Горшенин // Омский научный вестник. Сер. Приборы, машины и технологии. — 2007. — № 3 (60). — С. 26–29.
14. Кушнер, В. С. Определение действительных механических свойств материалов при больших деформациях в адиабатических условиях / В. С. Кушнер, М. Г. Сторчак, А. Н. Жавнеров, А. А. Крутько // Омский научный вестник. Сер. Приборы, машины и технологии. — 2009. — № 2 (80). — С. 65–69.
15. Криворучко, Д. В. Моделирование процессов резания методом конечных элементов : методологические основы : моногр. / Д. В. Криворучко, В. А. Залого ; под общ. ред. В. А. Залого. — Сумы : Университетская книга, 2012. — 450 с.
16. Губкин, С. И. Пластическая деформация металлов. В 3 т. Т. 3 / С. И. Губкин. — М. : Металлургиздат, 1961. — 306 с.
17. Физические величины : справочник / А. П. Бабичев [и др.] ; под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. — М. : Энергомашиздат, 1991. — 1232 с.

**КУШНЕР Валерий Семенович**, доктор технических наук, профессор (Россия), профессор кафедры «Машиностроение и материаловедение».

Адрес для переписки: [valerii\\_kushner@mail.ru](mailto:valerii_kushner@mail.ru)

**БУРГОНОВА Оксана Юрьевна**, кандидат технических наук, доцент кафедры «Машиностроение и материаловедение».

Адрес для переписки: [oksbourg@mail.ru](mailto:oksbourg@mail.ru)

**ГУБИН Дмитрий Сергеевич**, аспирант, ассистент кафедры «Машиностроение и материаловедение».

Адрес для переписки: [gubin.89@list.ru](mailto:gubin.89@list.ru)

Статья поступила в редакцию 05.05.2015 г.

© В. С. Кушнер, О. Ю. Бургонова, Д. С. Губин

## ЭЛЕМЕНТЫ РАСЧЕТА РЕГУЛЯТОРА ДАВЛЕНИЯ ПОВЫШЕННОЙ ГЕРМЕТИЧНОСТИ

Рассматриваются элементы расчета параметров гидравлического регулятора давления оригинальной конструкции, обладающего повышенной герметичностью. Полученные зависимости позволяют определять скорости течения жидкости в подводящем канале регулятора в зависимости от давления открытия запорного элемента регулятора и площади проходного сечения указанного канала.

**Ключевые слова:** расход и давление, рабочая жидкость гидравлический регулятор, скорость течения жидкости, сила натяжения пружины, изменение количества движения потока жидкости.

Повышение надежности гидравлических регуляторов давления и расхода, распределителей потока и других элементов гидроприводов и гидроавтоматики при использовании традиционных методов конструирования и выбора материалов связано с повышенными точностью и качеством обработки поверхностей, необходимостью применения высококачественных конструкционных материалов. При этом они остаются чувствительны к загрязнению рабочей жидкости и имеют относительно большие габариты [1]. Анализ показал, что указанные недостатки таких устройств могут быть в значительной степени устранены, если их регулирующие или запорно-регулирующие элементы выполнять из эластичных материалов.

Известны и используются в настоящее время гидравлические гидромеханизмы с регуляторами и устройствами, в которых используют эластичные элементы.

Весьма простым и надежным является обратный клапан с эластичным кольцом круглого сечения [1]. В этом клапане эластичное кольцо выполняет две функции: при движении жидкости в прямом направлении кольцо пропускает жидкость, при движении жидкости через клапан в обратном направлении — запирает проходное сечение клапана, надежно прижимаясь к коническим поверхностям канавки, в которой оно размещается. Перепад давления, обусловленный предварительным натягом кольца в кониче-

ской канавке, в исследуемом диапазоне расходов через клапан изменяется незначительно. При изменении направления потока жидкости клапан надежно запирается и выдерживает давление выше 10 МПа. В указанной работе рассмотрены и другие устройства (регуляторы расхода, распределители и др.).

При исследовании регулятора давления с эластичным элементом, который обеспечивает высокую герметичность клапана во всех режимах его работы, установлено, что он работает достаточно надежно как в условиях вибрационных нагрузок, так и перегрузок [2].

Принцип действия регулятора давления оригинальной конструкции (рис. 1а) состоит в следующем.

Гидравлическое устройство функционирует с рабочим давлением  $p_1$ , которое воздействует на уплотнительный эластичный элемент 3, размещенный в канавке с коническими стенками, через канал 1.

В нерабочем состоянии плунжер 2, в котором размещается эластичный элемент, находится в исходном состоянии, каналы 1 (рабочее давление  $p_1$ ) и канал 5 (слив) надежно изолированы друг от друга. Исключаются утечки жидкости и в подвижном соединении плунжер 2 — корпус 4.

При повышении давления в системе выше допустимого плунжер 2 с кольцом 3 перемещается вверх по схеме, кольцо освобождается от стенки корпуса 4, и жидкость, вытесняя кольцо, устремляется на слив, предохраняя гидросистему от повышенного давления (рис. 1б).

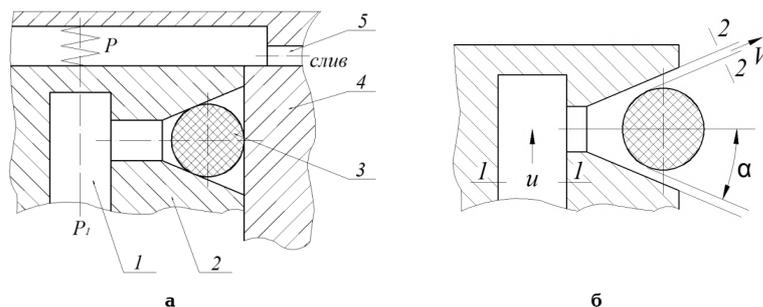


Рис. 1. Принципиальная и расчетная схемы клапана повышенной герметичности

При расчете предохранительного клапана повышенной герметичности с эластичным запорным элементом [2] необходимо учитывать силы, возникающие при открытии клапана, которое сопровождается радиальной деформацией запорного элемента под действием потока жидкости. Геометрия подводящего канала (сеч. 1–1, рис. 1) клапана определяется выбором скорости и расхода рабочей жидкости гидросистемы:

$$Q = uf,$$

где  $Q$  — расход жидкости,  $u$  — скорость,  $f$  — площадь проходного сечения.

Давление под клапаном при расчетном расходе  $Q$  и силу  $P$ , действующую со стороны жидкости на запорный элемент, можно определить из уравнения количества движения

$$Q\rho(u - V \cos \alpha) = P - p_1 f, \quad (1)$$

где  $Q$  — расход жидкости через клапан;

$u$  — скорость жидкости в подводе (сеч. 1–1);

$V$  — скорость в щели (сеч. 2–2);

$\alpha$  — угол отклонения струи, вытекающей из-под запорного элемента;

$P$  — сила, действующая со стороны жидкости на клапан;

$f$  — площадь сечения подвода;

$p_1$  — избыточное давление в сечении 1–1 (давление за клапаном атмосферное);

$\rho$  — плотность жидкости.

Из уравнения (1) находим:

$$p_1 = \frac{P}{f} - Q\rho(u - V \cos \alpha) = P - p_1 f \quad (\text{рис. 1б}),$$

где  $P = P_0 - cx$  ( $P_0$  — сила первоначального натяжения пружины;  $c$  — жесткость пружины;  $x$  — подъем клапана). С учетом, что  $Q = uf$ , получим

$$p_1 = \frac{P_0 + cx}{f} - \rho u(u - V \cos \alpha)$$

или с учетом, что  $\rho = \frac{\gamma}{g}$  ( $\gamma$  — удельный вес;  $g$  — ускорение свободного падения), получим

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_0 + cx}{f\gamma} - \frac{u^2}{g} + \frac{uV \cos \alpha}{g}.$$

По уравнению Бернулли давление  $p$  в линии равно

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} + \xi \frac{u^2}{2g},$$

где  $\xi$  — коэффициент сопротивления подводного канала.

Скорость жидкости в линии меньше, чем скорость  $u$ , поэтому ее не учитываем, тогда

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{p_0 + cx}{f\gamma} - \frac{u^2}{2g} + \frac{uV \cos \alpha}{g} + \xi \frac{u^2}{2g}.$$

С учетом, что  $P_0 = p_0 f$  ( $p_0$  — давление открытия клапана), то

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + \frac{cx}{f\gamma} - \frac{u^2}{2g} + \frac{uV \cos \alpha}{g} + \xi \frac{u^2}{2g}. \quad (2)$$

Определим давление  $p$  в линии при полностью открытом клапане.

При анализе полученного выражения (2) устанавливаем, что давление  $p$  можно представить как сумму давления открытия клапана и дополнительного давления:

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + \frac{\Delta p}{\gamma},$$

$$\text{где } \frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{cx}{f\gamma} + \frac{uV \cos \alpha}{g} + \xi \frac{u^2}{2g} - \frac{u^2}{2g},$$

$\frac{cx}{f\gamma}$  — приращение напора за счет сжатия пружины при подъеме клапана;

$\xi \frac{u^2}{2g}$  — приращение напора из-за сопротивления

подводящего канала клапана; второй и четвертый члены правой части уравнения характеризуют изменение количества движения потока.

Угол отклонения  $\alpha$  потока является величиной переменной и зависит от подъема запорного элемента, оценим его значение приближенно.

Если принять, что подъем элемента  $x \approx \frac{d}{8}$  ( $d$  —

диаметр подвода),  $\alpha \approx 70^\circ$ ,  $u = \frac{1}{3}V$ ,  $\cos \alpha \approx 0,3$ , тогда

$$\frac{uV \cos \alpha}{g} = \frac{2u \cdot 3u \cdot 0,3}{2g} = 1,8 \frac{u^2}{2g},$$

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{cx}{f\gamma} + 1,8 \frac{u^2}{2g} + \xi \frac{u^2}{2g} - \frac{u^2}{2g}$$

или

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{cx}{f\gamma} + 0,8 \frac{u^2}{2g} + \xi \frac{u^2}{2g}.$$

Коэффициент сопротивления подвода  $\xi$  зависит от формы подвода и является функцией числа Рей-

нольдса потока  $\xi = f(R_e)$ ,  $R_e = \frac{ud}{\nu}$ , где  $d$  — диаметр

подвода,  $\nu$  — кинематическая вязкость.

Известно, что при  $R_e \geq 10000$  из-за турбулентности потока коэффициент сопротивления  $\xi = const$  (не зависит от числа Рейнольдса). Для рассматриваемого канала подвода можно принять  $\xi = 0,2$ , тогда

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{cx}{f\gamma} + (0,8 + 0,2) \frac{u^2}{2g} = \frac{\Delta p_{пруж}}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}. \quad (3)$$

Для выбора скорости  $u$  учтем, что  $\frac{p}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + \frac{\Delta p}{\gamma}$ ,

для допустимого  $\Delta p$ , отсчитанного от  $p_0$ , можно записать  $\Delta p = Kp_0$ ,  $\gamma = \rho g$ .

Тогда, согласно [3], можно получить

$$Kp_0 = K_1 p_0 + \frac{u^2}{2g},$$

откуда

$$u = \sqrt{(K - K_1) 2 \frac{p_0}{\rho}},$$

где  $p_0$  — давление открытия клапана.

Требуемую жесткость пружины можно определить согласно выражению

$$\frac{cx}{\rho g f} = K_1 p_0,$$
$$c = \frac{K_1 p_0 \rho g f}{x},$$

где  $x$  — подъем клапана.

Для рассматриваемого клапана можно принять, что

$$x = \frac{Q}{\mu \pi d \sin \alpha \sqrt{2 \frac{p_0 (1+K)}{\rho}}},$$

$\mu$  — коэффициент расхода ( $\mu = f(R_e)$ ).

Согласно рекомендациям [3], можно принять  $\mu = 0,62$ .

Указанные параметры могут быть уточнены при экспериментальных исследованиях.

#### Библиографический список

1. Сыркин, В. В. О применении эластичных элементов в гидравлических регуляторах / В. В. Сыркин, В. Б. Петров //

Гидропривод и гидропневматика : Респ. межведомств. науч.-техн. сб. — Киев : Техніка, 1978. — Вып. 14. — С. 86–88.

2. Сыркин, В. В. Исследование работы регуляторов давления повышенной герметичности / В. В. Сыркин, В. А. Трейер // Вестник машиностроения. — 2014. — № 5. — С. 29–32.

3. Гавриленко, Б. А. Гидравлический привод / Б. А. Гавриленко, В. А. Минин, С. Н. Рождественский. — М. : Машиностроение, 1968. — 502 с.

**СЫРКИН Владимир Васильевич**, доктор технических наук, доцент (Россия), профессор кафедры «Техническая механика» Омского автобронетанкового инженерного института; профессор кафедры «Машиноведение» Омского государственного технического университета.

**ТРЕЙЕР Виктор Артурович**, старший преподаватель кафедры «Техническая механика» Омского автобронетанкового инженерного института; соискатель по кафедре «Машиноведение» Омского государственного технического университета.  
Адрес для переписки: syrkinvv@mail.ru

Статья поступила в редакцию 18.03.2015 г.

© В. В. Сыркин, В. А. Трейер

УДК 531.8

**В. Г. ХОМЧЕНКО**

Омский государственный  
технический университет

## МЕТОД ВИРТУАЛЬНЫХ ПОВОРОТОВ В РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ МАНИПУЛЯТОРОВ ПЛАТФОРМЕННОГО ТИПА

В статье предложен метод решения обратной задачи кинематики манипуляторов параллельной структуры, в котором с целью упрощения алгоритмов расчета введено и используется понятие виртуальных поворотов.

**Ключевые слова:** манипуляторы параллельной структуры, обратная задача кинематики, виртуальные повороты.

В последнее время все большее распространение получают так называемые платформенные механизмы Гауфа — Стюарта [1–3] с параллельной кинематикой (триподы, гексаподы и т.п.).

Такие механизмы обладают высокой жесткостью, что определяет их большую нагрузочную способность, точность позиционирования рабочих органов и т.п. В связи с этим такие механизмы нашли широкое применение в качестве манипуляторов роботов, выполняющих различные производственные функции. Они применяются в качестве измерительных машин, летных тренажеров, технологических станков для изготовления деталей сложной формы, таких как лопатки турбин, обтекателей реактивных двигателей, пресс-форм и т.п.

В манипуляторах с параллельной кинематикой неподвижное основание А соединено с подвижной платформой В в общем случае несколькими (не менее трех) стержнями переменной длины (рис. 1).

Концы стержней соединяются с неподвижной А и подвижной В платформами в зависимости от принятой структуры механизма различными (часто сферическими) кинематическими парами.

При анализе и синтезе механизмов параллельной структуры различают прямую и обратную задачи кинематики.

Прямая задача кинематики заключается в определении положения выходного звена (выходной платформы В) с закрепленным на нем предметом манипулирования по известным длинам стержней (приводных звеньев). Решение этой задачи для механизмов с параллельной структурой является достаточно сложной. Необходимость в ней возникает в весьма редких случаях.

Наиболее содержательной, с нашей точки зрения, является обратная задача кинематики манипуляторов с параллельной структурой (задача синтеза), когда по заданному закону движения схвата, закреплен-

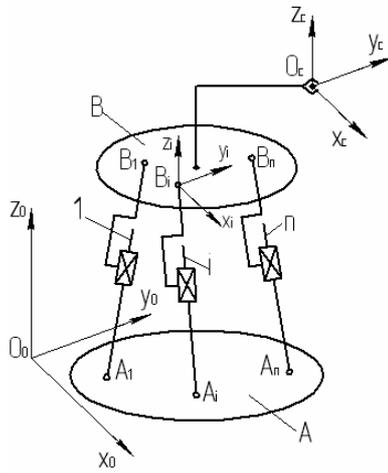


Рис. 1. Обобщенная схема n-пода

ному на подвижной платформе, требуется определить законы изменения длин приводных звеньев, являющихся обобщенными координатами  $q_i$  ( $i = 3, \dots, n$ ; здесь:  $n$  — число степеней подвижности — число приводных звеньев манипулятора). Именно обратная задача кинематики должна быть решена для определения управляющих воздействий на приводы входных звеньев-стержней  $A_i B_i$  с изменяющейся длиной.

Решим обратную задачу кинематики для общего случая, т.е. для манипулятора платформенного типа с любым наперед заданным числом  $n$  степеней подвижности.

Введем две основные системы координат, а именно:

—  $O_0 X_0 Y_0 Z_0$  — систему координат, связанную со стойкой  $A$  и являющуюся инерциальной системой координат;

—  $O_c X_c Y_c Z_c$  — систему координат, жестко связанную с подвижной платформой  $B$  так, что ее начало расположено в центре (в характерной точке) схвата  $O_c$  (в центре предмета манипулирования, измерительного инструмента и т.п.). Оси координат этой системы в начальном положении параллельны и однонаправлены с соответствующими осями координат системы  $O_0 X_0 Y_0 Z_0$ .

Положение схвата манипулятора в пространстве абсолютных координат  $O_0 X_0 Y_0 Z_0$  задается как функция времени  $t$  координатами его (схвата) характерной точки  $O_c$ , а именно, координатами  $x_{0c}(t)$ ;  $y_{0c}(t)$ ;  $z_{0c}(t)$ .

Для задания ориентации схвата в пространстве абсолютных координат будем использовать углы  $x_0 \hat{z}_c(t)$ ,  $y_0 \hat{z}_c(t)$  и  $x_0 \hat{y}_c(t)$ , определяющие соответственно положение оси  $Z_c$  схвата относительно осей  $X_0$  и  $Y_0$  и оси  $Y_c$  относительно оси  $X_0$  основания (рис. 2).

Для решения обратной задачи кинематики необходимо также задать в неподвижной инерциальной системе координат  $O_0 X_0 Y_0 Z_0$  координаты  $x_{A1}, y_{A1}, z_{A1}, \dots; x_{An}, y_{An}, z_{An}$  центров  $A_1, \dots, A_n$  сферических шарниров, соединяющих приводные стержни со стойкой  $A$ , и координаты  $x_{B1}, y_{B1}, z_{B1}, \dots; x_{Bn}, y_{Bn}, z_{Bn}$  центров шарниров  $B_1, \dots, B_n$ , соединяющих эти звенья с подвижной платформой  $B$ , в системе координат подвижной платформы  $O_c X_c Y_c Z_c$ .

Таким образом, обобщенные координаты манипулятора можно представить в виде функции:

$$q_i = q_i(G; X(t)), \quad (i = 3, \dots, n),$$

где  $G = (x_{A1}, y_{A1}, z_{A1}; \dots; x_{An}, y_{An}, z_{An}; x_{B1}, y_{B1}, z_{B1}; \dots; x_{Bn}, y_{Bn}, z_{Bn})$  — вектор назначаемых параметров, неизменяемых в ходе решения задачи;  $X(t) = (x_{0c}(t); y_{0c}(t);$

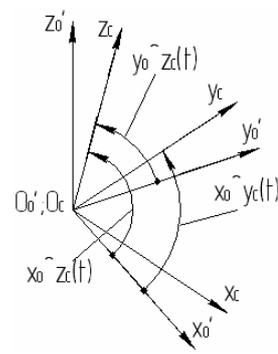


Рис. 2. Задание ориентации схвата в инерциальном пространстве углами  $x_0 \hat{z}_c(t)$ ,  $y_0 \hat{z}_c(t)$ ,  $x_0 \hat{y}_c(t)$

$z_{0c}(t)$ ;  $x_0 \hat{z}_c(t)$ ;  $y_0 \hat{z}_c(t)$ ;  $x_0 \hat{y}_c(t)$ ) — вектор параметров, задающих требуемый закон движения схвата манипулятора в абсолютном пространстве.

Углы  $x_0 \hat{z}_c(t)$ ,  $y_0 \hat{z}_c(t)$  и  $x_0 \hat{y}_c(t)$  являются, наряду с углами Эйлера [4], наиболее естественным средством для однозначного задания ориентации схвата в пространстве абсолютных координат (рис. 2), однако непосредственное использование их для решения обратной задачи кинематики затруднено. Решение этой задачи существенно упрощается, если воспользоваться некоторыми виртуальными (мнимыми) поворотами.

Будем полагать, что заданная углами  $x_0 \hat{z}_c(t)$ ,  $y_0 \hat{z}_c(t)$  и  $x_0 \hat{y}_c(t)$  ориентация схвата и в целом подвижной платформы  $B$  обеспечивается за счет трех виртуальных поворотов системы координат  $O_c X_c Y_c Z_c$  относительно осей  $O_c X_c$ ,  $O_c Y_c$  и  $O_c Z_c$  соответственно на углы  $\varphi_x(t)$ ,  $\varphi_y(t)$ ,  $\varphi_z(t)$  в строго указанной последовательности. Поворот на углы  $\varphi_x(t)$ ,  $\varphi_y(t)$  и  $\varphi_z(t)$  должен происходить против часовой стрелки вокруг соответствующих осей координат.

Переход от углов  $x_0 \hat{z}_c(t)$ ,  $y_0 \hat{z}_c(t)$  и  $x_0 \hat{y}_c(t)$ , задающих положение схвата и платформы в абсолютной системе координат  $O_0 X_0 Y_0 Z_0$ , к виртуальным углам поворота  $\varphi_x(t)$ ,  $\varphi_y(t)$ ,  $\varphi_z(t)$  позволяет корректным образом использовать матричный аппарат вычислений для решения обратной задачи кинематики манипуляторов платформенного типа.

Как известно, направляющие косинусы углов  $x_0 \hat{z}_c(t)$ ,  $y_0 \hat{z}_c(t)$  и  $x_0 \hat{y}_c(t)$  являются наддиагональными элементами блочной матрицы поворота  $3 \times 3$  в результирующей матрице преобразования координат  $4 \times 4$  [4] (соответственно первыми и вторыми элементами третьего столбца и первым элементом второго столбца).

Получим для принятой нами последовательности виртуальных поворотов системы  $O_c X_c Y_c Z_c$  на углы  $\varphi_x(t)$ ,  $\varphi_y(t)$  и  $\varphi_z(t)$  необходимые наддиагональные элементы путем перемножения соответствующих матриц поворота  $3 \times 3$   $m_{01}$ ,  $m_{12}$  и  $m_{23}$ , а именно:

$$m_{03} = m_{01} \cdot m_{12} \cdot m_{23} =$$

$$= \begin{vmatrix} C\varphi_y \cdot C\varphi_z & C\varphi_y \cdot S\varphi_z \\ C\varphi_x \cdot S\varphi_z + C\varphi_z \cdot S\varphi_x \cdot S\varphi_y & C\varphi_x \cdot C\varphi_z - S\varphi_x \cdot S\varphi_y \cdot S\varphi_z \\ S\varphi_x \cdot S\varphi_z - C\varphi_x \cdot C\varphi_z \cdot S\varphi_y & C\varphi_z \cdot S\varphi_x + C\varphi_x \cdot S\varphi_y \cdot S\varphi_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} S\varphi_y \\ -C\varphi_y \cdot S\varphi_x \\ C\varphi_x \cdot C\varphi_y \end{vmatrix},$$

где

$$m_{01} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\varphi_x & -S\varphi_x \\ 0 & S\varphi_x & C\varphi_x \end{vmatrix};$$

$$m_{12} = \begin{vmatrix} C\varphi_y & 0 & S\varphi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\varphi_y & 0 & C\varphi_y \end{vmatrix};$$

$$m_{23} = \begin{vmatrix} C\varphi_z & -S\varphi_z & 0 \\ S\varphi_z & C\varphi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

(Символы  $C$  и  $S$  в матрицах означают тригонометрические функции соответственно «cosinus» и «sinus»).

Сопоставив наддиагональные элементы матрицы поворота  $m_{03}$  (первый и второй элементы третьего столбца и первый элемент второго столбца) с соответствующими элементами блочной матрицы  $3 \times 3$ , рассчитаем требуемые для обеспечения заданной ориентации схвата значения виртуальных углов поворота  $\varphi_x(t)$ ,  $\varphi_y(t)$  и  $\varphi_z(t)$  как функций углов  $x_0 \hat{z}_C(t)$ ,  $y_0 \hat{z}_C(t)$  и  $x_0 \hat{y}_C(t)$ :

$$\varphi_y(t) = \text{asin}(\cos(x_0 \hat{z}_C(t)));$$

$$\varphi_x(t) = \text{asin}\left(\frac{-\cos(y_0 \hat{z}_C(t))}{\cos\varphi_y(t)}\right);$$

$$\varphi_z(t) = \text{asin}\left(\frac{-\cos(x_0 \hat{y}_C(t))}{\cos\varphi_y(t)}\right).$$

Понятно, что при движении центра схвата  $O_C$  в соответствии с заданными законами  $x_{0C}(t)$ ;  $y_{0C}(t)$ ;  $z_{0C}(t)$  и ориентацией платформы, выраженной теперь углами  $\varphi_x(t)$ ,  $\varphi_y(t)$ ,  $\varphi_z(t)$ , положения точек центров шарниров  $B_1, \dots, B_n$  будут в разные моменты времени различными в инерциальной системе координат.

Решение обратной задачи кинематики параллельных манипуляторов заключается, по сути, в определении расстояний  $A_1 B_1, \dots, A_n B_n$  между центрами шарниров соответствующих приводных стержней в функции времени, то есть:

$$q_i(t) = A_i B_i(t) = \sqrt{[x_{Ai} - x_{Bi}^0(t)]^2 + [y_{Ai} - y_{Bi}^0(t)]^2 + [z_{Ai} - z_{Bi}^0(t)]^2}, \quad (i = 3, \dots, n) \quad (1)$$

где  $x_{Bi}^0(t)$ ,  $y_{Bi}^0(t)$ ,  $z_{Bi}^0(t)$  — координаты точки  $B_i$  в инерциальной системе координат.

Определим координаты точек  $B_1, \dots, B_i, \dots, B_n$  в инерциальной системе координат  $O_0 X_0 Y_0 Z_0$ . Для этого расположим в каждой точке  $B_i$  подвижной платформы дополнительные системы координат  $B_i X_i Y_i Z_i$  ( $i = 3, \dots, n$ ), параллельные и одинаково направленные по отношению к системе  $O_C X_C Y_C Z_C$  (рис. 1).

Переходя к однородным координатам  $x_i, y_i, z_i, 1$  точек  $B_i$  ( $i = 3, \dots, n$ ), можно произвести пересчет этих координат в систему координат  $O_0 X_0 Y_0 Z_0$  путем перемножения пяти матриц:

$$W_{0i} = W_{00} W_{01} W_{12} W_{23} W_{3i},$$

где

$$W_{0i} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x_{Bi}(t) \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & y_{Bi}(t) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & z_{Bi}(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} -$$

— результирующая матрица перехода от системы координат  $B_i X_i Y_i Z_i$  к системе координат  $O_0 X_0 Y_0 Z_0$  для точки  $B_i$  ( $i = 3, \dots, n$ );  $a_{11}, \dots, a_{33}$  — направляющие косинусы матрицы  $W_{0i}$  (при решении данной задачи не используются);

$$W_{00} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x_{0C}(t) \\ 0 & 1 & 0 & y_{0C}(t) \\ 0 & 0 & 1 & z_{0C}(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} -$$

— матрица перехода от характерной точки схвата  $O_C$  (центра схвата) к инерциальной системе координат  $O_0 X_0 Y_0 Z_0$ ;

$$W_{01} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\varphi_x(t) & -S\varphi_x(t) & 0 \\ 0 & S\varphi_x(t) & C\varphi_x(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} -$$

— матрица поворота системы  $O_C X_C Y_C Z_C$  вокруг оси  $O_C X_C$  на виртуальный угол  $\varphi_x(t)$ ;

$$W_{12} = \begin{vmatrix} C\varphi_y(t) & 0 & S\varphi_y(t) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S\varphi_y(t) & 0 & C\varphi_y(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} -$$

— матрица поворота системы  $O_C X_C Y_C Z_C$  вокруг оси  $O_C Y_C$  на виртуальный угол  $\varphi_y(t)$ ;

$$W_{23} = \begin{vmatrix} C\varphi_z(t) & -S\varphi_z(t) & 0 & 0 \\ S\varphi_z(t) & C\varphi_z(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} -$$

— матрица поворота системы  $O_C X_C Y_C Z_C$  вокруг оси  $O_C Z_C$  на виртуальный угол  $\varphi_z(t)$ ;

$$W_{3i} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x_{Bi} \\ 0 & 1 & 0 & y_{Bi} \\ 0 & 0 & 1 & z_{Bi} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} -$$

— матрица перехода от системы координат  $B_i X_i Y_i Z_i$  к системе координат  $O_C X_C Y_C Z_C$  ( $i = 3, \dots, n$ ).

Понятно, что первые три элемента четвертого столбца матрицы  $W_{0i}$  и являющиеся искомыми координатами  $x_{Bi}^0, y_{Bi}^0, z_{Bi}^0$  ( $i = 3, \dots, n$ ) центров шарниров  $B_i$  подвижной платформы в инерциальной системе координат. После определения координат центров шарниров  $B_i$  в системе  $O_0 X_0 Y_0 Z_0$  обобщенные координаты  $q_i(t)$  определяются по формуле (1).

Предложенный в данной статье метод виртуальных поворотов позволяет за счет перехода к матричному исчислению существенным образом упростить решение обратной задачи кинематики манипуляторов платформенного типа и даст возможность при разработке программного обеспечения использовать типовые алгоритмы.

## Библиографический список

1. Манипуляционные системы роботов / А. И. Корендясев [и др.] ; под общ. ред. А. И. Корендясева. — М. : Машиностроение, 1989. — 472 с.
2. Глазунов, В. А. Пространственные механизмы параллельной структуры / В. А. Глазунов, А. Ш. Колискор, А. Ф. Крайнев. — М. : Наука, 1991. — 95 с.
3. Рыбак, Л. А. Управление технологическим процессом механической обработки с использованием роботов-станков параллельной структуры : моногр. / Л. А. Рыбак, А. В. Чичварин, В. В. Ержуков. — Белгород : БГТУ, 2008. — 151 с.

4. Зенкевич, С. Л. Основы управления манипуляционными роботами / С. Л. Зенкевич, А. С. Ющенко. — М. : МГТУ им. Баумана, 2004. — 480 с.

**ХОМЧЕНКО Василий Герасимович**, доктор технических наук, профессор (Россия), заведующий кафедрой «Автоматизация и робототехника». Адрес для переписки: v\_khomchenko@mail.ru

Статья поступила в редакцию 06.03.2015 г.

© В. Г. Хомченко

УДК 62.576.1

**В. Г. ЦЫСС  
И. М. СТРОКОВ  
М. Ю. СЕРГАЕВА**

Омский государственный  
технический университет

Научно-производственное  
предприятие «Прогресс»

## АНАЛИЗ УСТАЛОСТНОГО РЕСУРСА РЕЗИНОМЕТАЛЛИЧЕСКОГО АМОРТИЗАТОРА С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОЙ МОДЕЛИ ЭКСПЛУАТАЦИИ

Целью работы является оценка меры накопления повреждений резинометаллического амортизатора с помощью пакетов конечно-элементного анализа ANSYS. Проведен анализ усталостного ресурса амортизатора, позволяющий определить суммарную меру его повреждения с учетом влияния температуры эксплуатации.

**Ключевые слова:** резинометаллический амортизатор, накопление повреждений, усталостный ресурс, температурная модель эксплуатации, напряженно-деформированное состояние.

Накопление усталостных повреждений — достаточно сложное явление, для которого существенным оказывается влияние множества разнообразных факторов: вид нагружения, конструктивные и эксплуатационные факторы. Если рассматривать влияние эксплуатационных факторов, то в первую очередь к ним стоит отнести температуру окружающей среды. В общем случае повышение температуры окружающей среды воздуха при циклическом нагружении амортизатора приводит к увеличению меры повреждения. На графике предельная кривая усталости, построенная по результатам испытаний при повышенной температуре, располагается левее основной кривой усталости. Для того небольшого интервала температур окружающего воздуха, при котором эксплуатируются резинометаллические амортизаторы, показатель степени в формуле кривой усталости  $N \cdot F^m = const$ , (где  $F$  — параметр нагружения,  $N$  — ресурс) не зависит от условий нагружения и температуры. Это означает, что в системе координат  $lgF - lgN$  кривые усталости при различных температурах — параллельные прямые.

Влияние температуры окружающей среды в наибольшей степени сказывается на свойствах элементов конструкции, выполненных из полимерных высокоэластичных материалов. Этот момент имеет особый смысл для конструкций, изготовленных из резины, поскольку, как и большинство полимеров, резина сохраняет свои эксплуатационные характеристики в достаточно узком интервале температур. Диапазоны изменения температур и их длительность задаются в виде так называемой температурной модели эксплуатации конструкции, учет влияния которой на повреждаемость и представляет основную задачу выполнения настоящей работы.

Целью работы является оценка меры повреждения резинометаллического амортизатора при заданных амплитудной и температурной моделях эксплуатации с помощью современных пакетов конечно-элементного анализа, в частности ANSYS.

Объектом исследования является резинометаллический амортизатор, состоящий из резинового блока и двух металлических пластин, привулканизованных к нему.

Таблица 1  
Амплитудная модель эксплуатации амортизатора

Блок нагружения	Амплитуда перемещения, мм	Количество циклов
1	±4,5	1,5·10 <sup>5</sup>
2	±0,03	14,5·10 <sup>6</sup>
3	±0,3	12·10 <sup>6</sup>

Таблица 2  
Температурная модель эксплуатации амортизатора

Диапазон температур T, °C	Среднее значение температуры в диапазоне T, °C	Длительность эксплуатации γ, %
-5...5	0	2
5...25	15	50
25...40	33	33
40...60	50	10
60...70	65	5

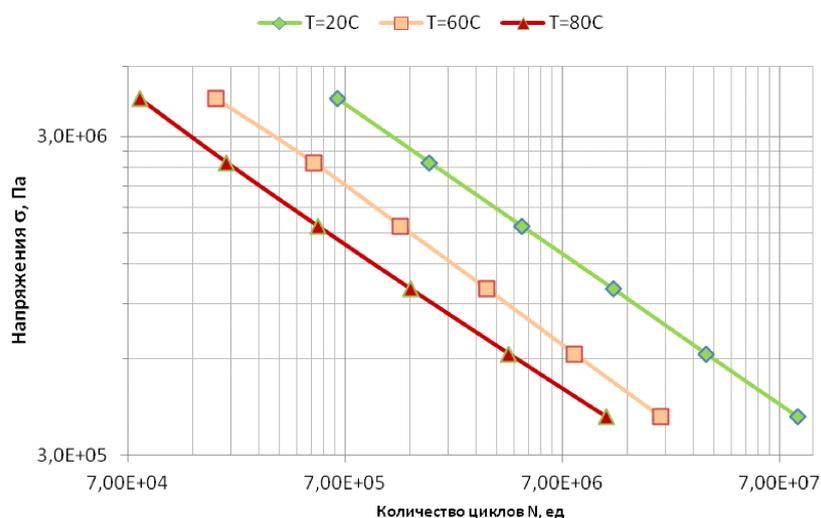


Рис. 1. Кривые усталости образцов резины амортизатора при различных температурах

Амплитудная модель эксплуатации амортизатора приведена в табл. 1.

В табл. 2 приведена температурная модель эксплуатации амортизатора.

Для решения поставленной задачи можно выделить следующие основные этапы [1]:

1. Расчетное построение графических зависимостей усталостного ресурса от температуры для заданных температурной моделью эксплуатации диапазонах.

Поскольку температурные кривые зависимости усталостного ресурса образцов резины амортизатора получены для фиксированных значений температуры окружающей среды (20, 60, 80 °C), то для каждого диапазона средних значений температур из температурной модели эксплуатации амортизатора (0, 15, 33, 50, 65 °C) построены соответствующие расчетные и графические зависимости усталостного ресурса от температуры.

2. Расчет напряженно-деформированного состояния амортизатора.

Для каждого блока нагружения, согласно модели эксплуатации (табл. 1), определяют с помощью прог-

раммного пакета ANSYS Mechanical [2] напряженное состояние амортизатора.

3. Определение опасной точки (участка) конструкции.

По результатам расчета напряженно-деформированного состояния амортизатора определяют наиболее нагруженный участок, который в последующем считаем подверженным усталостному разрушению. Расчет выполняется в программном пакете ANSYS Mechanical.

4. Расчет суммарной меры повреждения амортизатора с учетом температурной модели эксплуатации.

При помощи модуля Fatigue программного пакета ANSYS Mechanical определяем меру повреждения амортизатора согласно амплитудной модели эксплуатации (табл. 1) для средних значений температуры каждого из диапазона температур (0, 15, 33, 50, 65 °C). Повреждение, накопленное в опасной точке амортизатора при заданной в табл. 1 амплитудной модели эксплуатации, будет равно [3]:

$$D_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n D_i = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{N_i}, \quad (1)$$

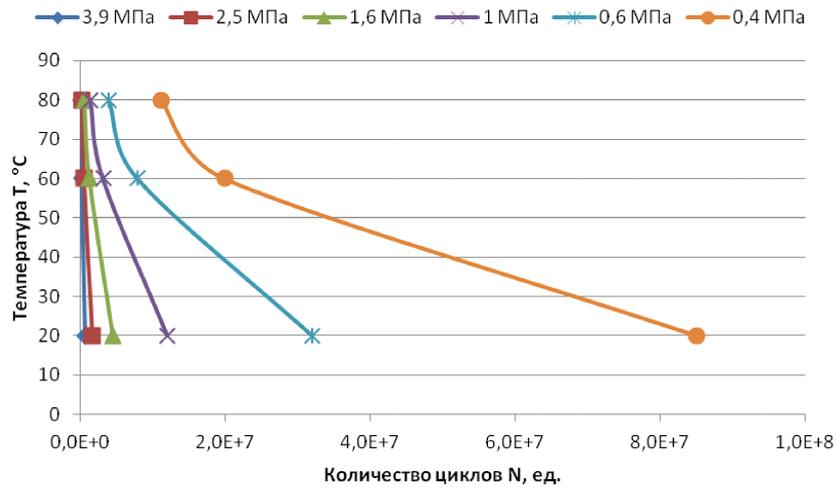


Рис. 2. Зависимость усталостного ресурса амортизатора от температуры при фиксированных значениях нагрузки

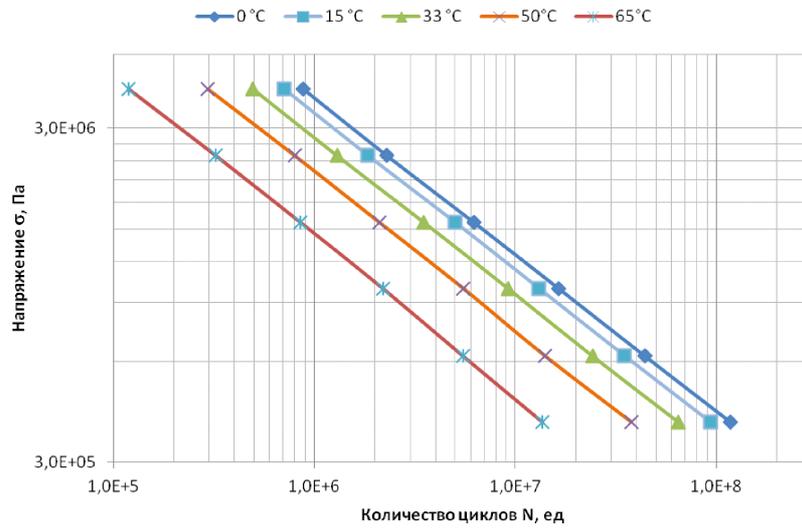


Рис. 3. Кривые усталости амортизатора с учетом температурной модели эксплуатации

Таблица 3  
Расчетные значения усталостного ресурса амортизатора с учетом температурной модели эксплуатации

$\sigma_{в}, \text{Па}$	$N(T), \text{циклов}$					
	$T, \text{°C}$	0	15	33	50	65
$3,9\text{E}+06$		$8,8\text{E}+05$	$7,0\text{E}+05$	$4,9\text{E}+05$	$2,9\text{E}+05$	$1,2\text{E}+05$
$2,5\text{E}+06$		$2,3\text{E}+06$	$1,9\text{E}+06$	$1,3\text{E}+06$	$8,0\text{E}+05$	$3,3\text{E}+05$
$1,6\text{E}+06$		$6,2\text{E}+06$	$5,0\text{E}+06$	$3,5\text{E}+06$	$2,1\text{E}+06$	$8,5\text{E}+05$
$1,0\text{E}+06$		$1,6\text{E}+07$	$1,3\text{E}+07$	$9,2\text{E}+06$	$5,5\text{E}+06$	$2,2\text{E}+06$
$6\text{E}+05$		$4,4\text{E}+07$	$3,5\text{E}+07$	$2,4\text{E}+07$	$1,4\text{E}+07$	$5,5\text{E}+06$
$4\text{E}+05$		$1,2\text{E}+08$	$9,4\text{E}+07$	$6,5\text{E}+07$	$3,8\text{E}+07$	$1,4\text{E}+07$

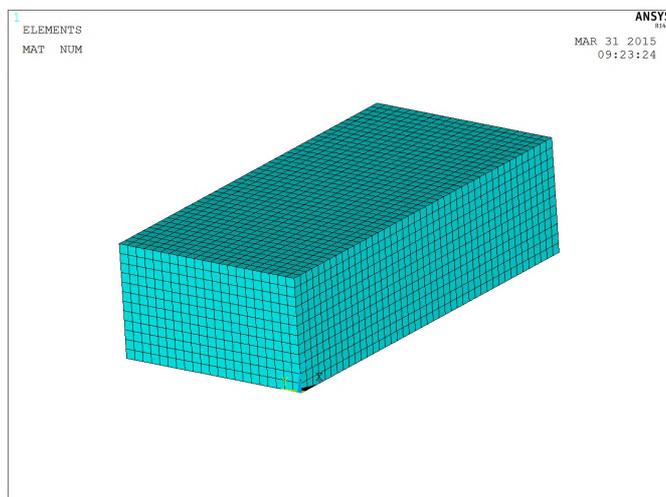


Рис. 4. Конечно-элементная модель амортизатора

Таблица 4  
Механические характеристики амортизатора АДП-2400

	Резина	Сталь Ст10
Модуль упругости $E$ , Па	$6,2 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^{11}$
Модуль сдвига $G$ , Па	$2,07 \cdot 10^6$	$6,6 \cdot 10^{10}$
Коэффициент Пуассона, $\mu$	0,49	0,32
Предел прочности $\sigma_b$ , Па	$1,4 \cdot 10^7$	$4,2 \cdot 10^7$
Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	1200	7850

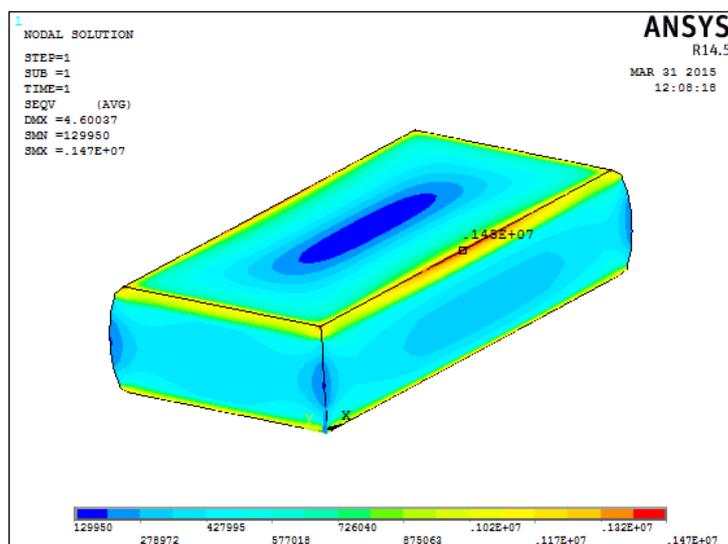


Рис. 5. Объемная эпюра напряжений по Мизесу при деформации 4,5 мм с наиболее нагруженным узлом

Таблица 5  
Напряжения по Мизесу в выбранной точке

Деформация, мм	Напряжение $\sigma$ по Мизесу, МПа
+4,5	1,6
-4,5	1,6
+0,03	0,01
-0,03	0,01
+0,3	0,10
-0,3	0,10

где  $D_{\Sigma}$  — суммарная мера повреждения амортизатора;

$k_i$  — число повторений нагружения амортизатора;  
 $N_{ij}$  — число циклов до разрушения (ресурс) амортизатора.

Учитывая температурную модель эксплуатации суммарная мера повреждения будет равна

$$D_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \frac{k_i}{N_{ij}} \gamma_i, \quad (2)$$

где  $i$  — соответствует номеру температурного интервала;

$j$  — соответствует режиму эксплуатации;

$\gamma_i$  — относительная продолжительность эксплуатации в  $i$ -м температурном интервале.

Моменту повреждения (разрушения) резино-металлического амортизатора будет соответствовать значение суммарной меры повреждения  $D_{\Sigma}$ .

По результатам испытаний образцов резины амортизатора на усталостную прочность при различных температурах были построены кривые усталости, изображенные на рис. 1.

Для анализа зависимости усталостного ресурса амортизатора от температуры при фиксированных значениях нагрузки построены соответствующие кривые (рис. 2).

Из рис. 2 видно, что зависимость усталостного ресурса амортизатора от температуры является нелинейной. Поскольку температурные интервалы эксплуатации амортизатора (табл. 2) находятся вблизи линейных значений температур (20...60 °C), то примем зависимость линейной вида:

$$N(T) = a + b \cdot T,$$

где  $T$  — температура окружающей среды;  $a$ ,  $b$  — коэффициенты (находятся эмпирически).

В табл. 3 приведены расчетные значения усталостного ресурса амортизатора для средних значений температур температурной модели эксплуатации.

На рис. 3 приведены кривые усталости амортизатора с учетом температурной модели эксплуатации.

Следующим шагом в соответствии с методикой, приведенной выше, является расчет напряженно-деформированного состояния амортизатора.

С этой целью создана конечно-элементная модель (рис. 4), которая интерполирована 6480-ю гексагональными 4-узловыми элементами [4].

Механические характеристики материалов амортизатора были приняты согласно табл. 4.

Проведены расчеты напряженно-деформированного состояния амортизатора для шести значений деформаций из табл. 1 и все шесть результатов были записаны в один расчетный файл. В качестве наиболее нагруженной точки выбран узел № 2819.

На рис. 5 изображена объемная эпюра напряжений по Мизесу при деформации сжатия, равной 4,5 мм, и выделен наиболее нагруженный узел № 2819.

В табл. 5 приведены напряжения по Мизесу в выбранной точке при деформациях из табл. 1.

Далее, в соответствии с приведенной методикой, производится расчет меры повреждения конструкции по приведенным нагрузкам при средних значениях температур (табл. 2). Результаты расчетов приведены в табл. 6.

Таблица 6  
 Расчет меры повреждения амортизатора для средних значений интервала температур

Температура $T$ , °C	Повреждение $D_i$
0	0,25627
15	0,32214
33	0,46444
50	0,79581
65	2,15822

Умножив полученные значения повреждения  $D_i$  на коэффициент длительности эксплуатации  $\gamma_i$  из табл. 2 и суммировав их по формуле (2), получим суммарную меру повреждения амортизатора с учетом температурной модели эксплуатации:

$$D_{\Sigma} = 0,25627 \cdot 0,2 + 0,32214 \cdot 0,5 + 0,46444 \cdot 0,33 + 0,79581 \cdot 0,1 + 2,15822 \cdot 0,05 = 0,50695.$$

Полученное в результате расчетов значение суммарной меры повреждения не превышает единицы, что позволяет сделать вывод об обеспечении усталостного ресурса исследуемого резино-металлического амортизатора при заданных амплитудной и температурной моделях эксплуатации.

Таким образом, проведенный в работе анализ усталостного ресурса резино-металлического амортизатора позволяет определить суммарную меру повреждения с учетом влияния температурной модели его эксплуатации.

#### Библиографический список

1. Берендеев, Н. Н. Применение системы ANSYS к оценке усталостной долговечности : учеб.-метод. материалы / Н. Н. Берендеев. — Н. Новгород, 2006. — 84 с.
2. Кравчук, А. С. Электронная библиотека механики и физики. Лекции по ANSYS с примерами решения задач в пяти частях / А. С. Кравчук, А. Ф. Смалюк, А. И. Кравчук. — Минск : БГУ, 2013. — 193 с.
3. Когаев, В. П. Расчеты на прочность при напряжениях переменных во времени / В. П. Когаев. — М. : Машиностроение, 1993. — 364 с.
4. Каплун, А. Б. ANSYS в руках инженера. Практическое руководство / А. Б. Каплун, Е. М. Морозов, М. А. Олферьева. — М. : Кн. дом ЛИБРОКОМ, 2007. — 272 с.

**ЦЫСС Валерий Георгиевич**, доктор технических наук, профессор (Россия), профессор кафедры нефтегазового дела Омского государственного технического университета (ОмГТУ).

**СТРОКОВ Игорь Михайлович**, инженер-конструктор лаборатории расчета резинокордных изделий научно-производственного предприятия «Прогресс».  
**СЕРГАЕВА Марина Юрьевна**, кандидат технических наук, доцент кафедры нефтегазового дела ОмГТУ.  
 Адрес для переписки: mjsergaewa@mail.ru.

Статья поступила в редакцию 20.03.15 г.

© В. Г. Цысс, И. М. Строков, М. Ю. Сергаева

## КИНЕМАТИКА ЧЕТЫРЕХЗВЕННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПОЛЗУННЫХ МЕХАНИЗМОВ

В статье рассмотрены четырехзвенные пространственные механизмы, которые оказываются более предпочтительными благодаря компактной схеме и возможности передачи движения между осями, произвольно расположенными в пространстве. Решение прямой задачи кинематики на основе известных принципов аналитической алгебры, геометрии и тригонометрии позволили оценить кинематические характеристики рассматриваемых конструкций. Моделирование работы механизмов доказало адекватность предложенных методов и позволило сформировать рекомендации по выбору свободных параметров синтеза для исключения «мертвых» положений.

**Ключевые слова:** пространственные механизмы, четырехзвенные механизмы, кинематика, моделирование.

**Введение.** В различных отраслях промышленности широко распространены исполнительные механизмы цикловых машин-автоматов, преобразующие вращательное движение в поступательное, например, в кривошипных прессах и двигателях, в сельскохозяйственных и швейных машинах и т.д. Наиболее простым схемным решением задачи являются плоские кривошипно-ползунные механизмы, которые к настоящему моменту хорошо изучены и описаны во многих научных источниках [1, 2]. Пространственные кривошипно-ползунные механизмы по сравнению с плоскими позволяют при меньшем числе звеньев осуществлять передачу движения в различных плоскостях и, в конечном итоге, обеспечивают более рациональную компоновку машины.

В настоящий момент известно множество конструкций пространственных четырехзвенных механизмов [1–3, 5]. Например, предложенный профессором Н. И. Левитским [1] пространственный стержневой механизм, использующий две кинематические пары 5-го класса (согласно классификации И. И. Артоболевского [2]) между входным и выходным звеном и стойкой соответственно, и две пары третьего и четвертого класса — сферическую и сферическую с пальцем соответственно. Сложность реализации последней (сферической с пальцем) кинематической пары затрудняет использование такой схемы механизма.

Профессором Л. Т. Дворниковым и А. А. Обрядиным запатентована схема пространственного четырехзвенного механизма [3], ведущее звено которой соединено при помощи упругого элемента со стойкой через сферический поршень, помещенный в гидро- или пневмоцилиндр. Как отмечают авторы, достоинством конструкции по сравнению с другими механизмами является использование только кинематических пар пятого класса.

Несмотря на существующее в инженерной практике многообразие четырехзвенных пространственных механизмов наиболее рациональными, с точки зрения простоты реализации и обеспечения точности позиционирования выходного звена, являются схемы, показанные на рис. 1а и б, которые отличаются классом используемых кинематических пар.

Механизм, показанный на рис. 1а, состоит из звеньев, соединенных кинематическими парами пятого класса, согласно классификации И. И. Артоболевского [2], и позволяет передавать движение в перпендикулярных плоскостях. Использование пар третьего и четвертого класса (сферической и сферической с пальцем) в рассматриваемой кинематической цепи (рис. 1б) обеспечивает перемещение ползуна вдоль прямой, произвольно расположенной в пространстве, однозначно задаваемой углами Эйлера и параллельным переносом осей координат.

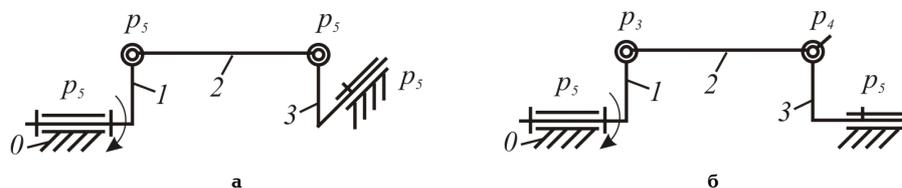


Рис. 1. Структурные схемы четырехзвенных пространственных механизмов

**Кинематическое исследование пространственных рычажных механизмов.** Существующее положение в области кинематического исследования пространственных рычажных механизмов характеризуется наличием большого числа различных методов [6–9], основанных на применении того или иного математического аппарата для установления функциональной зависимости параметров движения звеньев или их отдельных точек от заданных переменных и постоянных параметров синтеза механизма.

В работе [6] автором предложен аналитический метод исследования пространственных механизмов, составленных из вращательных и цилиндрических кинематических пар, основанный на использовании приемов аналитической и кинематической геометрии в трехмерном пространстве. Современная теория механизмов всё в большей степени при решении задач анализа пространственных механизмов обращается к аппарату теории винтов и винтового исчисления, родоначальником которой является Р. Болл [10]. Первым применил теорию винтов в теории механизмов Ф. М. Диментберг [11], а позднее А. П. Котельников [12] опубликовал ряд работ, посвященных этой тематике. Актуальность применения теории винтов растет с переходом от одноконтурных механизмов с одной степенью свободы к открытым кинематическим цепям манипуляторов и к многоконтурным пространственным манипуляционным механизмам параллельной структуры [13].

Таким образом, многие из известных методов базируются на сложном и весьма специфическом математическом аппарате. Между тем сложность метода анализа не обязательно свидетельствует о его эффективности. Напротив, часто более быстрыми и эффективными оказываются алгоритмы, составленные на базе сравнительно простых методов, например, на аналитической геометрии.

**Кинематический анализ пространственных четырехзвенных механизмов, направляющая ось выходного звена которых лежит в плоскости  $xOz$ .** На рис. 2 представлена кинематическая схема пространственного кривошипно-ползунного механизма, геометрические размеры звеньев  $l_1$ ,  $l_2$  и  $l_3$ , а также угол наклона  $\beta$  направляющей выходного ползуна 3 назначаются в соответствии с техническими требованиями.

Поворот кривошипа 1 вокруг оси  $Ox$  на угол  $\varphi$  (рис. 2а) переводит центр шарнира  $A$  в точку  $A_i$  и вызывает перемещение на расстояние  $S$  шарнира  $B$ , причем траектория движения последнего параллельна направляющей ползуна  $D$ .

Для расчета расстояния между центром шарнира  $O$  и плечом выходного звена  $D$  в плоскости  $xOz$

изображена проекция механизма (рис. 2б) в начальный момент времени, соответствующий нулевому значению угла  $\varphi$ . Фигура представляет собой наклонную трапецию с параллельными сторонами  $OA$  и  $BD$ . Достроим рисунок до параллелограмма, для этого из точки  $B$  проведем прямую, параллельную стороне  $OD$ . Изображенный на рис. 2б угол  $\alpha$  вычислим, используя известные соотношения углов при параллельных прямых и теорему синусов:

$$\alpha = \begin{cases} \arcsin\left(\left(\frac{l_1 - l_3}{l_2}\right)\cos(\beta)\right), & \text{если } l_1 \geq l_3; \\ \arcsin\left(\left(\frac{l_3 - l_1}{l_2}\right)\cos(\beta)\right) - \beta, & \text{если } l_1 < l_3. \end{cases} \quad (1)$$

Расстояние  $l_{OD}$  зависит от соотношения кинематических параметров  $l_1$  и  $l_3$  и определяется с учетом формулы (1) из соотношения:

$$l_{OD} = \begin{cases} l_2 \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\beta)}, & \text{если } l_1 \leq l_3; \\ l_2 \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)}, & \text{если } l_1 > l_3. \end{cases} \quad (2)$$

По теореме косинусов длину стороны  $B'A_i$  треугольника  $\Delta OB'A_i$  вычислим следующим образом:

$$(B'A_i)^2 = l_1^2 + l_3^2 - 2l_1l_3 \cdot \cos(\varphi). \quad (3)$$

Аналитическую зависимость между входной и выходной координатой получим в явном виде из теоремы Пифагора, записанной для прямоугольного треугольника  $\Delta B'A_iB_i$  используя выражения (2) и (3):

$$l_2^2 = l_1^2 + l_3^2 - 2l_1l_3 \cos(\varphi) + (l_{OD} - S)^2. \quad (4)$$

В результате алгебраических преобразований функция положения четырехзвенного пространственного кривошипно-ползунного механизма, выходной ползун которого перемещается в плоскости  $xOz$ , примет вид:

$$S = l_{OD} - \sqrt{l_2^2 - l_1^2 - l_3^2 + 2l_1l_3 \cos(\varphi)}. \quad (5)$$

Дифференцируя по времени уравнение (5), получим скорость и ускорение изменения положения выходного ползуна исследуемого четырехзвенного механизма:

$$S' = \frac{l_1 l_3 \sin(\varphi) \cdot \dot{\varphi}}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2 - l_3^2 + 2l_1 l_3 \cos(\varphi)}}, \quad (6)$$

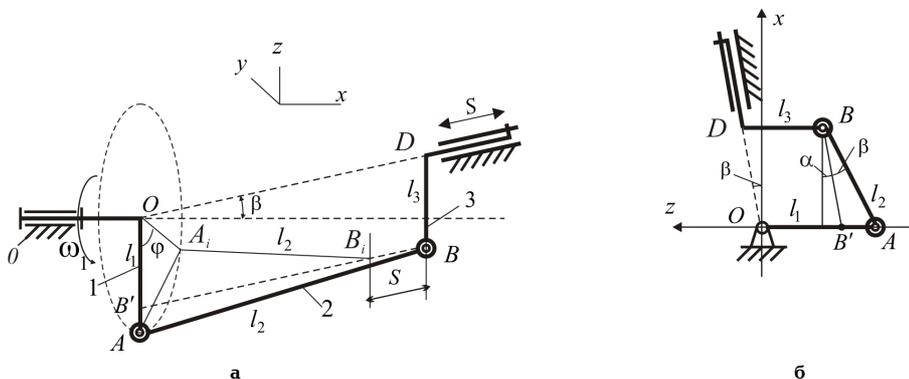


Рис. 2. Кинематическая схема пространственного четырехзвенного механизма, выходное звено которого перемещается в плоскости  $xOz$

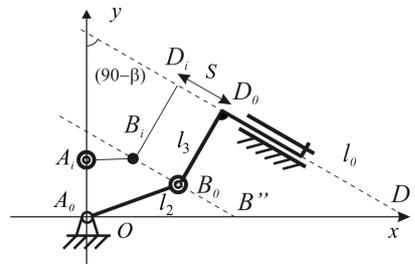
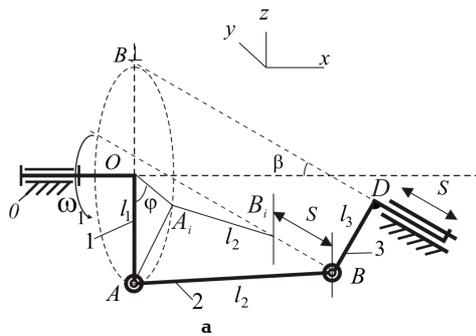


Рис. 3. Кинематическая схема пространственного четырехзвенного механизма, выходное звено которого перемещается в плоскости  $xOy$

$$S'' = \frac{l_1 l_3 \left[ (\cos(\varphi) \cdot (\varphi')^2 + \sin(\varphi) \cdot \varphi'' ) \times \right. \\ \left. (l_2^2 - l_1^2 - l_3^2 + 2l_1 l_3 \cos(\varphi))^{1,5} \rightarrow \right. \\ \left. \times (l_2^2 - l_1^2 - l_3^2 + 2l_1 l_3 \cos(\varphi)) + l_1 l_3 \sin^2(\varphi) \cdot (\varphi')^2 \right] \quad (7)$$

**Кинематический анализ пространственных четырехзвенных механизмов, направляющая ось выходного звена которых лежит в плоскости  $xOy$ .** Рассматриваемая конструкция четырехзвенного механизма (рис. 3а) может существовать в следующих модификациях: параметр  $j = \pm 1$  определяет положение направляющей выходного звена 3 относительно оси  $Oy$ , значение параметра  $i = \pm 1$  задает положение под прямым углом шарнира  $B$  выше или ниже прямой, по которой перемещается ползун 3. Дополнительно вводятся угол наклона  $\beta$  и расстояние  $l_0$ , как показано на рис. 3б. Геометрические параметры  $l_1, l_2$  и  $l_3$  а также модификация кинематической цепи  $OABD$ , показанной на рис. 3, на этапе кинематического анализа известны.

Зависимость выходной обобщенной координаты (перемещение ползуна 3) от входной (угол поворота кривошипа 1) получим, записав площадь треугольника  $\Delta A_0 A_i B_i$ :

$$\sqrt{p(p - B_0 B_i)(p - A_0 B_0)(p - A_0 B_i)} = 0,5 \cdot h \cdot B_0 B_i \quad (8)$$

где для расчета длины хорды  $A_0 A_i$ , используя теорему синусов в треугольнике  $\Delta A_0 O A_i$ :

$$A_0 A_i = 2l_1 \sin(0,5\varphi) \quad (9)$$

Расстояние  $A_0 B_i$  вычислим из прямоугольного треугольника  $\Delta A_0 A_i B_i$  по теореме Пифагора с учетом формулы (9) как:

$$A_0 B_i^2 = l_2^2 - 4l_1^2 \sin^2(0,5\varphi) \quad (10)$$

Траектории движения звена 3 и шарнира  $B$  запишем в виде уравнений прямых, для которых известен градиент и смещение по оси  $Ox$ :

$$y_D = tg(\beta) \cdot x_D + j \cdot l_0; \\ y_B = tg(\beta) \cdot x_B + j \cdot l_0 + i \cdot l_3 \cdot \sin^{-1}(\beta) \quad (11)$$

Далее найдем расстояние от точки  $A_0(0; 0; -l_1 \cos(\varphi))$  до прямой  $B$  (11), упростив выражение, используя известные тригонометрические соотношения:

$$h = \cos(\beta) \cdot |j \cdot l_0 + i \cdot l_3 \cdot \sin^{-1}(\beta)| \quad (12)$$

Подставив рассчитанные по формулам (9–12) значения параметров и выполнив соответствующие математические преобразования, получим уравнение четвертой степени относительно неизвестного перемещения выходного ползуна:

$$S^4 + 2S^2(h^2 - 2 - l_2^2) + (l_2^2 - A_0 B_i^2)^2 = 0 \quad (13)$$

Дифференцируя выражение (13) по времени, которое как параметр неявным образом входит в входную, и во выходную обобщенную координату, запишем законы изменения скорости и ускорения движения выходного ползуна механизма:

$$S' = \frac{l_1^2 \sin(\varphi) (4l_1^2 \sin^2(0,5\varphi) - l_2^2) \cdot \varphi'}{S^3 + S(h^2 - 2 - l_2^2)}; \\ S'' = \frac{l_1^2 \cdot [(\varphi')^2 \cdot (4l_1^2 \sin^3(\varphi) - \cos(\varphi) A_0 B_i^2) - \\ [S^3 + S(h^2 - 2 - l_2^2)]^2 \\ \rightarrow -\varphi'' \sin(\varphi) A_0 B_i^2] \cdot S [S^2 + (h^2 - 2 - l_2^2)] + \\ + \frac{l_1^2 \sin(\varphi) A_0 B_i^2 \cdot \varphi' \cdot S [3S^2 + (h^2 - 2 - l_2^2)]}{[S^3 + S(h^2 - 2 - l_2^2)]^2}$$

**Кинематический анализ пространственных четырехзвенных механизмов, направляющая ось выходного звена произвольно направлена в пространстве  $Oxyz$ .** Траектория перемещения выходного звена в общем случае задается углами  $\beta, \alpha$  и  $\gamma$  поворота относительно осей абсцисс, ординат и аппликата соответственно, а также относительным перемещением  $\lambda, \mu, \nu$  по данным осям. Кинематическая схема механизма (рис. 4) для реализации такого движения требует замены кинематических пар пятого класса в сочленениях  $A$  и  $B$  на более высокий класс, допускающий вращение в нескольких плоскостях.

Подвижность и статическую определимость предлагаемой конструкции оценим по формуле Сомова – Мальшева [2]:

$$w = 6n - 3p_3 - 4p_4 - 5p_5 = 6 \cdot 3 - 3 \cdot 1 - 4 \cdot 1 - 5 \cdot 2 = 1.$$

Поскольку количество степеней свободы рассматриваемого механизма равно единице, то при заданном движении входного кривошипа все остальные звенья будут иметь вполне определенные движения и при соответствующих значениях параметров кинематической цепи пространственный четырехзвенный механизм будет работоспособным.

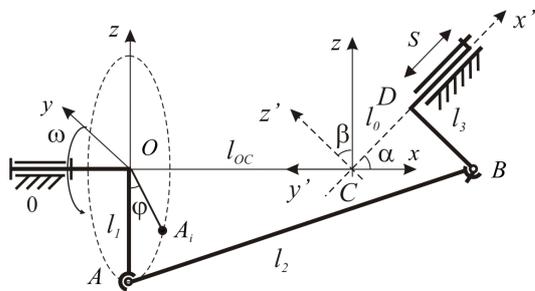


Рис. 4. Кинематическая схема пространственного четырехзвенного механизма, выходное звено которого перемещается вдоль прямой произвольно расположенной в пространстве  $Oxyz$

Для решения прямой задачи кинематики рассматриваемого механизма вводится относительная система координат  $Dx'y'z'$ , положение которой однозначно определяется углами  $\beta$ ,  $\alpha$  и  $\gamma$  и линейными перемещениями  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ . Не нарушая общности рассуждений предположим, что согласно техническим условиям заданы не нулевые значения параметров  $\beta$ ,  $\alpha$  и  $l=l_{OC}$ , как показано на рис. 4. Матрица перехода (преобразования координат) в силу принятых допущений примет вид:

$$A = R_y \cdot R_x \cdot T, \quad (14)$$

$$\text{где } R_y = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 \\ 0 & -\sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l_{OC} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Как было сказано выше, кинематические параметры  $l_1$ ,  $l_2$  и  $l_3$  цепи  $OABD$  рассчитываются на этапе кинематического синтеза в соответствии с заданной функцией положения или иными требованиями. В системе  $Dx'y'z'$  однородные координаты точек  $D$  и  $B$  определяются следующим образом:

$$D_{omn} = [l_0 + S; 0; 0; 1], \quad B_{omn} = [l_0 + S; 0; -l_3; 1].$$

С учетом выражения (14) положение плеча  $BD$  выходного ползуна в абсолютных координатах вычислим как:

$$D_{abc} = D_{omn} \cdot A \quad \text{и} \quad B_{abc} = B_{omn} \cdot A. \quad (15)$$

Текущие координаты точки  $A$  в пространстве  $Oxyz$ , соответствующие некоторому промежуточному положению входного звена, задаваемому углом  $\varphi$  поворота кривошипа в плоскости  $Oyz$ , равны:

$$A_{abc} = [0; l_1 \sin(\varphi); -l_1 \cos(\varphi); 1]. \quad (16)$$

Исходя из известной геометрии шатуна  $AB$  и формулы для расчета евклидова расстояния между точками, сформируем уравнение:

$$l_2 = \|A_{abc} - B_{abc}\|_e.$$

Для пространственного случая невозможно выразить в явном виде зависимость между входной (углом  $\varphi$  поворота кривошипа  $OA$ ) и выходной (пере-

мещением  $S$  ползуна  $D$ ) координатой четырехзвенного механизма и прямая задача кинематического анализа может быть решена численно, например, методом Зейделя или Ньютона-Рафсона [14].

**Численный эксперимент.** Численное решение прямой задачи кинематического анализа и моделирование работы пространственных четырехзвенных механизмов (рис. 2–3) выполнено в математическом пакете Model Vision Studium (MVS). Программное приложение представляет собой интегрированную графическую оболочку для быстрого создания интерактивных визуальных моделей сложных динамических систем и проведения вычислительных экспериментов с ними.

На этапе моделирования в качестве закона движения входного кривошипа 1 пространственных кривошипно-ползунных механизмов принято равномерное вращение с постоянной угловой скоростью  $\omega_1$  при условии обеспечения стабилизации оборотов выходного вала электродвигателя:

$$\varphi = \omega_1 \cdot t.$$

Кинематические параметры назначались произвольно, поскольку алгоритм синтеза в статье не разрабатывался. Для обеспечения единообразия результатов численных экспериментов приняты одинаковые значения геометрических параметров, а именно  $l_0 = 15$  мм,  $l_1 = 10$  мм,  $l_2 = 23$  мм, а  $l_3 = 12$  мм. Угол  $\beta$  равен  $10^\circ$  для первого случая и  $30^\circ$  — для второго. В работе моделировалась модификация пространственного механизма (см. рис. 3), задаваемая параметрами  $i = -1$  и  $j = +1$ .

На рис. 5 представлен фрагмент системы уравнений, содержащий не только аналитические зависимости для вычисления кинематических характеристик движения механизмов, но и выражения для расчета положений отдельных их точек в терминах пакета. Программа либо автоматически подбирает численный метод в соответствии с видом модели, либо позволяет пользователю выбрать наиболее подходящий вариант из числа имеющихся методов, а также регулировать точность вычислений.

Результаты решения прямой задачи кинематики для исследуемых вариантов механизмов показаны на рис. 6. Изменение функции положения в зависимости от угла поворота входного кривошипа 1 исследуемых механизмов представлены в виде фазовых диаграмм (рис. 6а, б). Гладкая форма графиков, т.е. плавное изменение исследуемых кинематических характеристик, свидетельствуют об отсутствии мертвых положений в работе пространственных механизмов, при которых наблюдается неограниченный рост усилий при передаче движения, а также критическое значение угла давления в шарнире  $B$ .

В результате анализа данных численных экспериментов установлено, что для назначенных кинематических размеров звеньев пространственных четырехзвенных кривошипно-ползунных механизмов максимальное значение перемещение выходного звена для первых двух вариантов составляет 11,6 мм и 13,4 мм соответственно.

Анимация работы синтезированных пространственных кривошипно-ползунных механизмов (рис. 7) реализована из стандартных компонентов 3D-модели пакета Model Vision Studium. В результате моделирования работы пространственных четырехзвенных механизмов установлено, что при определенном сочетании параметров могут наблюдаться «мертвые» положения. Так, при  $\varphi = 180^\circ$  критичным, с точки зрения обеспечения работоспособности,

```

XA = 0;
YA = L1*sin(FI);
ZA = -L1*cos(FI);
L2**2 = (XB-XA)**2+(YB-YA)**2+(ZB-ZA)**2;
YB = tg(BETTA)*XB+J*L0+L3/sin(BETTA);
ZB = 0;
XD = XB+L3*sin(BETTA);
YD = tg(BETTA)*XD+J*L0;
ZD = 0;

```

```

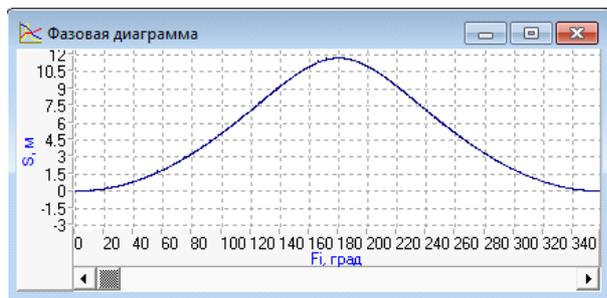
XA = 0;
YA = L1*sin(FI);
ZA = -L1*cos(FI);
XD_2 = (if S2<0 then (S2_1+abs(S2))*cos(BETTA) else (S2_1-S2)*cos(BETTA));
ZD_2 = tg(BETTA)*XD_2;
YD = 0;
ZB_2 = ZD_2-L3_2;
XB_2 = XD_2;
YB = 0;

```

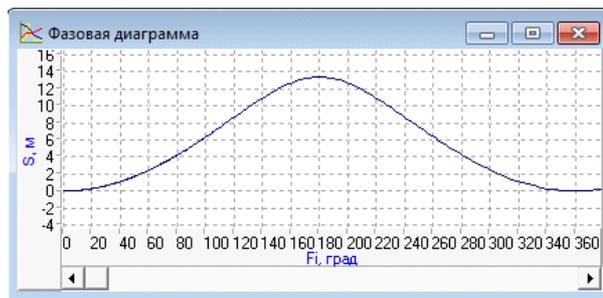
а

б

Рис. 5. Фрагмент программы для исследования кинематики пространственных кривошипно-ползунных механизмов

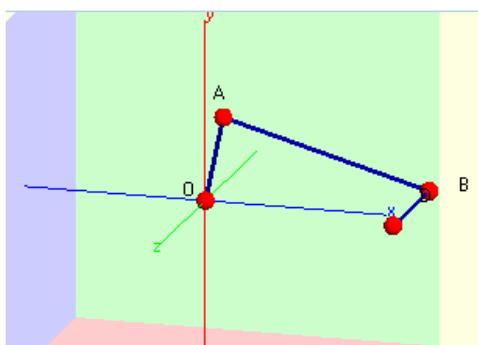


а

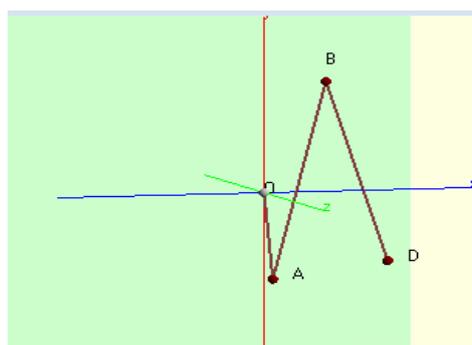


б

Рис. 6. Фазовые диаграммы функции положения пространственных четырехзвенных механизмов



а



б

Рис. 7. 3D-модель пространственных четырехзвенных кривошипно-ползунных механизмов

является соотношение размеров входного кривошипа  $OA$  и шатуна  $AB$ . Если для назначенных размеров выполняется следующее равенство:

$$l_2 = 2 \cdot l_1,$$

то в процессе работы звенья 1 и 2 накладываются друг на друга и возможен самопроизвольный переход из одной модификации в другую.

**Заключение.** Пространственные четырехзвенные кривошипно-ползунные механизмы при меньшем числе звеньев по сравнению с плоскими механизмами обеспечивают передачу движения в осях, произвольно расположенных в пространстве и имеют более рациональную компоновку, что позволяет создавать на их основе меньшие по габаритам машины.

В статье выделены структурные согласования схем кривошипно-ползунных механизмов отличающиеся плоскостью движения выходного ползуна. В первом варианте — вращение входного звена в плоскости  $yOz$  преобразуется в поступательное движение звена в плоскости  $xOz$ , во втором —  $xOy$ , и в третьем за счет изменения класса кинематических пар  $A$  и  $B$  — произвольно в пространстве

Охуз. На основе известных принципов аналитической алгебры, геометрии и тригонометрии для двух первых вариантов получены в аналитической форме зависимости для функции перемещения, а также в результате дифференцирования первая и вторая передаточные функции. В последнем случае сформирована система уравнений прямой задачи кинематики, которая решается известными численными методами.

Выполненные численные эксперименты в математическом пакете Model Vision Studium (MVS) позволили построить фазовые диаграммы функций положения, скорости и ускорения выходного кривошипа и доказать адекватность предложенных методов и сформировать рекомендации по выбору свободных параметров синтеза механизмов, гарантирующие отсутствие «мертвых» положений. В продолжение работы планируется аналитически решить задачу анализа конфигурационного многообразия пространственных четырехзвенных механизмов.

Результаты исследования могут быть использованы при проектировании безмуфтовых прессов, которые по сравнению с традиционными более компактны, надежны и высокопроизводительны, по-

сколькo управляющие устройства работают только в момент переключения, в рабочем режиме они отключаются и не участвуют в технологическом процессе штамповки изделия.

#### Библиографический список

1. Левитский, Н. И. Теория механизмов и машин / Н. И. Левитский. — М. : Наука, 1979. — 269 с.
2. Артоболевский, И. И. Теория механизмов / И. И. Артоболевский. — М. : Наука, 1988. — 640 с.
3. Пат. 2446331 С1 РФ, МПК F16H 21/00. Пространственный шарнирный четырехзвенник / Л. Т. Дворников, А. А. Обрядин ; заявитель и патентообладатель ГОУ ВПО Сибирский государственный индустриальный университет, г. Новокузнецк. — № 201045407/11 ; заявл. 08.11.2010 ; опубл. 27.03.2012, Бюл. № 9. — 5 с.
4. Пат. 2309051 С1 РФ, МПК В 43 L 11/00. Механизм для воспроизведения пространственных кривых / Л. Т. Дворников, А. С. Фомин ; заявитель и патентообладатель ГОУ ВПО Сибирский государственный индустриальный университет, г. Новокузнецк. — № 2005141747/06 ; 30.12.2005 ; опубл. 27.10.2007, Бюл. № 30. — 4 с.
5. Гебель, Е. С. Синтез четырехзвенных рычажных механизмов на основе метода оптимизации / Е. С. Гебель, А. А. Джомартов, Б. К. Синчев // Омский научный вестник. Сер. Приборы, машины и технологии. — 2011. — № 2 (100). — С. 58–60.
6. Романцев, А. А. К определению положений звеньев пространственных механизмов [Электронный ресурс] / А. А. Романцев // Теория механизмов и машин, 2008. — Т. 6, № 2. — С. 48–59. — Режим доступа : <http://tmm.spbstu.ru/> (дата обращения: 26.02.2015).
7. Галиуллин, Ш. Р. О структуре и кинематике пространственного пятизвенного механизма с вращательными парами [Электронный ресурс] / Ш. Р. Галиуллин, Р. Ш. Марданов // Теория механизмов и машин. — 2011. — № 2 (9). — С. 30–37. — Режим доступа : <http://tmm.spbstu.ru/> (дата обращения: 26.02.2015).
8. Fisher, I. S. Numerical analysis of displacement in special mechanism with ball joints / Mech. and Mach. Theory, 2000. — № 35 (11). — P. 1623–1640.
9. Zhao, X. H. A successive approximation algorithm for the direct position analysis of parallel manipulators / X. H. Zhao, Sh. X. Peng // Mech. and Mach. Theory, 2000. — № 35 (8). — P. 1095–1101.
10. Ball, R. S. A Treatise on the Theory of Screws / R. S. Ball. — Cambridge: Cambridge University Press, 1900. — 544 p.
11. Диментберг, Ф. М. Теория винтов и ее приложения / Ф. М. Диментберг. — М. : Наука, 1978. — 327 с.
12. Котельников, А. П. Винтовое счисление и некоторые приложения его к геометрии и механике / А. П. Котельников. — Казань, 1895. — 216 с.
13. Глазунов, В. А. Применение винтового исчисления в современной теории механизмов / В. А. Глазунов, С. Д. Костерева, П. О. Данилин, А. Б. Ласточкин // Вестник научнотехнического развития. — 2010. — № 6 (34). — С. 12–17.
14. Корн, Г. А. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. А. Корн, Т. М. Корн. — 6-е изд., стер. — М. : Лань, 2003. — 832 с.

**ГЕБЕЛЬ Елена Сергеевна**, кандидат технических наук, доцент кафедры автоматизации и робототехники Омского государственного технического университета (ОмГТУ).

Адрес для переписки: [Gebel\\_es@mail.ru](mailto:Gebel_es@mail.ru)

**АБДИРАИМОВ Абдусамат Акматович**, кандидат технических наук, доцент кафедры метрологии и стандартизации Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова.

Адрес для переписки: [abdiraimov@mail.ru](mailto:abdiraimov@mail.ru)

**СОЛОНИН Евгений Владимирович**, кандидат педагогических наук, доцент кафедры автоматизации и робототехники ОмГТУ.

Адрес для переписки: [Solonin\\_ev@mail.ru](mailto:Solonin_ev@mail.ru)

Статья поступила в редакцию 16.03.2015 г.

© Е. С. Гебель, А. А. Абдираимов, Е. В. Солонин

## Книжная полка

**Маркечко, И. В. Проектирование штампов листовой штамповки с использованием программного продукта «Компас-Штамп» [Электронный ресурс] : учеб. электрон. изд. локального распространения : учеб. пособие для студентов вузов по направлению 150200 «Машиностроительные технологии и оборудование», специальности 150201 «Машины и технология обработки металлов давлением». В 2 ч. Ч. 1 / И. В. Маркечко, М. В. Медведев, В. Г. Штеле. — Электрон. текстовые дан. (54,2 Мб). — Омск : ОмГТУ, 2014. — 1 эл. опт. диск (CD-ROM).**

В первой части пособия описаны методика и пример проектирования разделительного штампа с использованием программного продукта «Компас-Штамп». Предназначено для студентов специальности «Оборудование и технология обработки металлов давлением» и специалистов обработки металлов давлением.

**Маркечко, И. В. Проектирование штампов листовой штамповки с использованием программного продукта «Компас-Штамп» [Электронный ресурс] : учеб. электрон. изд. локального распространения : учеб. пособие для студентов вузов по направлению 150200 «Машиностроительные технологии и оборудование», специальности 150201 «Машины и технология обработки металлов давлением». В 2 ч. Ч. 2 / И. В. Маркечко, М. В. Медведев, В. Г. Штеле. — Электрон. текстовые дан. (54,2 Мб). — Омск : ОмГТУ, 2014. — 1 эл. опт. диск (CD-ROM).**

Во второй части пособия описаны методики и примеры проектирования разделительного штампа совмещенного действия, а также дан пример формирования чертежа пуансона с использованием программного продукта «Компас-Штамп». Предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 150200 «Машиностроительные технологии и оборудование», специальности 150201 «Машины и технология обработки металлов давлением».

## ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ ТОЛСТОСТЕННЫХ ТРУБНЫХ ОБРАЗЦОВ, ОБЖАТЫХ КОНИЧЕСКИМИ МАТРИЦАМИ ПРИ ОТСУТСТВИИ РАДИАЛЬНОЙ ДЕФОРМАЦИИ ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ НЕОБЖИМАЕМОЙ ЧАСТИ ЗАГОТОВКИ

В статье приведены результаты изучения формоизменения толстостенных трубных заготовок матрицами с конической воронкой в 15, 20 и 25° и коэффициентами обжима от 1,2 до 1,5 для схемы, когда внутри необжимаемой части заготовки помещена оправка, исключающая возможность течения металла этой зоны в направлении к оси заготовки. Количественные данные помогут моделировать форму и размеры штампованных изделий при заданных параметрах инструмента и исходной заготовки.

**Ключевые слова:** обжим, коническая матрица, толстостенная труба.

Одной из схем деформирования толстостенных трубных заготовок, приведенной в [1], является обжим конической матрицей в условиях, когда внутри необжимаемой части помещена оправка. Принято считать, что в таком случае снижается вероятность потери устойчивости с образованием складки внутри изделия. Помимо этого обеспечивается надежная соосность заготовки и деформирующего инструмента, что также благоприятствует бездефектной штамповке.

В то же время показано [1], что в необжимаемой части заготовки достаточно ощутимо утолщается стенка. Для рассматриваемой схемы очевидным является такое утолщение путем увеличения внешнего диаметра, преимущественно за счет равномерного течения металла в радиальном направлении. Интенсивность осадки данной части заготовки определяется параметрами инструмента для обжима — углом воронки матрицы и коэффициентом обжима  $K_{об}$ , а также толщиной стенки исходных заготовок.

Чтобы удостовериться в высказанных выше предположениях, были проведены описываемые ниже исследования. Они выполнялись на образцах из спла-

ва Д16АТ, изготовленных токарной обработкой из сплошного профиля. В целях обеспечения независимости изучаемых параметров от различия механических характеристик металла вся партия заготовок была одновременно подвергнута термической обработке, обеспечивающей оптимальную деформируемость выбранного сплава. Режим выполненной термообработки: отжиг при температуре 410° с выдержкой в течении 60 минут и последующим охлаждением вначале с печью со скоростью 30° в час до 260°, а окончательно — на воздухе.

Все образцы имели наружный диаметр ( $D_0$ )  $38 \pm 0,05$  мм и длину ( $H_0$ )  $75 \pm 0,1$  мм, но отличались толщиной стенки ( $S_0$ ), которая в представлении относительным параметром  $S_0/D_0$  имела значения 0,10, 0,12, 0,15 и 0,21.

Заготовки в количестве 36 штук перед деформированием в девяти матрицах с параметрами, представленными табл. 1, промерили. Для того, чтобы при последующих снятиях размеров с деформированных образцов это выполнять в согласованных сечениях, на обоих торцах были нанесены по две риски по диаметальному направлению.

Таблица 1

Параметры экспериментальных матриц

№	11	12	13	15	16	17	27	28	29
$\alpha$ , град	15	15	15	25	25	25	20	20	20
$K_{об}$	1,20	1,30	1,50	1,20	1,25	1,30	1,3	1,4	1,5

Таблица 2

№ матрицы	11	12	13	15	16	17	27	28	29
№ заготовки	1436	1434	1435	1437	1438	1439	1433	1432	1431
	1426	1424	1425	1430	1428	1429	1423	1422	1421
	1416	1414	1415	1417	1418	1419	1413	1412	1411
	1406	1404	1405	1407	1408	1409	1403	1402	1401

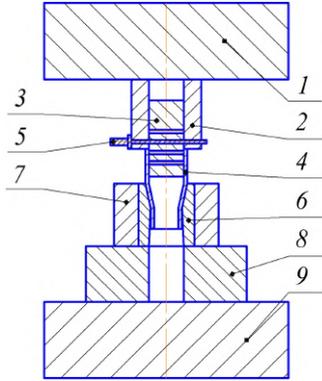


Рис. 1. Конструкция инструмента для экспериментов:  
1 — плита верхняя; 2 — пуансон; 3 — оправка сменная;  
4 — деформируемый образец;  
5 — щека для установки оправки; 6 — матрица;  
7 — бандаж; 8 — кольцо опорное; 9 — плита нижняя

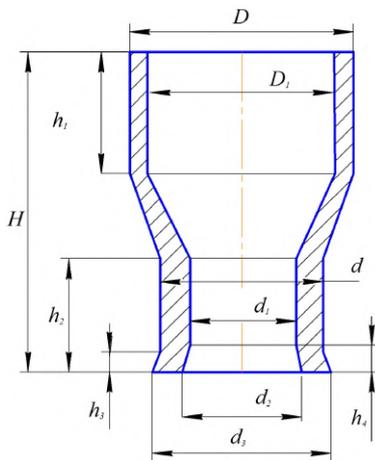


Рис. 2. Схема обмера деформированных образцов

Раскладка заготовок по матрицам представлена в табл. 2.

В экспериментальной наладке, представленной на эскизе (рис. 1), для упрощения конструкции использовали сменные оправки, устанавливаемые в пуансоне таким образом, чтобы деформирование производилось пошагово, а оправки не могли попасть в зону обжима. Поэтому каждая из оправок размещалась в заготовке так, что в период между началом и окончанием шага оправка не доходила до входа в воронку матрицы расстояния в  $(1,5 \dots 2,0) S_0$ . Такая величина свободного участка исключает провоцирование потери устойчивости, так как, согласно [2], при осадке толстостенных труб продольный изгиб их стенки происходит, когда высота заготовки превышает две толщины стенки.

После деформирования сняты размеры образцов, полностью определяющие их конечное формоизменение (рис. 2).

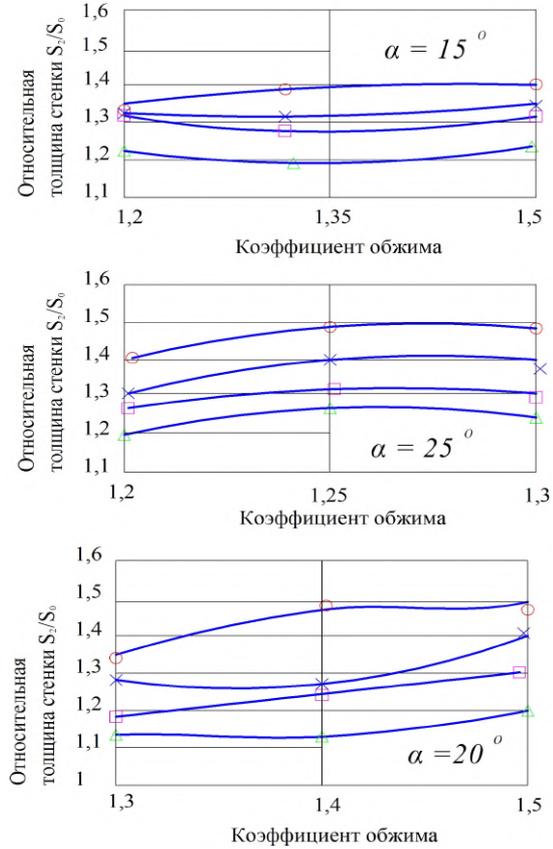


Рис. 3. Графики зависимости относительной толщины стенки в обжатой зоне от коэффициента обжима, угла матрицы и толщины стенки исходной заготовки:  
△ —  $S_0/D_0=0,10$ ; □ —  $S_0/D_0=0,12$ ;  
× —  $S_0/D_0=0,15$ ; ○ —  $S_0/D_0=0,21$

По результатам обмеров построены графики зависимости основных параметров формоизменения от  $\alpha$ ,  $K_{об}$  и  $S_0/D$ , представленные на рис. 3–5. При этом на графиках  $S_1 = (D - D_1)/2$ ,  $S_2 = (d - d_1)/2$ .

Анализ графиков и аналогичных результатов, полученных для других схем обжима [1, 3] дает основание сделать следующие заключения.

1. Утолщение стенки как в обжатой, так и в необжатой зоне тем выше, чем больше угол матрицы и коэффициент обжима.

2. С увеличением относительной толщины стенки исходной заготовки приращение толщины в необжатой зоне растет, а в обжатой снижается.

3. Чем больше угол матрицы и коэффициент обжима, тем меньше конечная длина обжатого образца.

4. Характер изменения и величина анализируемых параметров формоизменения соответствуют аналогичным данным для рассматривавшихся ранее схем «свободного» обжима [1] и обжима матрицей с контейнером [1].

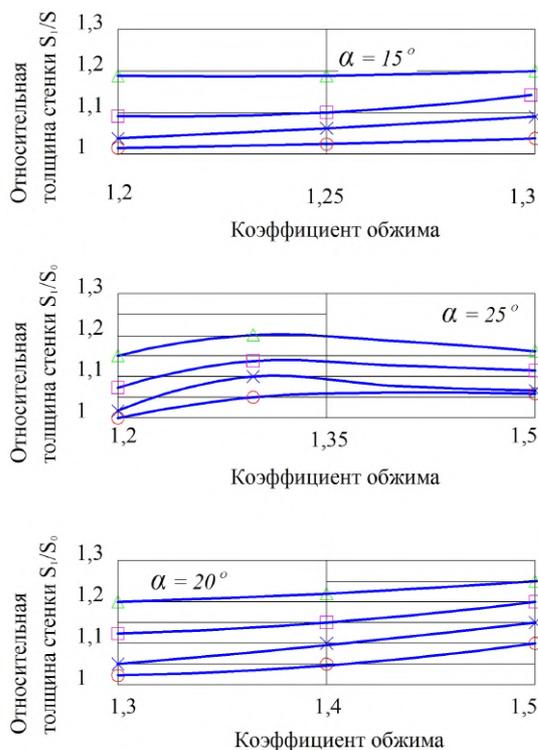


Рис. 4. Графики зависимости относительной толщины стенки в необжатой зоне от коэффициента обжима, угла матрицы и толщины стенки исходной заготовки:  
 $\text{тм} - S_0/D_0=0,10$ ;  $\text{ї} - S_0/D_0=0,12$ ;  
 $\text{£} - S_0/D_0 = 0,15$ ;  $\text{r} - S_0/D_0 = 0,21$

Изложенные в работе результаты применимы при проектировании технологии и инструмента для холодной штамповки полых толстостенных поковок и полуфабрикатов с коническими участками, получаемыми обжимом в матрицах.

Они позволяют более точно прогнозировать конечное формоизменение изделия при заданных характеристиках инструмента и исходной заготовки.

#### Библиографический список

1. Коновалов, В. А. Формоизменение и силовой режим при обжиме толстостенных трубных заготовок : моногр. / В. А. Коновалов. — Омск : ОмГТУ, 2012. — 112 с.
2. Теория обработки металлов давлением (Вариационные методы расчета усилий и деформаций) : учеб. / И. Я. Тарновский [и др.] ; под ред. И. Я. Тарновского. — М. : Metallurgizdat, 1963. — 672 с.
3. Влияние параметров инструмента на формоизменение трубной заготовки с относительно толстой стенкой при холод-

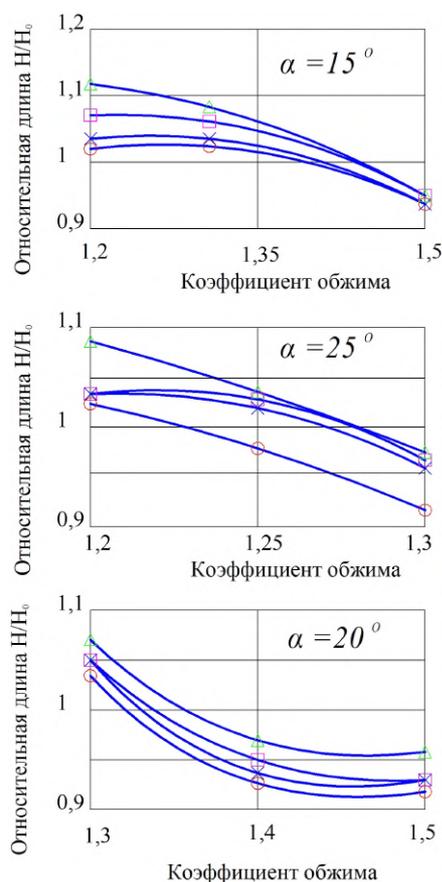


Рис. 5. Графики зависимости относительной длины обжатых образцов от коэффициента обжима, угла матрицы и толщины стенки исходной заготовки:  
 $\text{тм} - S_0/D_0=0,10$ ;  $\text{ї} - S_0/D_0=0,12$ ;  
 $\text{£} - S_0/D_0 = 0,15$ ;  $\text{r} - S_0/D_0 = 0,21$

ном обжиме конической матрицей / В. А. Коновалов [и др.] // Омский научный вестник. Сер. Приборы, машины и технологии. — 2012. — № 2 (110). — С. 86–89.

**КОНОВАЛОВ Валерий Александрович**, кандидат технических наук, доцент (Россия), доцент кафедры «Машиностроение и материаловедение».

**ГЛУХАРЕВ Артем Сергеевич**, магистрант гр. ОДМ-613 факультета элитного образования и магистратуры.

**ГРЕЧУШНИКОВ Андрей Иванович**, магистрант гр. ОДМ-613 факультета элитного образования и магистратуры.

Адрес для переписки: mitomd55@mail.ru

Статья поступила в редакцию 10.03.2015 г.

© В. А. Коновалов, А. С. Глухарев, А. И. Гречушников

## Книжная полка

**Бельков, В. Н. Основы расчета и конструирования винтовых механизмов : учеб. пособие / В. Н. Бельков. — Омск : ОмГТУ, 2014. — 1 о=эл. опт. диск (CD-ROM). — ISBN 978-5-8149-0523-9.**

Учебное пособие посвящено конструированию оригинальных механических винтовых устройств и предназначено для более глубокого изучения основ конструирования деталей машин. Установлены последовательности выполнения работы, правильное сочетание расчета и конструирования, выбор материалов и термообработки, обеспечение технологичности конструкции, выполнение условий сборки и т. д. Изложенный материал приведен к форме, наиболее удобной для использования при курсовом проектировании.

## ОПТИМИЗАЦИЯ ФОРМЫ РЕЖУЩЕГО ИНСТРУМЕНТА ДЛЯ ОБТОЧКИ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ КОЛЕС НА ОСНОВЕ ОЦЕНКИ ПРОЧНОСТИ ПРИ ТЕМПЕРАТУРНО- СИЛОВОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Учтены изменения физико-механических свойств инструментального материала под действием температурного поля и различные законы распределения нагрузок на контактных поверхностях инструмента, приводящие не только к упругим, но и к пластическим деформациям твердого сплава. Разработана оптимальная геометрия режущего инструмента, обеспечивающая наименьшие напряжения в теле пластины при обточке колес с учетом температурно-силового воздействия.

**Ключевые слова:** железнодорожное колесо, режущий инструмент, температура, напряжения, запас прочности.

Токарная обработка профиля железнодорожного колеса сопровождается значительными колебаниями припуска и твердости, что в сочетании с высокими режимами резания, вызывает изменение температурно-силовых нагрузок в широких пределах [1]. Все это в совокупности отрицательно влияет на режущий инструмент, оборудование и в целом на производительность процесса токарной обработки.

Одним из направлений совершенствования технологического процесса восстановления колесных пар является обеспечение надежности и износостойкости твердосплавного инструмента.

Практика эксплуатации режущего инструмента показывает, что нередко инструмент выходит из строя при сравнительно небольших нагрузках, возникающих в процессе обточки профиля железнодорожного колеса. Обычно это связывают с усталостью твердого сплава и его износом, однако во многих случаях помимо усталостного разрушения именно тепловые нагрузки определяют его прочность и износостойкость. Учитывая этот факт, модель для оценки напряженного состояния в режущей пластине [1, с. 142] дополнена температурными нагрузками на контактных поверхностях режущего инструмента. Температуры, возникающие при восстановлении профиля колеса, определены на основании данных [2].

Средние температуры на контактных поверхностях инструмента:

— на передней поверхности

$$\bar{\theta}_n = \theta_A (1 + 0,73\psi_M), \quad (1)$$

где  $\theta_A = \frac{\tau_p}{c_p B} \operatorname{erf} \sqrt{\frac{PeB}{4}}$  — максимальная температура

пластических деформаций в условной плоскости сдвига;  $Pe$  — критерий Пекле, характеризующий степень влияния режимных условий процесса по сравнению с влиянием теплофизических свойств обрабатываемого материала;

$B$  — величина, характеризующая степень пластических деформаций металла снимаемого припуска и поверхностного слоя обрабатываемого колеса;

$c_p$  — удельная объемная теплоемкость обрабатываемого материала;

$\operatorname{erf} x$  — интеграл вероятности, численные значения которого в зависимости от критериев подобия;

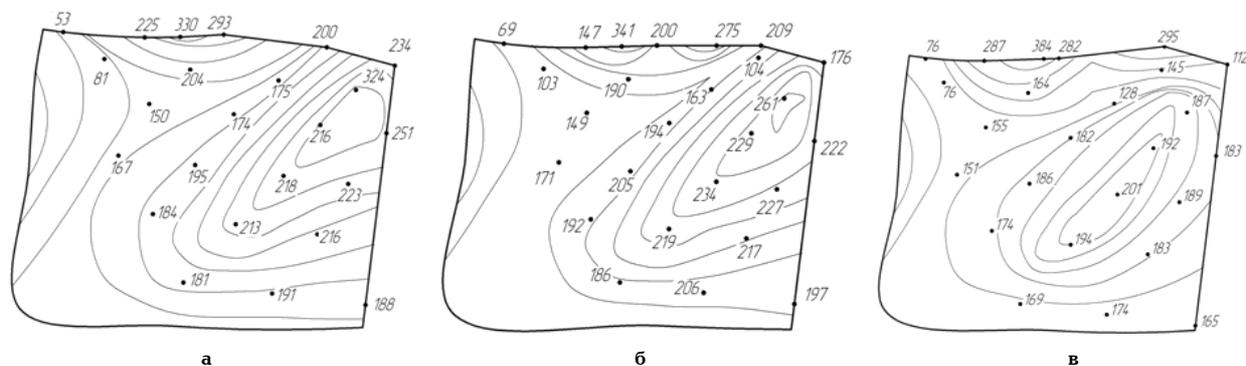
$\psi_M$  — безразмерная функция.

— на задней поверхности

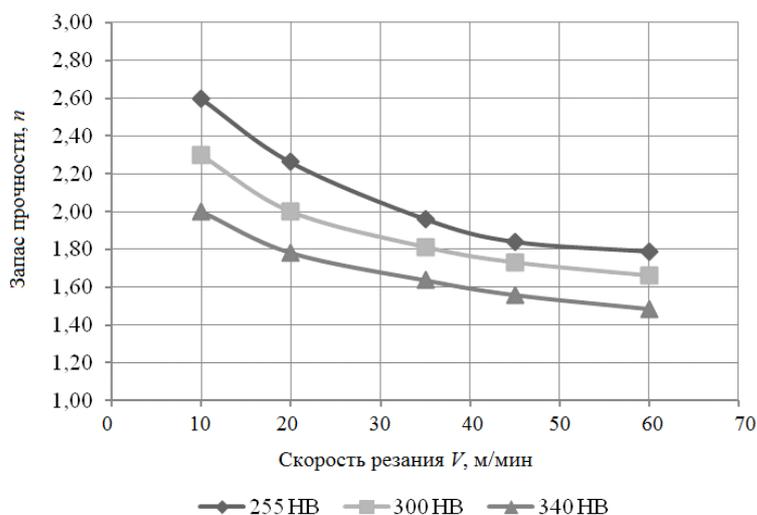
$$\bar{\theta}_z = 0,5\theta_A \left(1 + \frac{1}{u} + mu\right), \quad (2)$$

где  $u = \frac{\sqrt{PeEB}^{1,25}}{\sin^{0,25} \alpha}$ ;  $m = \frac{1,035 n_1 \cos \alpha}{\operatorname{erf} \sqrt{\frac{PeB}{4}}}$  — безразмерные

коэффициенты;



**Рис. 1. Распределение изолиний равных предельных напряжений при температурно-силовом воздействии в призматической твердосплавной пластине геометрии:**  
**а — «А» ( $\gamma = -7^\circ$ ,  $\gamma_f = -15^\circ$ ,  $f_y = 0,4$  мм,  $\alpha = 6^\circ$ );**  
**б — «Б» ( $\gamma = 0^\circ$ ,  $\gamma_f = -15^\circ$ ,  $f_y = 0,4$  мм,  $\alpha = 6^\circ$ ); в — «В» ( $\gamma = 7^\circ$ ,  $\gamma_f = -15^\circ$ ,  $f_y = 0,4$  мм,  $\alpha = 6^\circ$ )**  
**при обработке стали твердостью 300НВ с режимом резания  $V = 20$  м/мин,  $t = 5$  мм,  $s = 1,1$  мм/об**



**Рис. 2. Влияние скорости резания на запас прочности при температурно-силовом воздействии для марок стали различной твердости при  $\phi = 75^\circ$ ,  $\gamma = -7^\circ$ ,  $\gamma_f = -15^\circ$ ,  $\alpha = 6^\circ$ ,  $s = 1,1$  мм/об,  $t = 5$  мм**

$n_1$  — часть, которую теплота трения, уходящая с задней поверхности в деталь, составляет от общей теплоты трения;

$E = \frac{\rho_1}{\alpha_1}$  — критерий подобия;

Здесь  $\rho_1$  — радиус скругления режущей кромки инструмента.

Распределение тепловых нагрузок на поверхность режущего инструмента было принято по закону прямоугольника, т.е. равномерно распределенное по площади контакта.

Точечные выборки и наиболее вероятные изолинии равных предельных напряжений  $\sigma_n$  при температурно-силовом воздействии на режущий инструмент различной геометрии при восстановлении профиля колеса графически представлены на рис. 1.

На основании анализа изолиний предельных напряжений при температурно-силовом воздействии было установлено, что в пластине имеется две зоны высоких значений контактных напряжений. Первая при силовом воздействии шириной около  $\frac{1}{4}$ – $\frac{1}{3}$  ширины упрочняющей фаски. Вторая зона проявляется при температурно-силовом нагружении на округленной боковой поверхности лунки, располагающейся ближе к режущей кромке. Отметим, что эта зона совпадает с местами максимальных концен-

траций эквивалентных напряжений, что соответствует минимальному запасу прочности инструмента по критерию Писаренко – Лебедева [3]. Таким образом, можно говорить об образовании наиболее вероятной линии скалывания и разрушения твердосплавной пластины в форме седла, берущего свое начало на боковой поверхности лунки и заканчивающегося на 2–4 длины контакта по задней поверхности.

Зависимость коэффициента запаса прочности призматической пластины геометрии «А» от скорости резания при температурно-силовом воздействии при обработке стали различной твердости отображается в виде вогнутых нисходящих кривых с большим уклоном (рис. 2). С увеличением скорости отточки профиля кривые сближаются. Расчетные значения коэффициента запаса прочности инструмента при температурно-силовом нагружении составляют 1,49–2,60, что примерно на 75 % меньше, чем при сугубо силовом воздействии.

Таким образом, учет влияния температурного фактора на напряженное состояние пластины имеет существенное значение. В частности, появляется дополнительная, и уже основная по численному значению, зона концентрации напряжений, которая вместе с существующей при силовом воздействии образует наиболее вероятную линию разрушения.

Таблица 1

## Варьирование переменных исследования

Параметр исследования	Диапазон изменения*		
	минимум	максимум	шаг
Угол упрочняющей фаски $\gamma_y$ , град	-3	-15	3
Ширина упрочняющей фаски $f_y$ , мм	0,2	0,6	0,2
Передний угол $\gamma$ , град	-3	-21	3
	3	21	3

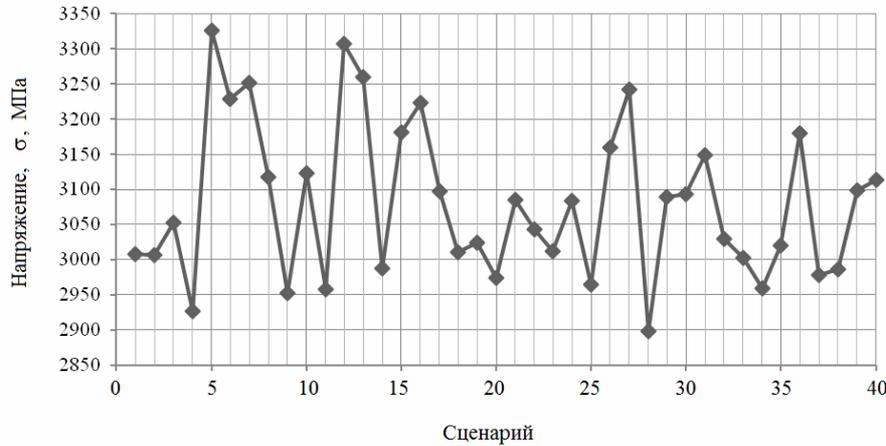


Рис. 3. График локальной тенденции итоговой оптимизации

Рассмотрим оптимизацию геометрии призматической пластины типа LNUX 301940 из твердого сплава T14K8 для минимизации напряжений, возникающих при температурном и силовом воздействии при обточке железнодорожных колес. Размеры контактных площадок, силы резания, напряжения (нормальные и тангенциальные) действующие на передней и задней поверхностях инструмента, а также температуры на контактных поверхностях определены на основе рекомендаций [4] в работе [1, с. 143]. Поскольку многие из этих расчетных величин, характеризующих процесс восстановления профиля колеса, прямо или косвенно зависят от геометрии режущего инструмента, то в виде допущения исследования для их определения принимаем «усредненные» значения геометрии ( $\gamma=0^\circ$ ,  $\gamma_f=-15^\circ$ ,  $f_y=0,4$  мм,  $\alpha=6^\circ$ ).

Основой оптимизационного анализа являются определения переменных проектирования, ограничений и цели или целевой функции, в роли которой могут выступать массовые характеристики модели (масса, объем и площадь поверхности) и данные моделирования (напряжения, перемещения и деформации).

Переменными исследования проектирования принимались такие размеры модели, как геометрические параметры призматической пластины, которые менялись в процессе анализа: угол упрочняющей фаски, ширина упрочняющей фаски, передний угол (табл. 1).

Чтобы размеры эскиза модели совпадали с геометрическими параметрами режущей части пластины (передний угол и т. п.) считаем, что угол наклона задней поверхности  $\alpha=0^\circ$ . Впоследствии, в итоговом оптимизированном варианте геометрии режущей части угол  $\alpha=6^\circ$  учитывается при установке кассеты с пластиной в тело инструмента ( $\gamma_y-\alpha$  и  $\gamma-\alpha$ ).

На основании расчета прочности инструмента в работе [4, с. 98] было установлено, что при темпера-

турно-силовом нагружении места концентраций эквивалентных напряжений соответствуют минимальному запасу прочности твердосплавной пластины по критерию Писаренко – Лебедева, учитывающему анизотропные свойства твердосплавного материала. Эти места в дальнейшем и были использованы в качестве исследуемых зон для ограничения и датчиков цели (целевой функции) при отслеживании максимальных эквивалентных напряжений с целью их минимизации.

Программа запускала исходное температурно-силовое исследование Simulation для каждого варианта сценария и производила обновление значений датчика целевой функции, тем самым отслеживая значение эквивалентных напряжений. Решением задачи оптимизации геометрии пластины явился подбор таких значений указанных переменных, которые наилучшим образом удовлетворяли поставленному условию минимизации целевой функции (эквивалентных напряжений).

Так как рост числа переменных проектирования увеличивает число итераций (возможных вариантов решения задачи), то исследование было разделено на три группы, каждой из которой соответствовало определенное значение ширины упрочняющей фаски: 0,2 мм, 0,4 мм и 0,6 мм. Программа для каждой из трех групп исследования выполняла 70 различных итераций. После выполнения экспериментов рассчитывались оптимальные расчетные параметры путем создания функции отклика, относящейся к цели переменных. При этом программа создавала графики изменения максимального напряжения по Мизесу для каждой вариации переменных (сценария исследования), которые использовались для качественной оценки полученных результатов.

В результате решения этих трех задач получены три варианта геометрических размеров твердосплавной пластины, из которых выбрана одна группа параметров с минимумом эквивалентных напряже-

Геометрические и прочностные параметры оптимизированной призматической пластины

Геометрические и прочностные параметры призматической пластины	Призматическая пластина	
	Стандартная	Предлагаемая
Угол упрочняющей фаски $\gamma_y$ , град.	-15	-10
Передний угол (лунка) $\gamma$ , град.	-7	16
Передний угол (порожек) $\gamma_n$ , град.	—	-28
Ширина упрочняющей фаски $f_y$ , мм	0,4	0,2
Ширина затупления задней поверхности $f_z$ , мм	—	0,2
Ширина внедрения в тело пластины переднего угла $L_n$ , мм	—	2,0
Радиус при вершине инструмента $r$ , мм	4	4
Радиус скругления главной режущей кромки $\rho$ , мм	0,1	0,04
Данные моделирования		
Предельные напряжения $\sigma_n$ , МПа	360	326
Запас прочности $n$ , ед.	1,71	1,89

ний ( $\sigma=3024$  МПа, при  $\gamma_y=-3^\circ, \gamma=21^\circ, f_y=0,2$  мм). С целью исключения так называемого локального оптимума расчет производился еще раз, при этом использовался в качестве исходной точки ранее полученный оптимальный вариант с более мелким перебором значений геометрических параметров инструмента: угол упрочняющей фаски и передний угол от  $-1^\circ$  до  $-8^\circ$  и от  $19^\circ$  до  $23^\circ$  соответственно, с шагом в один градус.

Число возможных вариантов решения итоговой задачи оптимизации составило 40 итераций. График изменения максимального напряжения для итоговой серии сценариев исследования представлен на рис. 3, из которого можно заключить, что 28-й сценарий ( $\sigma=2899$  МПа с параметрами  $\gamma_y=-4^\circ, \gamma=22^\circ$ ) является наилучшим. Полученные геометрические параметры пластины соответствуют ее нормальному положению, когда она стоит на основной плоскости, т.е. на данные конструктивные углы режущая кромка твердосплавной пластины затачивается.

Результаты оптимизации геометрии пластины хорошо согласуются с исследованиями [4, с. 99], где при анализе напряженно-деформированного состояния сменных твердосплавных пластин с разной формой передней поверхности отмечено, что эпюры распределения главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  для режущего клина с фаской и с вогнутой передней поверхностью примерно в 3 раза в численном выражении меньше по сравнению с главными напряжениями в режущем клине с плоской передней поверхностью.

Исследования [5, 6] и эксперименты показали, что снижение темпа износа режущего инструмента обеспечивается фаской по задней поверхности с нулевым углом  $\alpha$ . Это учитывалось при оптимизации геометрии пластины притуплением ее задней поверхности. Такое первоначальное притупление благоприятно с точки зрения повышения пластической прочности режущего лезвия, путем упрочнения режущего клина и уменьшения пластических деформаций в начальный период резания [7].

В результате решения задачи оптимизации получены следующие итоговые значения результирующих геометрических параметров оптимизированной пластины с учетом ее установки в корпус державки, определяемые геометрией передней поверхности пластины и наклоном опорной поверхности

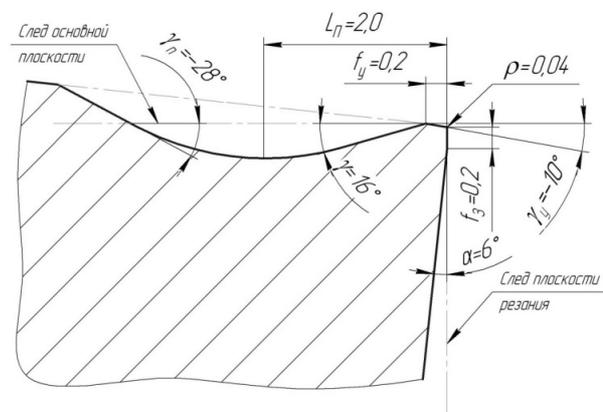


Рис. 4. Геометрическая форма режущей части пластины при установке ее в державку под углом  $\alpha$

гнезда державки, в сравнении со стандартной (табл. 2). В таблице также представлены рассчитанные и прогнозированные их прочностные характеристики при обточке колесной стали твердостью 300НВ при следующих режимах резания: глубина  $t=5$  мм, подача  $s=1,1$  мм/об., скорость восстановления профиля  $V=45$  м/мин.

Геометрическая форма режущей части пластины изображена на рис. 4.

Таким образом, на основании предложенных рекомендаций по оптимизации геометрии твердосплавной пластины, применяемой в режущем инструменте для обточки железнодорожных колес, можно ожидать повышение запаса ее прочности ориентировочно на 10 % по сравнению со стандартной при работе на принятых режимах резания с учетом температурно-силового воздействия.

#### Библиографический список

- Потахов, Д. А. Оценка прочности режущего инструмента для обточки железнодорожных колес при температурно-силовом воздействии / И. А. Иванов, Д. А. Потахов, С. В. Урушев // Вестник транспорта Поволжья. — 2013. — № 1 (34) — С. 139–147.
- Силин, С. С. Метод подобия при резании материалов / С. С. Силин. — М.: Машиностроение, 1979. — 152 с.

3. Писаренко, Г. С. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии / Г. С. Писаренко, А. А. Лебедев. — Киев : Наукова думка, 1976. — 415 с.

4. Артамонов, Е. В. Прочность и работоспособность сменных твердосплавных пластин сборных режущих инструментов / Е. В. Артамонов. — Тюмень : ТюмГНГУ, 2003. — 192 с.

5. Фельдштейн, Е. Э. Режущий инструмент. Эксплуатация : учеб. пособие / Е. Э. Фельдштейн, М. А. Корниевич. — Мн. : Новое знание ; М. : ИНФРА-М, 2012. — С. 256.

6. Верещака, А. С. Резание материалов / А. С. Верещака, В. С. Кушнер. — М. : Высшая школа, 2009. — С. 535.

7. Крутько, А. А. Повышение эффективности восстановительной токарной обработки железнодорожных колёсных пар : моногр. / А. А. Крутько, В. С. Кушнер, А. А. Воробьев. — Омск : ОмГТУ, 2013. — 176 с.

**КРУТЬКО Андрей Александрович**, кандидат технических наук, доцент кафедры «Машиностроение

и материаловедение» Омского государственного технического университета (ОмГТУ).

**КРУТЬКО Алексей Александрович**, студент гр. МВМ-514 факультета элитного образования и магистратуры ОмГТУ.

**ВОРОБЬЕВ Александр Алфеевич**, кандидат технических наук, доцент (Россия), доцент кафедры «Технология металлов» Петербургского государственного университета путей сообщения Императора Александра I.

**ПОТАХОВ Дмитрий Александрович**, кандидат технических наук, инженер технического отдела службы подвижного состава ГУП «Петербургский метрополитен».

Адрес для переписки: [krutko@omgtu.ru](mailto:krutko@omgtu.ru)

Статья поступила в редакцию 19.03.2015 г.

© Ан. А. Крутько, Ал. А. Крутько, А. А. Воробьев, Д. А. Потахов

УДК 621.941.02

**А. А. КРУТЬКО  
В. И. ФИСЕНКО  
А. А. ВОРОБЬЕВ  
Д. А. ПОТАХОВ**

Омский государственный  
технический университет

Петербургский государственный  
университет путей сообщения  
Императора Александра I

ГУП «Петербургский  
метрополитен»

## ОЦЕНКА НАПРЯЖЕННО- ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И ПРОЧНОСТИ РЕЖУЩЕГО ИНСТРУМЕНТА ПРИ ОБТОЧКЕ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ КОЛЕС

Использован численный метод расчета напряженного состояния режущей части твердосплавного инструмента с учетом упрочняющей фаски и различных значений угла его передней поверхности. Исследована статическая прочность режущего инструмента при обработке железнодорожных колес различной твердости с учетом силовых воздействий.

**Ключевые слова:** колесная пара, режущий инструмент, твердость, напряжения, запас прочности.

В процессе эксплуатации подвижного состава происходит износ и повреждение его ходовых частей и, в частности, профиля поверхности катания колесных пар [1]. Изношенный профиль поверхности катания периодически восстанавливается механической обработкой с применением режущего инструмента, оснащенного твердосплавными пластинами. Статистические данные [2] об использовании станков свидетельствуют о том, что значительная доля простоев оборудования (до 40 %) имеет место

в связи с низкой стойкостью и надежностью инструмента. К снижению стойкости режущего инструмента приводит также увеличение твердости и прочностных характеристик колесной стали, что вызывает повышенный его расход [3, 4] и, как следствие, увеличивает затраты на ремонт колес.

Одним из направлений снижения расхода, связанного с ремонтом колес, является разработка модели для оценки напряженного состояния и прочности режущих пластин с целью их оптимизации.

В настоящей работе проводились исследования напряженного состояния и прочности призматических пластин типа LNUX 301940 из твердого сплава T14K8 с различной геометрией режущей части и с наличием лунки. Размеры контактных площадок, силы резания, напряжения (нормальные и тангенциальные) действующие на передней и задней поверхностях инструмента, определены на основе рекомендаций [5].

$$F_n = \tau_p a_1 b_1 \left( \frac{\cos\gamma + \sin\gamma}{B} - \cos\gamma + \sin\gamma \right); \quad (1)$$

$$N = \tau_p a_1 b_1 \left( \frac{\cos\gamma - \sin\gamma}{B} + \cos\gamma + \sin\gamma \right); \quad (2)$$

$$F_1 = 0,625 \tau_p \rho_1 b \sqrt{\frac{B}{\sin\alpha}}; \quad (3)$$

$$N_1 = \frac{F_1}{\mu} = 0,625 \frac{\tau_p \rho_1 b}{\mu_1} \sqrt{\frac{B}{\sin\alpha}}; \quad (4)$$

где  $F_n$ ,  $F_1$ ,  $N$ ,  $N_1$  — соответственно силы трения и нормальные силы на передней и задней поверхностях инструмента;

$\tau_p$  — сопротивление обрабатываемого материала пластическому сдвигу;

$a_1$ ,  $b_1$  — толщина и ширина среза;

$b$  — периметр рабочих участков режущих кромок;

$B$  — величина, характеризующая степень пластических деформаций металла снимаемого припуска и поверхностного слоя обрабатываемого колеса;

$\gamma$ ,  $\alpha$  — соответственно передний и задний углы инструмента;

$\rho_1$  — радиус скругления режущей кромки;

$\mu$ ,  $\mu_1$  — коэффициент трения соответственно на передней и задней поверхностях инструмента.

Длина контакта стружки с инструментом по передней поверхности:

$$l = 1,45 a_1 \left( \frac{\cos\gamma + \sin\gamma}{B} - \cos\gamma + \sin\gamma \right). \quad (5)$$

Величина контакта колеса с инструментом по задней поверхности:

$$\Delta \approx 1,25 \rho_1 \sqrt{\frac{B}{\sin\alpha}}. \quad (6)$$

Средние нормальные и касательные напряжения на передней поверхности:

$$\sigma_M = \frac{N}{b_1 l}; \quad (7)$$

$$\tau_M = \frac{F_n}{b_1 l}. \quad (8)$$

Средние контактные напряжения на задней поверхности:

$$\sigma_{M1} = 0,5 \frac{\tau_p}{\mu_1}; \quad (9)$$

$$\tau_{M1} = 0,5 \tau_p. \quad (10)$$

Участки поверхности режущего инструмента, на которых действуют контактные напряжения, были разбиты на некоторое количество равных по длине зон, и ступенчато по всей или части длины контакта приложены равномерно-распределенные нагрузки. Кривые распределения нормальных и касательных

напряжений на передней поверхности аппроксимированы соответственно по закону треугольника и трапеции, а на задней — обе по закону треугольника.

Положение пластины в пространстве фиксировалось путем наложения трех ограничений, имитирующих ее крепление в кассете резцедержателя. На цилиндрическое отверстие для крепления пластины накладывалось ограничение типа «шарнир», разрешающее только продольное перемещение и круговое вращение относительно оси отверстия. На основании и боковую поверхность пластины — ограничение типа «ползун», имитирующее ее стыковку с гранями (телом) кассеты и позволяющее совершать продольные и поперечные перемещения в горизонтальной и вертикальной плоскостях соответственно для основания и боковой поверхности.

Анализ напряженного состояния и прочности твердосплавных режущих пластин производился в сечении максимальных эквивалентных напряжений. Для исследования использовалась система трехмерного твердотельного моделирования SolidWorks [6], предназначенная для решения широкого спектра инженерных задач, с применением специализированного расчетного модуля конечно-элементного [7, 8] анализа COSMOS, а именно пакет прочностного и теплового анализа COSMOSWorks.

Моделирование статической пространственной задачи теории упругости в COSMOSWorks в отношении нагружения твердосплавной пластины режущего инструмента реализовалось традиционно. В качестве алгоритма дискретизации (построения конечно-элементной сетки) для созданной твердотельной модели пластины использовался метод диаграмм Делано — Вороного, генерирующий сетку наиболее близкую к «оптимальной». Аппроксимация производилась тетраэдральными изопараметрическими элементами с линейным полем перемещений (деформации постоянные, грани — плоские) и с параболическим полем перемещений (деформации линейные, грани — полиномы второго порядка). При реализации разбивки пластины на конечные элементы производилось уменьшение их площади по мере приближения к режущей кромке. Кроме того, поскольку многие теплофизические и физико-механические характеристики инструментального материала существенно зависят от температуры, то при задании свойств твердосплавной пластины они были приняты температурно-зависимыми на основании данных [9, 10] (табл. 1, рис. 1).

Запас прочности режущей части твердосплавной пластины определялся исходя из сложного напряженного состояния, возникающего при ее нагружении силами с учетом статистического подхода к проблеме прочности инструментального материала.

В литературе [11, 12] разрушение инструментального материала классифицируется как хрупкое, однако при высоких температурах разрушение переходит в вязкое, т. е. сопровождается пластической деформацией. Строгой границы между хрупким разрушением и вязким не выделяют, так как теорией дислокации установлено, что разрушение только от касательных (пластическое) или только от нормальных напряжений (хрупкое) невозможно. Пластическая деформация, возникающая под действием касательных напряжений, разрывает деформируемый материал, подготавливая его к разрыву, а сам разрыв вызывает нормальные растягивающие напряжения. Роль касательных и нормальных напряжений в механике разрушения инструментальных матери-

Таблица 1

Свойства инструментального материала T14K8

Свойство	Значение, ед. измерения
Модуль упругости, $E$	Температурно-зависимый
Коэффициент Пуассона, $\mu$	$\mu = 0,30$
Массовая плотность, $\rho$	$\rho = 11200 \text{ кг/м}^3$
Предел прочности при сжатии, $\sigma_{-B}$	Температурно-зависимый
Предел прочности при растяжении, $\sigma_B$	$\sigma_B = 615 \text{ Н/мм}^2$
Предел текучести, $\sigma_T$	Температурно-зависимый
Коэффициент теплового расширения, $\beta$	$\beta = 6,2 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$
Теплопроводность, $\lambda_p$	Температурно-зависимая
Удельная теплоемкость, $c$	$c = 460 \text{ Дж/(кг}\cdot^\circ\text{C)}$

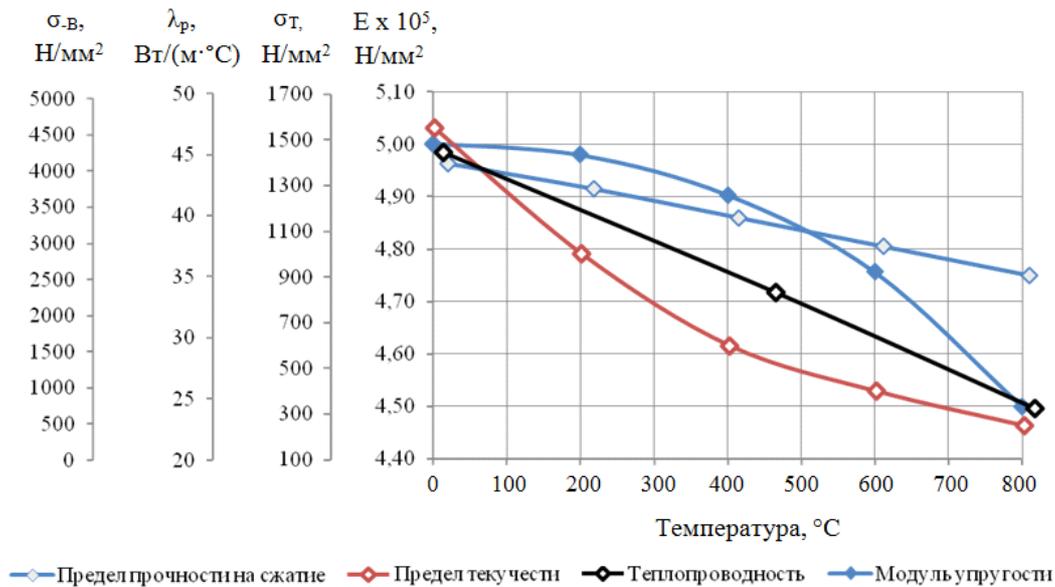


Рис. 1. Влияние температуры на свойства инструментального материала T14K8

алов определяется их свойствами и условиями нагружения. Обычно основную роль играют нормальные растягивающие напряжения, однако при разрушении даже очень хрупкого материала обнаруживаются полосы скольжения, значение которых увеличивается с повышением температуры и гидростатического давления.

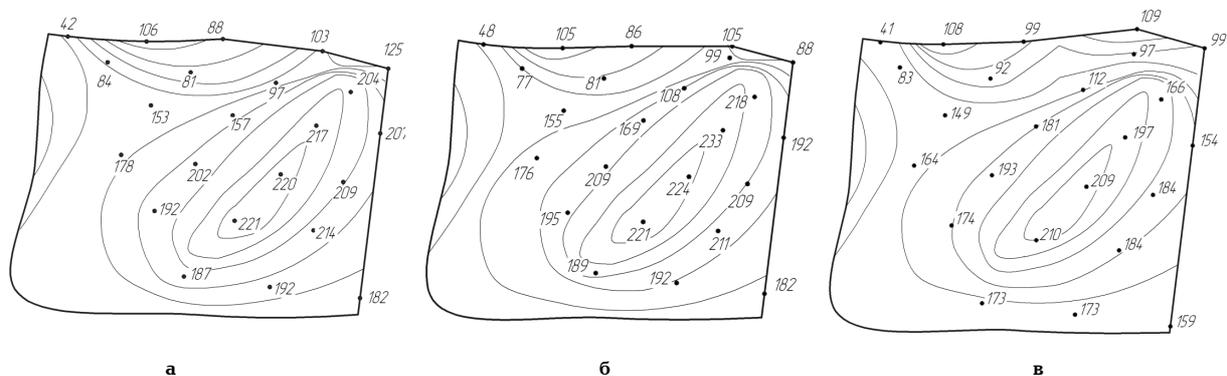
Процесс разрушения режущей части инструмента можно разделить на две стадии, имеющие разную физическую основу: первая — зарождение микротрещины, не изменяющей физические свойства материала (теплопроводность и др.); вторая — рост трещины, стабилизируемый пластической деформацией на концах трещины.

Анализ механизма разрушения инструментальных материалов показывает, что в соответствии с принципами механики сплошной среды состояние материала в точке возможного его разрушения полностью определяется уровнем действующих напряжений. Так как наступление предельного состояния обуславливаются критерием возникновения трещин, тесно связанным с касательными напряжениями и критерием их распространения, обуславливаемого нормальными растягивающими напряжениями, то общий критерий прочности инструментальных материалов должен учитывать действие этих обоих механизмов разрушения. При низких температурах на-

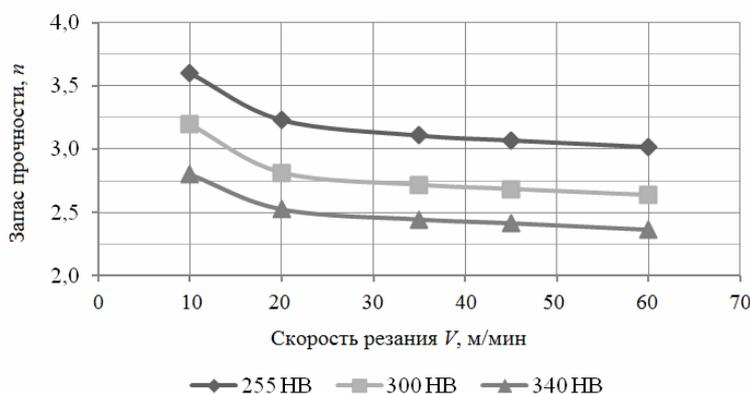
грева наибольшее значение для разрушения инструментальных материалов имеют нормальные растягивающие напряжения. С повышением температуры увеличивается роль касательных напряжений.

Из рассмотрения механизма разрушения инструментальных материалов ясно, что ряд определяющих их разрушение факторов зависит от вида напряженного состояния и не поддается прямому количественному расчету и может быть учтен лишь на основе статистических методов. Однако реально оценить прочность пластины по максимальным напряжениям, возникающих в ней при нагружении можно, применяя для этого программные комплексы, использующие численные методы расчета на основе метода конечных элементов, например SolidWorks и Ansys. Учитывая статические аспекты прочности и сложный характер нагружения режущей части инструмента, изготовленного из твердого сплава, при оценке прочности использован критерий предельного состояния Писаренко — Лебедева [13, 14]. Он предлагается в виде двух слагаемых, первое из которых определяется величиной пластической деформации и характеризует условия зарождения трещины, второе — ее развитие и распространение. В соответствии с этой теорией:

$$\sigma_{\eta} = \chi \sigma_i + (1 - \chi) \sigma_1 A^{1-J} \leq \sigma_B, \quad (11)$$



**Рис. 2. Распределение изолиний равных предельных напряжений при силовом воздействии в призматической твердосплавной пластине геометрии:**  
**а — «А» ( $\gamma = -7^\circ$ ,  $\gamma_f = -15^\circ$ ,  $f_y = 0,4$  мм,  $\alpha = 6^\circ$ );**  
**б — «Б» ( $\gamma = 0^\circ$ ,  $\gamma_f = -15^\circ$ ,  $f_y = 0,4$  мм,  $\alpha = 6^\circ$ );**  
**в — «В» ( $\gamma = 7^\circ$ ,  $\gamma_f = -15^\circ$ ,  $f_y = 0,4$  мм,  $\alpha = 6^\circ$ )**  
**при обработке стали твердостью 300НВ с режимом резания  $V = 20$  м/мин,  $t = 5$  мм,  $s = 1,1$  мм/об**



**Рис. 3. Влияние скорости резания на запас прочности при силовом воздействии для марок стали различной твердости при  $\phi = 75^\circ$ ,  $\gamma = -7^\circ$ ,  $\gamma_f = -15^\circ$ ,  $\alpha = 6^\circ$ ,  $s = 1,1$  мм/об,  $t = 5$  мм**

где  $A$  — константа, характеризующая статистический фактор развития разрушения;

$\chi = \sigma_B / \sigma_{-B}$  — параметр, определяющий долю сдвиговых деформаций в разрушении, при этом  $0 < \chi < 1$ ;

$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$  — ин-

тенсивность напряжения;

$\sigma_B$ ,  $\sigma_{-B}$  — предел прочности материала при растяжении и сжатии соответственно;

$J = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_i}$  — параметр, характеризующий

жесткость нагружения;

Здесь  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  — главные напряжения.

После подстановки констант, характеризующих твердосплавный сплав титановольфрамосодержащей группы (WC — TiC — Co) имеем:

$$\sigma_n = 0,18\sigma_i + 0,82\sigma_1 0,7 \frac{1 - \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_i} \leq \sigma_B. \quad (12)$$

Использование этого критерия позволяет оценить прочность режущей части инструмента с учетом сложного напряженного состояния и особенностей анизотропии свойств инструментальных материалов.

Чтобы наиболее полно обрисовать картину распределения напряжений в теле режущего инструмента зондирование (снятие данных моделирования) производилось в шахматном порядке, в местах изме-

нения геометрии пластины по передней и задней поверхностям, а также в местах максимальных концентраций эквивалентных напряжений.

Точечные выборки и наиболее вероятные изолинии равных предельных напряжений  $\sigma_n$  при силовом воздействии на режущую пластину призматического типа различной геометрии при восстановлении профиля колеса графически представлены на рис. 2.

Исходя из анализа изолиний равных предельных напряжений  $\sigma_n$  видно, что расположение зоны высоких значений контактных напряжений ограничивается шириной около  $1/4 - 1/3$  ширины упрочняющей фаски и располагается по вертикали под ней же на глубине одной-трех величин контакта колеса по задней поверхности инструмента. Эта зона распространяется в глубь тела резца примерно по биссектрисе угла заострения ближе к задней поверхности инструмента на глубину  $(6-7)\Delta$ , а по горизонтали она равна примерно половине длины контакта стружки по передней поверхности, где и располагается ориентировочный максимум.

Анализ показал, что зависимости коэффициента запаса прочности призматической твердосплавной пластины геометрии «А» от скорости резания при силовом воздействии от твердости обрабатываемого материала отображается в виде вогнутых нисходящих кривых небольшого уклона (рис. 3), причем кривые разных твердостей равноотстоят друг относительно друга. При этом расчетные значения

коэффициента запаса прочности инструмента  $n = \sigma_B / \sigma_n$  составляют 2,36–3,60.

Таким образом, использование критерия предельного состояния, учитывающего статические аспекты прочности и сложный характер нагружения режущей части инструмента, с применением системы трехмерного твердотельного моделирования, позволяет оценить работоспособность инструмента в различных условиях резания, а также учесть изменение свойств инструментальных материалов от температуры. Учет этих факторов немаловажен как при проектировании оптимальной геометрии инструмента, так и при прогнозировании работоспособности стандартного инструмента в производственных условиях.

#### Библиографический список

1. Богданов, А. Ф. Восстановление профиля поверхности катания колесных пар : учеб. пособие / А. Ф. Богданов, И. А. Иванов, М. Ситаж. — СПб. : ПГУПС, 2000. — 127 с.
2. Богданов, А. Ф. Эксплуатация и ремонт колесных пар вагонов / А. Ф. Богданов, В. Г. Чурсин. — М. : Транспорт, 1985. — 270 с.
3. Потахов, Д. А. Использование на подвижном составе колесных пар повышенной твердости / Д. А. Потахов // Известия ПГУПС. — 2013. — № 1 (34) — С. 139–147.
4. Анализ методов восстановления профиля катания колесных пар / А. А. Воробьев [и др.] // Вестник ВНИИЖТ. — 2011. — № 3. — С. 34–38.
5. Силин, С. С. Метод подобия при резании материалов / С. С. Силин. — М. : Машиностроение, 1979. — 152 с.
6. Алямовский, А. А. Инженерные расчёты в Solidworks Simulation / А. А. Алямовский. — М. : ДМК Пресс, 2010. — 464 с.
7. Chaskalovic, J. Finite Element Methods for Engineering Sciences / J. Chaskalovic. — Springer, 2008. — 267 p.
8. Галлагер, Р. Метод конечных элементов. Основы : [пер. с англ.] / Р. Галлагер. — М. : Мир, 1984. — 428 с.
9. Киффер, Р. Твердые сплавы : [пер. с нем.] / Р. Киффер, Ф. Бенезовский. — М. : Металлургия, 1971. — 392 с.

10. Хае, Г. Л. Повышение качества инструмента и эффективности его применения на основе системного подхода / Г. Л. Хае, И. А. Ординарцев // Станки и инструмент. — 1983. — № 7. — С. 10–13.

11. Остафьев, В. А. Расчет динамической прочности режущего инструмента / В. А. Остафьев. — М. : Машиностроение, 1979. — 168 с.

12. Полетика, М. Ф. Контактные нагрузки на режущих поверхностях инструмента / М. Ф. Полетика. — М. : Машиностроение, 1969. — 148 с.

13. Писаренко, Г. С. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии / Г. С. Писаренко, А. А. Лебедев. — Киев : Наукова думка, 1976. — 415 с.

14. Novikov, N. V. Application of the Pisarenko–Lebedev Criterion to the Strength Analysis of High-Pressure Apparatus for the Synthesis of Superhard Materials / N. V. Novikov, M. G. Loshak, S. I. Shestakov // Strength of Materials. — 2000. — Vol. 32, Issue 5. — P. 446–453.

**КРУТЬКО Андрей Александрович**, кандидат технических наук, доцент кафедры «Машиностроение и материаловедение» Омского государственного технического университета (ОмГТУ).

**ФИСЕНКО Виталий Игоревич**, студент гр. МВМ-514 факультета элитного образования и магистратуры ОмГТУ.

**ВОРОБЬЕВ Александр Алфеевич**, кандидат технических наук, доцент (Россия), доцент кафедры «Технология металлов» Петербургского государственного университета путей сообщения Императора Александра I.

**ПОТАХОВ Дмитрий Александрович**, кандидат технических наук, инженер технического отдела службы подвижного состава ГУП «Петербургский метрополитен».

Адрес для переписки: [krutko@omgtu.ru](mailto:krutko@omgtu.ru)

Статья поступила в редакцию 19.03.2015 г.

© А. А. Крутько, В. И. Фисенко, А. А. Воробьев, Д. А. Потахов

## Книжная полка

**Скобелев, С. Б. Технологические методы повышения износостойкости деталей пар трения : моногр. / С. Б. Скобелев, В. Ф. Ковалевский. — Омск : ОмГТУ, 2014. — 115 с. — ISBN 978–5–8149–1911–3.**

Отражены исследования способов повышения износостойкости деталей пар трения с помощью методов ударно-акустической обработки (УАО) с внедрением твердой смазки и капельно-адгезионной технологии. Приведены рекомендации по назначению рациональных режимов УАО, представлена методика проектирования технологической операции УАО с внедрением твердых смазок. Монография предназначена для научных работников и инженеров-технологов, а также студентов технических университетов.

**Зюзько, И. В. Физико-химические основы литейного производства : конспект лекций / И. В. Зюзько. — Омск : ОмГТУ, 2014. — 1 о=эл. опт. диск (CD-ROM).**

Изложены физико-химические основы процессов, протекающих в литейной форме при ее изготовлении, в металлических расплавах при плавке металлов и взаимодействии металла с формой. Описаны методы расчета равновесных систем при физико-химическом взаимодействии друг с другом. Для студентов специальности 150204 «Машины и технология литейного производства» и направления 150400.62 «Технологические машины и оборудование».