

# ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 519.2:004.421.5:004.7

**В. Н. ЗАДОРОВЫЙ  
В. А. БАДРЫЗЛОВ**

Омский государственный  
технический университет

## ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ РОСТА СТЕПЕНИ СВЯЗНОСТИ ВЕРШИН СЛУЧАЙНОГО ГРАФА В МОДЕЛЯХ ВИРТУАЛЬНЫХ СЕТЕЙ

Рассматриваются модели развития растущих сетей, в том числе виртуальных социальных сетей, основанные на графах Барабаши–Альберт и графах с нелинейным правилом предпочтительного связывания. Исследуются процессы роста степени связности узлов с учетом моментов вхождения этих узлов в сеть. Предлагается модификация рассматриваемого класса моделей, позволяющая учесть процессы естественной и регулируемой убыли узлов и связей сети.

**Ключевые слова:** растущие сети, случайные графы, стационарные и переходные случайные процессы.

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 12-07-00149-а.*

**Введение.** Для моделирования виртуальных сетей, создаваемых в Интернете, транспортных и информационно-телекоммуникационных сетей применяются большие случайные графы, состоящие из миллионов вершин и дуг, в частности, графы с линейным правилом предпочтительного связывания [1, 2], предложенные А. Барабаши и Р. Альберт, и графы с нелинейным правилом предпочтитель-

ного связывания (НППС) [3–6]. Основным достоинством таких графов является их адекватность, обеспечиваемая механизмом их выращивания, сходным с механизмом роста моделируемых сетей и принципиально отличающимся от способов генерации других случайных графов, в том числе от классических случайных графов Эрдеша–Реньи [7]. Адекватность используемых графовых моделей

является одним из наиболее актуальных направлений исследования больших сетей [8]. Вместе с тем до настоящего времени недостаточно изученным остается весьма важный в плане адекватности моделей вопрос — вопрос темпов эволюции вовлекаемых в сеть узлов. Например, в графе Барабаши — Альберт (графе БА), как показывает моделирование, наиболее высокосвязными, а значит, и наиболее привлекательными для присоединения к ним новых связей, оказываются, как правило, те вершины, которые входят в граф-затравку [9]. Если интерпретировать это явление в терминах моделируемой социальной сети, то получается, что те участники сети, которые раньше всех к ней подключились, набирают в последующем наибольшее количество связей, образуя высокосвязный компонент сети. Участники же, подключающиеся к сети позднее, имеют очень мало шансов стать ее «лидерами» по числу установленных связей, а значит, и не смогут оказывать какого-либо существенного влияния на сеть. Это приводит к предположению, что темпы эволюции вершин, добавляемых в граф БА на разных стадиях его развития, не соответствуют темпам эволюции соответствующих узлов социальной сети, в которой в любой момент времени могут появляться участники, способные занимать лидирующие позиции и создавать новые «центры притяжения».

В связи со сказанным в настоящей статье исследуются темпы эволюции вершин в графах предпочтительного связывания (т.е. в графах БА и графах с НППС) и предлагаются возможности для модификации моделей этого класса, позволяющие улучшить соответствие моделей реальным сетям за счет учета процессов естественной и регулируемой убыли узлов и связей сети.

**1. Принципы генерации графов предпочтительного связывания и темпы роста степени связности вершин.** Граф БА выращивается из какого-нибудь небольшого графа (затравки) путем добавления к нему в каждый из моментов времени  $t = 1, 2, \dots$  новой вершины с  $m = \text{const}$  инцидентными ей ребрами [1]. Вершину с пучком инцидентных ей ребер, добавляемую к графу, называем *приращением графа* или просто *приращением* [4]. При выращивании графа БА свободные концы ребер приращения связываются со случайно выбираемыми вершинами графа. Вероятность  $p_i$  того, что ребро приращения свяжется с некоторой вершиной  $i$ , пропорциональна ее локальной степени связности  $k_i$ :

$$p_i = k_i / \sum_j k_j. \quad (1)$$

Поэтому вершины, у которых больше ребер, с большей вероятностью обогащаются новыми ребрами. При  $t \rightarrow \infty$  вырастает бесконечный граф БА с распределением степени связности (РСС) вершин [1–6]

$$Q_k = \frac{2m(m+1)}{k(k+1)(k+2)}, \quad k = m, m+1, \dots, \quad (2)$$

где  $Q_k$  — вероятность того, что случайно выбранная вершина имеет степень связности  $k$ . Из (2) следует, что  $Q_k \sim 2m(m+1)k^{-3}$ , и при  $k \rightarrow \infty$   $Q_k \propto k^{-3}$ , т.е. РСС вершин графа БА является асимптотически-степенным (безмасштабным). По построению графа средняя степень связности его вершин  $M(k) = 2m$ .

В компьютерных экспериментах с графом БА обнаруживается, что степень связности вершин, которые входят в затравку или присоединяются на первых шагах времени, растет значительно

быстрее, чем степень вершин, присоединяемых позднее. Очевидно, это явление обусловлено самим правилом предпочтительного связывания (1), называемым также правилом «богатые становятся богаче». Ниже будут получены математические соотношения, описывающие рост степени произвольной вершины с учетом времени ее присоединения к графу и параметров затравки.

По аналогии с графом БА в [3] предложена более общая модель растущих сетей — графы с НППС. При выращивании графа с НППС используется весовая функция (функция предпочтения, вес)  $f = f(k)$ , определенная для целых  $k$  в промежутке  $g \leq k \leq M$ , ( $g \geq 1$ ,  $M \leq \infty$ ). В наборе весов  $\{f(g), f(g+1), \dots, f(M)\} = \{f_g, f_{g+1}, \dots, f_M\} = \{f_k\}$  все  $f_k \geq 0$  и хотя бы один положителен. Вероятность  $p_i$  того, что для связывания свободного конца ребра приращение выберет вершину  $i$ , определяется в виде

$$p_i = f(k_i) / \sum_j f(k_j). \quad (3)$$

Кроме того, у графов с НППС приращения в общем случае являются *стохастическими*, т.е. каждое приращение представляет собой вершину со случайным числом  $x$  инцидентных ей ребер. Случайная величина (с.в.)  $x$  имеет дискретное распределение вероятностей  $\{r_k\}$ , где вероятность  $r_k = P\{x = k\} \geq 0$  при  $g \leq k \leq h$ , ( $g \geq 1$ ,  $h \leq M$ ),  $r_g + \dots + r_h = 1$ . Среднее число ребер в приращении  $m = M(x) = \sum k r_k < \infty$ . Таким образом, алгоритм генерации (генератор) графа с НППС задается параметрами  $f$  и  $\{r_k\}$ . При  $x \equiv m = g$  стохастическое приращение вырождается в фиксированное, т.е. все приращения имеют одно и то же число  $m = g$  ребер. Если при этом  $f(k) = k$ , то граф с НППС вырождается в граф БА.

Методы анализа графов с НППС при любых  $f$  и  $\{r_k\}$  разработаны в [3]. Здесь же разработаны методы решения задачи синтеза, позволяющие по известному РСС узлов моделируемой сети найти параметры  $f$  и  $\{r_k\}$  генератора, выращивающего граф с таким же РСС.

У графов с НППС зависимость степени вершин от времени имеет более разнообразный характер, чем у графов БА. Например, если мы выберем функцию предпочтения  $f(k) = 1/k$  («бедные становятся богаче»), то «молодые» вершины, еще не наращившие свою степень, будут с большей вероятностью выбираться приращениями для связывания, чем «старые», и темпы роста у «молодых» вершин будут, соответственно, выше. В качестве другого примера для характеристики разнообразия графов с НППС можно привести псевдорешетки [3] — графы, в которых степени вершин с вероятностью 1 равны  $2m$ , т.е. одинаковы (несмотря на то, что эти графы выращиваются стохастическими приращениями и ребра между их вершинами распределяются хаотически). При выращивании псевдорешеток степени присоединяемых вершин быстро «подрастают» до  $2m$  и далее не изменяются.

**2. Динамика роста степеней при линейной функции предпочтения  $f(k) = k$ .** Рассмотрим случай выращивания графа при использовании линейной функции предпочтения

$$f(k) = k \quad (4)$$

и случайных приращений, у которых среднее число ребер  $M(x) = m$ .

Обозначим через  $N(t) = N_t$ ,  $R(t) = R_t$  и  $k(t) = k_t$  число вершин в графе, число ребер в графе

и степень выделенной вершины (ВВ) на шаге  $t$  ( $t = 0, 1, 2, \dots$ ).

Пусть на шаге  $t \gg 0$  математическое ожидание (м.о.) степени ВВ  $k_t$  равно  $\bar{k}_t$ . Найдем асимптотическое при  $t \rightarrow \infty$  выражение для м.о.  $\bar{k}_{t+1}$  степени ВВ на следующем шаге  $t + 1$ .

На шаге  $t + 1$  к графу добавляется приращение, содержащее одну вершину и  $x_{t+1} = x$  ребер. В соответствии с (3) и (4) первое ребро приращения связывается с ВВ с вероятностью  $p = k_t/S_t$ , где  $S_t = 2R_t$  — сумма степеней связности всех вершин на шаге  $t$ . Следовательно, в среднем первое ребро повышает степень ВВ на величину  $p \cdot 1 + (1 - p) \cdot 0 = p = k_t/S_t$ . Такое же среднее повышение степени ВВ дается каждым следующим ребром приращения (вероятностью того, что присоединится два или более ребер одного приращения, при больших  $t$  можно пренебречь). Таким образом, в сумме при фиксированных  $x$ ,  $k_t$  и  $S_t$  среднее повышение степени ВВ всеми ребрами приращения графа составляет

$$\Delta \sim xp = xk_t/S_t \quad (5)$$

Переходя от этого условного среднего к безусловному и принимая во внимание независимость с.в.  $x$ , имеем:

$$M(\Delta) \sim M\left[\frac{xk_t}{S_t}\right] = M(x)M\left[\frac{k_t}{S_t}\right] = mM\left[\frac{k_t}{S_t}\right]. \quad (6)$$

В выражении  $k_t/S_t$  с.в.  $k_t$  и  $S_t$  априори независимы. Заметим, однако, что с.в.  $S_t$  представляет собой сумму константы  $S_0$  и большого числа  $t$  независимых одинаково распределенных с.в.:

$$S_t = S_0 + 2x_1 + \dots + 2x_t$$

с одинаковыми м.о.  $2m$  и дисперсиями  $D(2x_i) = D(2x) = 4\sigma^2$  и, таким образом, согласно центральной предельной теореме теории вероятностей, сходится по распределению к нормальной с.в. со средним  $S_0 + 2tm$  и среднеквадратичным отклонением  $2\sigma\sqrt{t}$ :

$$S_t \in N(S_0 + 2tm, 2\sigma\sqrt{t}).$$

Нетрудно показать, что с ростом  $t$  с.в.  $1/S_t$  сходится по вероятности к константе  $1/M(S_t) = 1/(S_0 + 2tm)$ . Учитывая это, из (6) получаем

$$M(\Delta) \sim mM\left[\frac{k_t}{S_t}\right] \sim \frac{m\bar{k}_t}{S_0 + 2mt}$$

и находим искомое асимптотическое выражение для средней степени ВВ на шаге  $t + 1$ :

$$\begin{aligned} \bar{k}_{t+1} &= \bar{k}_t + M(\Delta) = \bar{k}_t + \frac{m\bar{k}_t}{S_0 + 2mt} = \\ &= \bar{k}_t \left(1 + \frac{m}{S_0 + 2mt}\right) \end{aligned} \quad (7)$$

Используя это асимптотическое рекурсивное решение при заданных  $m$ ,  $\bar{k}_0 = k_0$  и  $S_0$ , можно приближенно определить средние значения  $\bar{k}_t$  степени ВВ  $k_t$  на любом шаге  $t$  выращивания графа.

Перепишем соотношение (7) в виде  $\frac{\bar{k}_{t+1}}{\bar{k}_t} = 1 + \frac{m}{S_0 + 2mt}$ , или, иначе, в виде

$$\ln(\bar{k}_{t+1}) - \ln(\bar{k}_t) = \ln\left(1 + \frac{m}{S_0 + 2mt}\right)$$

и введем обозначение  $\ln(\bar{k}_t) = l_t$ . Тогда, поскольку при  $\varepsilon \rightarrow 0$   $\ln(1 + \varepsilon) \rightarrow \varepsilon$ , последнее полученное соотношение дает нам уравнение в конечных разностях:

$$l_{t+1} - l_t = \frac{m}{S_0 + 2mt}. \quad (8)$$

От уравнения (8) можно перейти к соответствующему дифференциальному уравнению (д.у.) и решить его аналитически. Действительно, при больших  $t$  функция  $l_t$  изменяются медленно. Поэтому в непрерывном времени  $t$  разность  $l_{t+1} - l_t$  можно рассматривать как дифференциал  $dl$ , а разность  $(t + 1) - t = 1$  — как  $dt$  и переписать уравнение (8) в виде аппроксимирующего его д.у.

$$\frac{dl_t}{dt} = \frac{m}{S_0 + 2mt}. \quad (9)$$

Это д.у. решается следующим образом:

$$l_t = \int \frac{m}{S_0 + 2mt} dt = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{S_0}{m} + 2t\right) + C_1,$$

$$\ln(\bar{k}_t) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{S_0}{m} + 2t\right) + C_1,$$

$$\bar{k}_t = C \left(\frac{S_0}{m} + 2t\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ где } C = e^{C_1}. \quad (10)$$

Константу  $C$  определим из начальных условий.

Полагая в (10)  $t = 0$  и  $\bar{k}_t = \bar{k}_0 = k_0$ , находим, что  $C = k_0 \left(\frac{m}{S_0}\right)^{\frac{1}{2}}$ . Подставив это выражение константы  $C$  в (10) и учитывая, что  $S_0 = 2R_0$ , получаем следующее асимптотическое решение задачи об изменении степени ВВ в процессе выращивания графа:

$$\bar{k}_t \sim k_0 \left(1 + \frac{mt}{R_0}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (11)$$

При больших  $t$  отсюда получаем приближение  $\bar{k}_t \approx a\sqrt{t}$ , где  $a = \sqrt{m/R_0}$ .

Очевидно, при целом  $m$  решение (11) описывает динамику роста степени ВВ и в соответствующем графе БА, все приращения которого имеют одно и то же фиксированное число ребер  $m$ .

### 3. Проверка точности полученного решения.

Разобьем проверку точности решения (11) на две части.

Вначале рассмотрим, насколько это аналитическое решение д.у. (9), аппроксимирующего рекуррентное соотношение (7), отличается от решений самого соотношения (7), которые мы можем получить в численном виде.

На рис. 1 кривая 1 (сплошная линия) — это непрерывная аппроксимация процесса  $\bar{k}_t$ , описываемая формулой (11), а круглыми маркерами представлен аппроксимируемый дискретный процесс, определяемый рекуррентным соотношением (7). Рассматриваемый граф G1 при  $t = 0$  имеет  $R_0 = 40$  ребер, степень ВВ  $k_0 = 4$  и средняя степень стохастического приращения  $m = 10$ . Как видно из рис. 1, решение (11) хорошо аппроксимирует решение

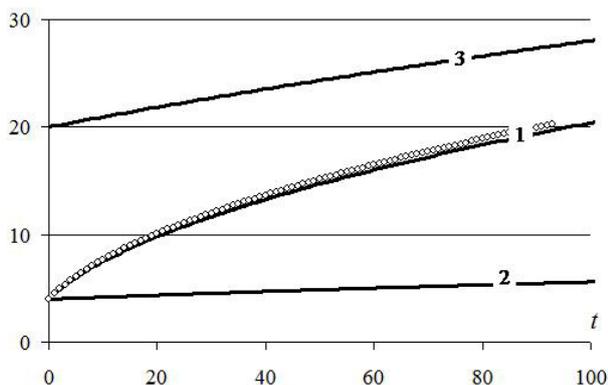


Рис. 1. Математическое ожидание  $\bar{k}_t$  процессов  $k_t$  роста степени ВВ в графе с линейным предпочтением  $f(k) = k$  и стохастическими приращениями

уравнения (7). Относительная погрешность аппроксимации с ростом  $t$  растет и стабилизируется на уровне 3 %. В общем случае, чем больше ребер имеется в графе при  $t = 0$ , тем меньше погрешность аппроксимации (11).

Кривая (2) на рис. 1 представляет м.о. процесса роста новой ВВ, взятой в этом же графе G1 на шаге 100. Состояние графа G1 на шаге 100 принято за начальное состояние нового графа G2. Число ребер в графе G1, на шаге 100 в среднем равно 1040, принято за число ребер  $R_0$  графа G2. Начальная степень  $k_0$  новой ВВ в графе G2 вновь взята равной 4. Различие между непрерывной аппроксимацией (11) и дискретным решением (7) для графа G2 стабилизируется уже на уровне 0,116 %, поэтому дискретное решение (7) визуально не отличается от непрерывного (11) и на рис. 1 не показано.

Аналогично по той же причине на рис. 1 показано только непрерывное решение для еще одной ВВ в графе G2, начальная степень которой  $k_0 = 20$  (кривая 3). Более высокая точность непрерывной аппроксимации обусловлена в случае графа G2 достаточно большим числом ребер  $R_0 = 1040$  в начальном состоянии графа (т.е. более медленным изменением степени ВВ).

Вторая часть проверки точности решения (11) состоит в его сравнении с имитационными решениями, в которых приращения  $\Delta$  степени  $k_t$  определяются непосредственно по формуле (5), т.е. путем генерации с.в.  $x$  на каждом шаге времени. Сравнение показывает, что отклонения типичных имитационных реализаций процесса  $k_t$  от решения (11) тоже достаточно невелики. Так, для рассмотренного выше графа G1 эти отличия находятся в пределах 10 %, а для графа G2 — в пределах 2 %. На рис. 2 показано отклонение типичного имитационного решения  $k_t$  от непрерывной аппроксимации (11).

**4. Направления развития графовых моделей для исследования социальных сетей.** Непосредственные имитационные эксперименты с выращиванием графов с линейной функцией предпочтения и стохастическим числом ребер в приращении подтверждают сделанные теоретические выкладки. При выращивании графов проводились наблюдения за ростом степени связности ВВ на длительном отрезке времени и выполнялся поиск аппроксимирующей функции  $k(t)$ . Для ВВ, изначально входящей

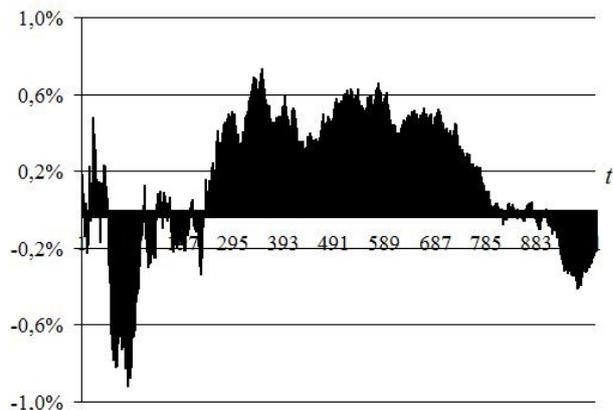


Рис. 2. Относительное отклонение  $(k_t - \bar{k}_t) / \bar{k}_t \cdot 100\%$  типичной имитационной реализации процесса  $k_t$  в графе G2 от непрерывного решения (11)

в граф-затравку, функция имеет вид  $k_t = 2,614t^{0,495}$  с коэффициентом достоверности аппроксимации 0,999 (как показано выше,  $\bar{k}_t \approx \alpha\sqrt{t}$ ).

Дальнейшим направлением исследований динамики роста вершин случайного графа является поиск решений и формул, аналогичных (5), (7), (11) для графов с НППС, а также поиск закономерностей динамики роста вершины, вводимой в граф в произвольный момент времени с высокой степенью связности, сопоставимой со степенью связности ведущих вершин графа.

Учет фактора времени и отслеживание динамики роста вершин в графовых моделях позволит придать дополнительную реалистичность моделям социальных сетей. В частности, актуальным становится решение следующих задач:

1. Удаление пассивных участников. Учет динамики степеней вершин графа позволяет идентифицировать медленно развивающиеся вершины сети и по какому-либо критерию удалять такие вершины из графа, моделируя выбытие из социальной сети пассивных участников.

2. Добавление новых лидеров. Включение в граф на каком-либо шаге вершины с большой степенью связности имитирует появление в сети нового активного участника, более привлекательного, чем «старые» лидеры.

Знание динамики роста такой вершины позволяет прогнозировать ее развитие.

Учет фактора времени ведет к тому, что генерируемый случайный граф будет постоянно менять структуру, из которой должны периодически выпадать «слабые» вершины вместе со всеми своими связями и появляться новые лидеры, а это будет отличать такой граф от стандартных графов Барабаши – Альберт и графов с НППС, применяемых для моделирования сетевых структур.

**Заключение.** Динамика роста степени вершин случайного графа различна для вершин, включенных в граф в разные моменты времени. В статье получено рекуррентное соотношение для определения степени вершины на каждом шаге времени и получено асимптотическое решение задачи об изменении степени ВВ в процессе выращивания графа. Достигнутые результаты позволяют говорить об учете фактора времени при генерации модели и открывают новые возможности для генерации графов, более адекватных реальным сетям.

1. Barabási, A.-L. Albert, R. Emergence of scaling in random networks // Science. — 1999. — V. 286. — P. 509–512.
2. Введение в математическое моделирование транспортных потоков / А. В. Гасников [и др.] ; под ред. А. В. Гасникова. — М. : МФТИ, 2010. — 362 с.
3. Задорожный, В. Н. Случайные графы с нелинейным правилом предпочтительного связывания / В. Н. Задорожный // Проблемы управления. — 2011. — № 6. — С. 2–11.
4. Zadorozhnyi, V., Yudin, E. Growing Network: Nonlinear Extension of the Barabasi-Albert Model // Communications in Computer and Information Science. — 2014. — V. 487. — P. 432–439.
5. Юдин, Е. Б. Моделирование устойчивости Интернет в условиях распространения вирусов и случайных отказов элементов сети / Е. Б. Юдин // Омский научный вестник. Сер. Приборы, машины и технологии. — 2010. — № 1 (87). — С. 190–194.
6. Юдин, Е. Б. Генерация случайных графов предпочтительного связывания / Е. Б. Юдин // Омский научный вестник. Сер. Приборы, машины и технологии. — 2010. — № 2 (90). — С. 188–192.

7. Erdos, P., Renyi, A. On random graphs I // Publ. Math. Debrecen. — 1959. — V. 6. — P. 290–297.

8. Clauset, A., Shalizi C. R., Newman M. J. Power-law distributions in empirical data // SIAM Rev. — 2009. — V. 51. — P. 661–703.

9. Krapivsky, P. L., Redner, S. Organization of growing random networks [Электронный ресурс]. — Режим доступа : <http://physics.bu.edu/~redner/pubs/pdf/organization.pdf> (дата обращения: 16.12.2014).

**ЗАДОРЖНЫЙ Владимир Николаевич**, доктор технических наук, доцент (Россия), профессор кафедры «Автоматизированные системы обработки информации и управления».

Адрес для переписки: e-mail [zwn@yandex.ru](mailto:zwn@yandex.ru)

**БАДРЫЗЛОВ Владимир Александрович**, аспирант кафедры «Автоматизированные системы обработки информации и управления».

Адрес для переписки: e-mail [v\\_bad@mail.ru](mailto:v_bad@mail.ru)

Статья поступила в редакцию 17.12.2014 г.

© В. Н. Задорожный, В. А. Бадрызов

УДК 519.6: 623.437.442

**В. Н. ТАРАСОВ  
И. В. БОЯРКИНА  
В. В. ДЕГТЯРЬ**

Сибирская государственная  
автомобильно-дорожная академия,  
г. Омск

Омский автобронетанковый  
инженерный институт

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ГРУЗОПОДЪЕМНОСТИ ПНЕВМОКОЛЕС

Выполнен анализ математических моделей грузоподъемности пневмоколес, выявлены их особенности и практические возможности.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, пневмоколесо, коэффициент жесткости, протектор, каркас, деформация.

Колеса с пневматическими шинами получили широкое применение на автомобилях, тракторах и других наземных транспортных средствах. Основными достоинствами пневмоколесного ходового механизма являются малое сопротивление качению и, следовательно, малая мощность, потребляемая при передвижении транспортного средства; способность гашения вертикальных колебаний, а также простота конструкции и надежность эксплуатации. Изучению свойств и характеристик пневмошин посвящены работы [1–4].

Важнейшим параметром пневмоколеса является грузоподъемность, под которой понимается такая величина вертикальной нагрузки на оси колеса, при которой обеспечивается оптимальный срок службы и рациональное использование шины при заданной скорости движения с учетом эксплуатационных расходов. Превышение допустимой грузоподъемности приводит к чрезмерной деформации шины, увеличению работы внутренних сил трения в шине

и возрастанию напряжения в нитях корда. Эти факторы способствуют быстрому износу шин. Занижение грузоподъемности шины также нежелательно, т.к. связано с ростом размеров шин и удорожанием их стоимости.

Грузоподъемность является главным параметром пневмоколеса, однако достаточно надежных аналитических методов расчета грузоподъемности шин в настоящее время нет. На практике грузоподъемность шин определяют опытным путем при помощи различных эмпирических и полуматематических формул.

Основным геометрическим параметром шины (рис. 1) является радиус  $r_0$  свободной окружности шины; ширина профиля  $B$ , высота профиля  $H$ ; диаметр посадочного диска  $d$ ; ширина диска  $c$ ; ширина беговой дорожки протектора  $b_{np}$ , измеряемая по дуге, и др.

В США и других странах для определения вертикальной нагрузки  $G$  на оси колеса используют

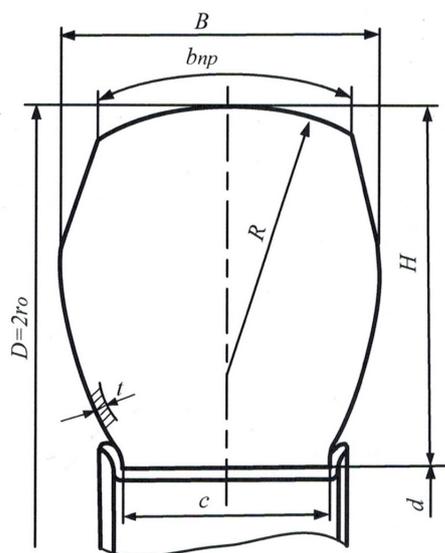


Рис. 1. Основные геометрические параметры шины по ГОСТ 17697-72

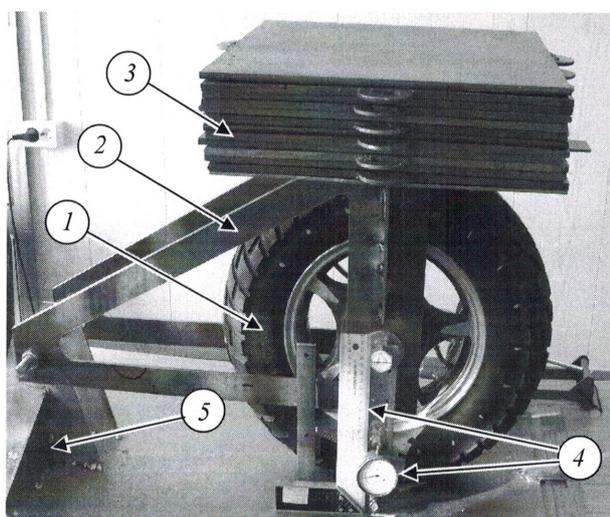


Рис. 2. Фото стенда для исследования пневмоколес: 1 — колесо; 2 — рама; 3 — груз; 4 — измерительные устройства; 5 — опорная плита

эмпирические формулы, которые в общем случае имеют вид

$$G = f(p_w^\alpha, B^\beta, D^\gamma, d^e, c^f, \dots), \quad (1)$$

где  $p_w$  — давление воздуха в шине;  $B$  — ширина профиля;  $\alpha, \beta, \gamma$  — показатели степени в виде постоянных величин или некоторых функций.

Подробный анализ этих исследований и их оценка выполнены в работе [1].

При определении грузоподъемности шин для автокранов, прицепов, передвижных мастерских, кранов-манипуляторов и т. п., целесообразно увеличивать грузоподъемность шины с целью извлечения максимальной эффективности, т. к. в этих случаях шины приходят в негодность в результате временного старения, а не в результате износа протектора или каркаса. Из выполненных исследований наиболее значимым является метод расчета номинальных нагрузок, разработанный В. А. Бидерманом [1].

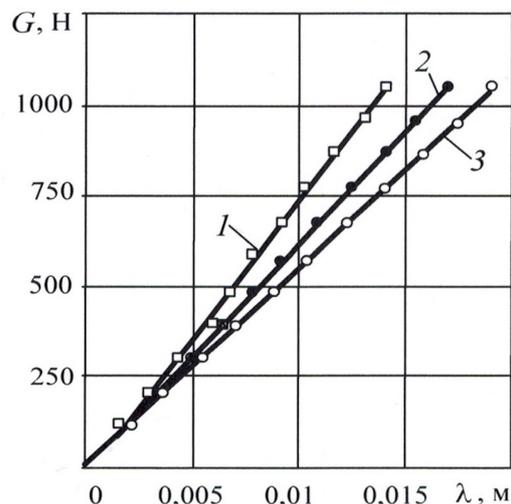


Рис. 3. Зависимость вертикальных нагрузок  $G$  на оси колеса от нормальной деформации шины  $\lambda$  при разных давлениях воздуха  $p_w$ : 1 — 0,28 МПа; 2 — 0,20 МПа; 3 — 0,16 МПа

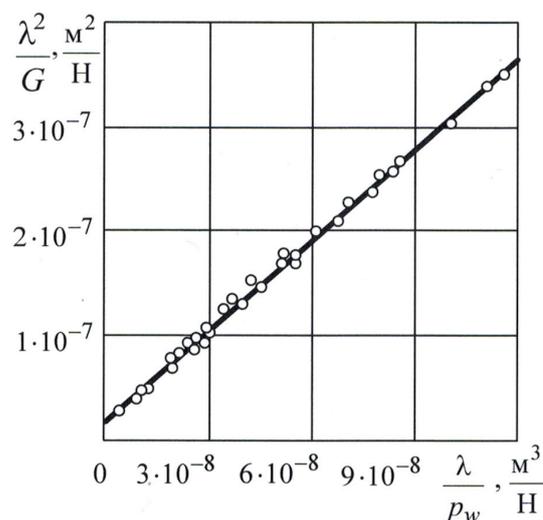


Рис. 4. Универсальная характеристика шины 3.00-8: зависимость  $\lambda^2/G$  от  $\lambda/p_w$

Условия подобия шин характеризуются отношениями геометрических параметров:  $H/B$ ;  $d/B$ ;  $c/B$ ;  $t/B$ ;  $\lambda/B$  и др. Для геометрически подобных шин с увеличением ширины профиля шины  $B$  увеличиваются размеры шины и число слоев корда.

Силовое подобие рассматривается при соответствующих давлениях воздуха и нагрузках на оси колеса.

Для этого необходимо и достаточно, чтобы отношение  $\lambda/B$  ( $\lambda$  — нормальная деформация колеса) было одинаковым для физической модели и натуре колеса.

На рис. 2 представлен изготовленный экспериментальный стенд, на котором выполнено физическое моделирование шины 3.00-8, с целью определения основных параметров и характеристик.

На рис. 3 представлены зависимости нормальной деформации шины  $\lambda$  от вертикальных нагрузок  $G$  на оси колеса при разных давлениях воздуха в шине  $p_w = 0,28; 0,20; 0,16$  МПа.

Нормальная деформация пневмоколеса	Деформация протектора и каркаса		Коэффициенты жесткости протектора, каркаса и пневмоколеса		
	$\lambda_{\text{п}}$ , м	$\lambda_{\text{к}}$ , м	$C_{\text{п}}$ , Н/м	$C_{\text{к}}$ , Н/м	$C$ , Н/м
0,014	0,001722	0,012275	$0,7 \cdot 10^6$	$0,982 \cdot 10^5$	$0,86120 \cdot 10^5$

Согласно В. Л. Бидерману [1], нормальная деформация шины  $\lambda$  складывается из деформации протектора  $\lambda_{\text{п}}$  и деформации каркаса  $\lambda_{\text{к}}$ :

$$\lambda = \lambda_{\text{п}} + \lambda_{\text{к}} = G / C_{\text{п}} + G / C_{\text{к}} \quad (2)$$

где  $C_{\text{п}}$ ,  $C_{\text{к}}$  — соответственно коэффициент жесткости протектора и каркаса, которые представляют собой элементы жесткости, соединенные последовательно.

Коэффициент жесткости пневмоколеса при последовательном соединении элементов определяется по формуле

$$C = \frac{C_{\text{п}} C_{\text{к}}}{C_{\text{п}} + C_{\text{к}}} \quad (3)$$

Коэффициенты жесткости протектора  $C_{\text{п}}$  и каркаса  $C_{\text{к}}$  можно представить в виде выражений

$$C_{\text{п}} = \lambda / c_1; \quad C_{\text{к}} = p_w / c_2 \quad (4)$$

где  $c_1$ ,  $c_2$  — постоянные величины.

Функцию  $C_{\text{к}}$  упростили путем исключения добавки  $p_o$  к давлению  $p_w$  в числителе формулы (4) путем исключения низких и нулевых давлений при экспериментальном исследовании работы шины.

Выражение (2) для нормальной деформации приводится к виду  $\lambda = \frac{G}{\lambda / c_1} + \frac{G}{p_w / c_2}$ . Полученные выражения позволяют определять деформации протектора и каркаса  $\lambda_{\text{п}} = \frac{G}{\lambda} c_1$ ,  $\lambda_{\text{к}} = \frac{G}{p_w} c_2$ .

Подставляя эти величины в выражение (2), после преобразований получим

$$G = \frac{\lambda^2}{c_1 + \frac{c_2}{p_w} \lambda} \quad (5)$$

Формулу (5) можно представить в следующем виде

$$\frac{\lambda^2}{G} = c_2 \frac{\lambda}{p_w} + c_1 \quad (6)$$

Выражение (6) рассматривается как аналитическая функция, в которой каждому значению величины  $\lambda^2/G$  соответствует одно определенное значение переменной  $\lambda/p_w$ . Выражение  $\lambda^2/G$  является зависимой переменной функцией, а  $\lambda/p_w$  — независимой переменной или аргументом.

Таким образом, выражение (6) является уравнением прямой линии в рассмотренных координатах [4].

На рис. 4 для шины 3.00-8 представлена зависимость  $\lambda^2/G$  от  $\lambda/p_w$ , которая получила название «универсальная характеристика пневмоколеса» [1].

Для шины 3.00-8 представлено уравнение регрессии этой зависимости с коэффициентом корреляции  $R^2 = 0,97$

$$\frac{\lambda^2}{G} = 2,8508 \frac{\lambda}{p_w} + 2 \cdot 10^{-8} \quad (7)$$

Используя выражения (6) и (7), получили значения  $c_1 = 2 \cdot 10^{-8}$  м<sup>2</sup>/Н;  $c_2 = 2,8508$  1/м. Найденные величины позволяют определять различные параметры и характеристики шины 3.00-8.

Используя выражения (4), можно определить коэффициенты жесткости протектора  $C_{\text{п}}$  и каркаса  $C_{\text{к}}$  (табл. 1). Коэффициент жесткости пневмоколеса  $C$  вычисляется по формуле (3).

Деформации протектора и каркаса определяют по формулам:

$$\lambda_{\text{п}} = G / C_{\text{п}}; \quad \lambda_{\text{к}} = G / C_{\text{к}} \quad (8)$$

На рис. 3 кривая 1 аппроксимирована уравнением регрессии  $G = 532371\lambda^2 + 66935\lambda$ . Согласно ГОСТ 17697-72, производная от  $G$  по  $\lambda$  есть функция коэффициента жесткости колеса:  $C = 1064742\lambda + 66935$ .

Для деформации  $\lambda = 0,014$  м имеем коэффициент жесткости колеса  $81840$  Н/м. Нагрузка на оси пневмоколеса 3.00-8 равна  $G = C\lambda = 86100 \cdot 0,014 = 1205,4$  Н.

Рассмотренный метод В. Л. Бидермана для определения коэффициентов  $c_1$ ,  $c_2$  по универсальной характеристике и предложенные методы физического моделирования имеют важное научное и практическое значение. В данной статье выполнены эксперименты с малой физической моделью шины 3.00-8, которые можно перенести на другие подобные шины.

Известны также формулы [1] для определения нормальной деформации шины

$$\lambda = \frac{c_2 G}{2 p_w} + \sqrt{\left(\frac{c_2 G}{2 p_w}\right)^2 + c_1 G}, \quad (9)$$

и давления воздуха в шине

$$p_w = \frac{c_2 G \lambda}{\lambda^2 - c_1 G} \quad (10)$$

С помощью полученных экспериментально величин  $c_1$  и  $c_2$  по формулам (9), (10) вычислены значения  $\lambda = 0,015$  и  $p_w = 0,28$  МПа, которые обеспечивают достаточную точность расчетов.

Рассмотренный метод исследования позволяет определять важные параметры и величины пневмоколеса.

Однако недостатком метода является малое число используемых параметров пневмоколеса ( $G$ ,  $p_w$ ,  $\lambda$ ), которые не позволяют в полной мере анализировать условия работы каркаса шины и рассматривать

влияние геометрических и конструктивных параметров на грузоподъемность.

#### Библиографический список

1. Бидерман, В. Л. Автомобильные шины (конструкция, расчет, испытания, эксплуатация) [Текст] / В. Л. Бидерман. — М. : Госхимиздат, 1963. — 384 с.
2. Работа автомобильной шины [Текст] / В. И. Кнороз [и др.]. — Транспорт, 1976. — 238 с.
3. Ульянов, Н. А. Теория самоходных колесных землеройно-транспортных машин [Текст] / Н. А. Ульянов. — М. : Машиностроение, 1969. — 520 с.
4. Выгодский, М. Я. Справочник по математике [Текст] / М. Я. Выгодский. — М. : АСТ; Астрель, 2011. — 1055 с. — ISBN 978-5-17-053833-1.

**ТАРАСОВ Владимир Никитич**, доктор технических наук, профессор (Россия), профессор кафедры механики Сибирской государственной автомобильно-дорожной академии (СибАДИ).

**БОЯРКИНА Ирина Владимировна**, доктор технических наук, доцент (Россия), профессор кафедры механики СибАДИ.

**ДЕГТЯРЬ Владимир Владимирович**, заведующий кафедрой эксплуатации автобронетанковой и автомобильной техники Омского автобронетанкового инженерного института.

Адрес для переписки: tarasov\_vladimir07@mail.ru

Статья поступила в редакцию 24.11.2014 г.

© В. Н. Тарасов, И. В. Бояркина, В. В. Дегтярь

УДК 519.6: 623.437.442

**В. Н. ТАРАСОВ  
И. В. БОЯРКИНА  
В. В. ДЕГТЯРЬ**

Сибирская государственная  
автомобильно-дорожная академия,  
г. Омск  
Омский автобронетанковый  
инженерный институт

## ФИЗИЧЕСКОЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГРУЗОПОДЪЕМНОСТИ ПНЕВМОКОЛЕС

Выполнено математическое моделирование грузоподъемности пневмоколеса на основе метода отсечения контакта от оболочки шины, рассмотрена методика физического моделирования пневмоколеса на экспериментальном стенде.

**Ключевые слова:** грузоподъемность, оболочка, площадь контакта, подъемная сила, нормальная деформация.

Главным силовым параметром пневмоколеса является его грузоподъемность. Обзор выполненных работ позволил установить три основных направления развития теории грузоподъемности пневмоколеса. Направление исследований с применением эмпирических зависимостей позволило накопить опыт создания шин для различных условий эксплуатации [1]. Второе направление базируется на использовании закона Гука и устанавливает связь грузоподъемности, нормальной деформации колеса и давления воздуха в шине. К этому направлению относятся работы В. Л. Бидермана и других авторов [2].

Третье направление составляют работы, связанные с применением законов Гука и Паскаля, использующие метод отсечения контакта шины от пневматической оболочки [3]. Работы этого направления позволяют установить связь грузоподъемности  $G$  с геометрическими параметрами и давлением воздуха в пневмоколесе.

Рассмотрим сущность явления грузоподъемности пневмоколеса и физическую сущность термина подъемная сила пневмоколеса. На рис. 1а показано равновесие оболочки шины с отсеченным

контактом, на рис. 1б представлено равновесие отсеченного контакта шины, на рис. 1в показано равновесие оболочки с вырезанным контактом в продольной плоскости колеса.

Отсечение контакта шины от оболочки выполнено вертикальной поверхностью, замкнутой по периметру контакта шины.

Для пояснения сущности термина «подъемная сила колеса» рассмотрим равновесие отсеченного контакта шины и действующие силы на рис. 1б.

Нормальные напряжения  $\sigma_n$  в поверхности сечения и элементарные моменты  $M_k$  по периметру контакта шины взаимно уравновешены на замкнутой траектории периметра контакта [4].

Неуравновешенными в замкнутом сечении остаются только касательные вертикальные напряжения, равнодействующая которых является дополнительной силой, воспринимаемой каркасом шины

$$\Delta G = \int_s \sigma_t dS,$$

где  $\sigma_t$  — вертикальное касательное напряжение в поверхности сечения на замкнутом периметре

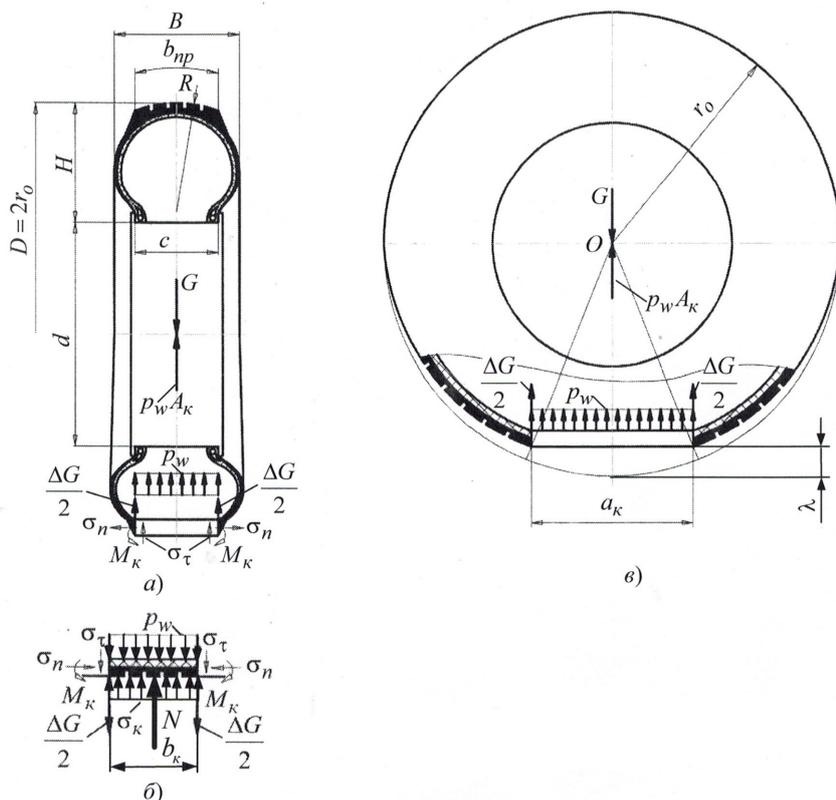


Рис. 1. Отсечение контакта от оболочки шины

контакта шины с опорной поверхностью,  $S$  — поверхность сечения.

На рис. 1 сила  $\Delta G$  условно показана в виде двух сосредоточенных сил  $0,5\Delta G$ , приложенных в левой и правой точках контакта и оболочки шины.

Для равновесия оболочки колеса на рис. 1а приложены одноименные силы контакта колеса на оболочку с противоположным направлением.

При этом эпюра равномерных давлений  $p_w$  направлена вверх и создает подъемную силу колеса,  $p_w A_k$ , приложенную к оси колеса. Для пневмоколеса, как единого твердого тела, справедливо уравнение равновесия

$$\sum y_i = 0; \quad N - G = 0, \quad (1)$$

где  $G$  — сила на оси колеса;  $N$  — нормальная опорная реакция.

Нормальную опорную реакцию можно выразить, используя среднее давление  $\sigma_k$  в контакте и площадь контактной поверхности  $N = \sigma_k A_k$ .

При этом характер распределения удельных давлений в контакте не имеет значения. Поэтому для колеса, как для единого твердого тела, уравнение равновесия колеса (1) имеет вид

$$\sigma_k A_k - G = 0. \quad (2)$$

Используя рис. 1 для отсеченного контакта шины, можно записать следующее уравнение равновесия

$$\sigma_k A_k - p_w A_k - \Delta G = 0, \quad (3)$$

где  $p_w A_k$  — подъемная сила пневмошины;  $\Delta G$  — равнодействующая распределенных вертикальных сил в секущей поверхности.

Учитывая (2), представим уравнение (3) в виде

$$G - p_w A_k + \Delta G = 0. \quad (4)$$

В связи с введением термина подъемная сила колеса пневмошины, используя уравнение (4), можно сформулировать понятие «номинальный режим работы пневмоколеса». Номинальным является такой режим, при котором подъемная сила колеса  $p_w A_k$  воспринимает нагрузку на оси колеса, при этом сила  $\Delta G$  каркаса шины равна нулю или может иметь некоторое минимальное значение. Это означает, что вертикальная нагрузка на оси колеса воспринимается воздухом, а каркас шины разгружен от действия вертикальной силы, приложенной к оси. Однако, учитывая, что пневмоколесо перемещается по неровной опорной поверхности, вертикальная нагрузка при движении значительно изменяется и не может быть постоянной, необходимо рассмотреть режимы нагружения колеса, отличающиеся от номинального в обе стороны. Если давление воздуха в шине в уравнении (4) будет больше номинального, то в каркасе шины появляется дополнительная вертикальная сила, растягивающая каркас.

Уравнение равновесия в этом режиме работы имеет вид

$$G - p_w A_k = -\Delta G. \quad (5)$$

Это означает, что подъемная сила контакта  $p_w A_k$  превысила нагрузку  $G$  на колесе, поэтому в каркасе появляется отрицательная сила  $\Delta G$ , которая разгружает каркас шины растягивающей силой и создает для него благоприятные условия работы.

В другом режиме работы колеса при давлении  $p_w < p_n$  подъемная сила  $p_w A_k$  меньше нагрузки на колесо, тогда каркас шины воспринимает часть

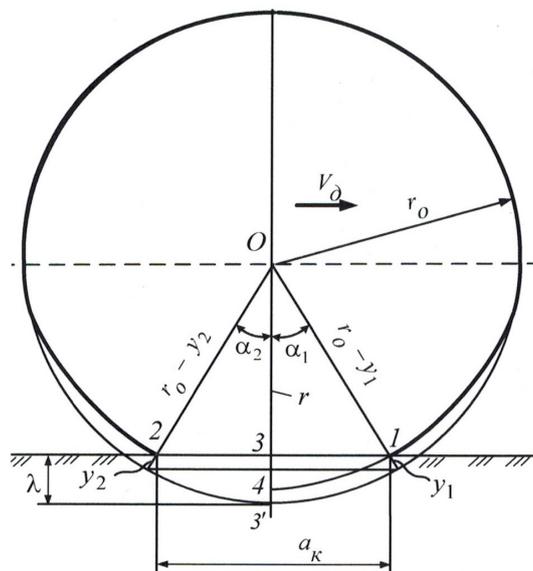


Рис. 2. Радиальная деформация элементов протектора шины при качении колеса

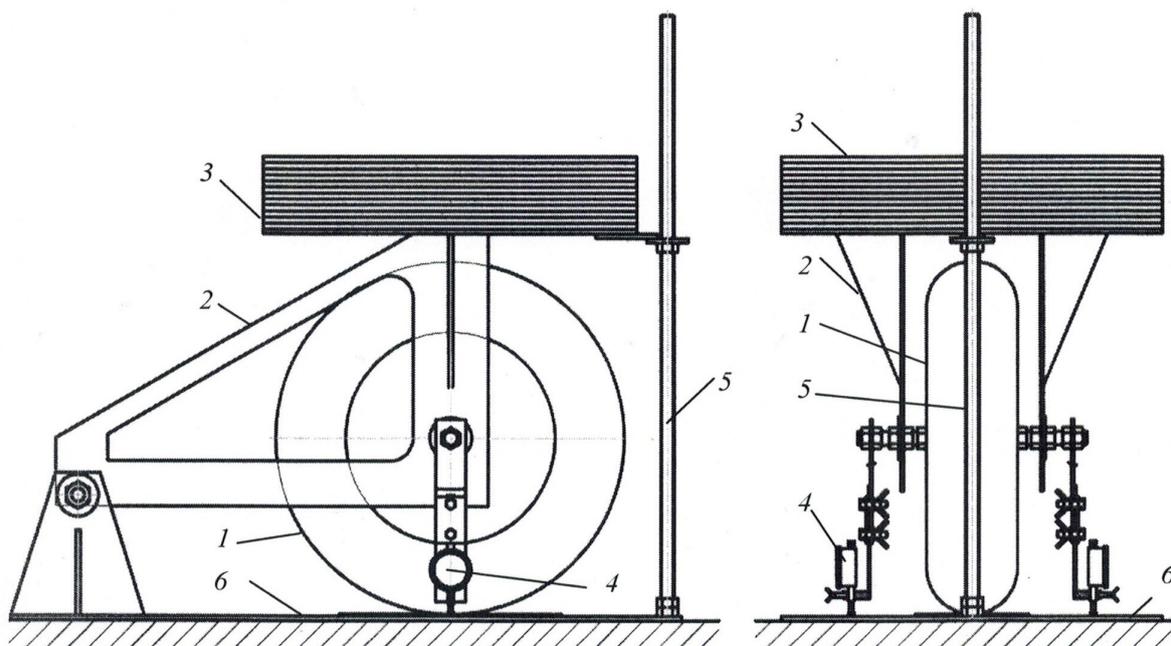


Рис. 3. Стенд для статических и динамических исследований пневмоколеса:  
1 — колесо; 2 — рама; 3 — груз; 4 — измерительные устройства, установленные с двух сторон колеса;  
5 — штанга для регулирования высоты падения колеса с грузом при динамических испытаниях; 6 — опорная плита

нагрузки колеса в виде положительной силы  $\Delta G$ . В этом случае имеем уравнение равновесия в виде

$$G - p_w A_x = \Delta G. \quad (6)$$

Нагрузка  $G$  на оси колеса воспринимается воздухом с дефицитом, т.е. не полностью, при этом некоторая ее часть  $\Delta G$  воспринимается каркасом шины. Предложенный метод расчета грузоподъемности пневмоколеса позволяет не только установить величину нагрузки на оси колеса, но и получить дополнительную информацию о работе каркаса шины.

Режим положительных нагрузок  $\Delta G$  для пневмоколеса может быть рациональным в том случае, когда необходимо при помощи шин при отсутствии рессор и демпферов обеспечить демпфирование

вертикальных колебаний колеса. Такой режим работы характерен для трейлеров, прицепов, кранов и т.п. Режим отрицательных нагрузок каркаса целесообразно использовать в случае, когда пневмоколесо находится в подвеске, т.е. имеет дополнительные рессоры и гасители колебаний в виде демпферов. Отрицательные значения усилий в каркасе ( $-\Delta G$ ) целесообразны для создания шин с малым сопротивлением качения, с увеличенными пробегами и малым потреблением мощности двигателя при качении.

Данный метод расчета грузоподъемности шины представляет практическую ценность с точки зрения выявления максимальных возможностей пневмоколеса и повышения эффективности эксплуатации. Целью исследования является создание

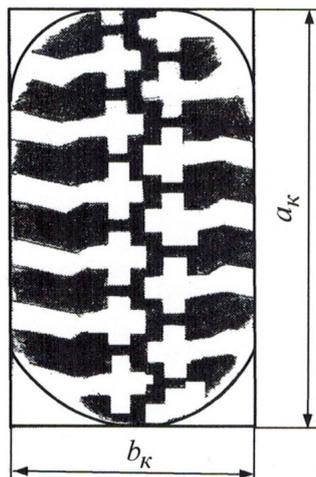


Рис. 4. Отпечаток площади контакта шины 3.00-8 при давлении  $p_w = 0,16$  МПа

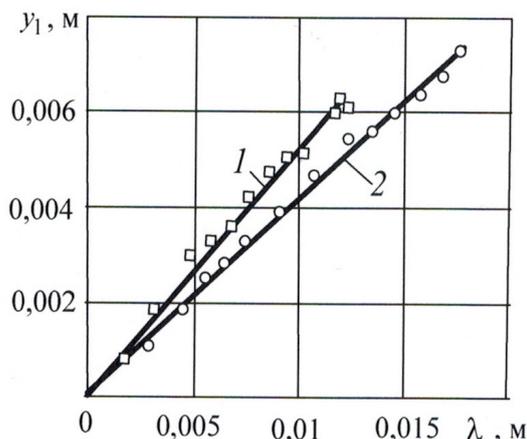


Рис. 5. Зависимости начальной деформации  $y_1$  от нормальной деформации  $\lambda$  при разных давлениях  $p_w$ : 1 — 0,28 МПа; 2 — 0,05 МПа

Результаты экспериментальных исследований, выполненных с шиной 3.00-8 для разных давлений при нагрузке на оси колеса  $G=1053,5$  Н

Таблица 1

Давление воздуха в шине $p_w$ , МПа	Нормальная деформация шины $\lambda$ , м	Площадь контакта $A_k$ , м <sup>2</sup>	Подъемная сила контакта $p_w A_k$ , Н	Вертикальная нагрузка каркаса $\Delta G$ , Н	Относительная вертикальная нагрузка каркаса %
0,28	0,0130	0,0038	1064,0	-10,5	-1,0
0,24	0,0143	0,0042	1000,0	53,5	5,1
0,2	0,0155	0,00486	972,0	81,5	7,7
0,16	0,0170	0,00565	904,0	149,5	14,2

математической модели и методики физического моделирования, позволяющих определять грузоподъемность пневмоколеса с использованием метода отсечения контакта от оболочки шины. Основные параметры и размеры пневмоколеса регламентированы ГОСТ 17697-72.

В работах Н. А. Ульянова [5] при помощи датчика радиальной деформации, встроенного внутрь шины, установлено, что элементы протектора пневмошины радиально деформируются задолго до соприкосновения с опорной поверхностью.

На рис. 2 в точке 1 шина имеет начальную деформацию  $y_1$ , а при выходе из контакта в точке 2 элементы шины имеют конечную радиальную деформацию  $y_2$ . Естественно, что в статике  $y_1 = y_2$ , а при качении вследствие гистерезисных явлений  $y_2 > y_1$ .

Установлено, что радиальная деформация шины  $y_1$  зависит от нормальной деформации шины [6]

$$y_1 = k\lambda, \quad (7)$$

где  $k$  — коэффициент начальной деформации шины;  $\lambda$  — нормальная деформация шины.

Разработан метод, позволяющий определять начальную деформацию  $y_1$  пневмошины без использования датчика радиальной деформации, установленного внутри колеса. Для этого на разработанном экспериментальном стенде (рис. 3) для различных нагрузок  $G$  на оси колеса измеряется нормальная деформация шины  $\lambda$  и выполняются отпечатки площади контакта шины с помощью копировальной бумаги (рис. 4).

Начальную деформацию шины можно определять по формуле

$$y_1 = r_o - \frac{r_o - \lambda}{\cos \alpha_1}, \quad (8)$$

где  $r_o$  — радиус свободной окружности шины, определяемый при соответствующем давлении  $p_w$ ;  $\alpha_1$  — угол контакта шины с опорной поверхностью (см. рис. 2).

Угол  $\alpha_1$  определяется по формуле

$$\alpha_1 = \arctg \frac{0,5a_k}{r_o - \lambda}. \quad (9)$$

Полученные формулы позволяют определить коэффициент начальной деформации

$$k = \frac{y_1}{\lambda} = \frac{r_o}{\lambda} - \frac{r_o - \lambda}{\lambda \cos \alpha_1}. \quad (10)$$

Контактная поверхность шины, отсеченная от оболочки каркаса, может иметь форму круга, эллипса, овала и т.п. Предложена универсальная формула для определения площади контакта шины (см. рис. 4)

$$A_k = (a_k - b_k)b_k + \frac{\pi b_k^2}{4}, \quad (11)$$

где  $a_k, b_k$  — длина и ширина контакта шины.

Для пневмоколеса 3.00-8 получены экспериментальные зависимости начальной деформации  $y_1$  от нормальной деформации  $\lambda$  (рис. 5). Аппроксимация результатов экспериментов выполнена линейными

зависимостями. Установлено, что в диапазоне изменения давления воздуха  $p_w = 0,28-0,05$  МПа коэффициент начальной деформации  $k$  изменяется в пределах  $k = 0,512-0,395$ .

В табл. 1 представлены результаты выполненных экспериментов, которые показали, что подъемная сила колеса  $p_w A_k$  зависит от давления воздуха и площади контакта пневмошины, при этом нагрузка, воспринимаемая каркасом, уменьшается с увеличением давления воздуха в шине и уменьшении нормальной деформации.

Оптимизацию вертикальной нагрузки на оси колеса можно выполнять путем минимизации вертикальной силы, воспринимаемой каркасом.

Выполненный эксперимент показывает, что в зависимости от условий эксплуатации рассматриваемое пневмоколесо может работать в режиме демпфирования колебаний каркасом шины при давлении  $p_w = 0,24$  МПа или в режиме малых сопротивлений качения при давлении  $p_w = 0,28$  МПа.

#### Библиографический список

1. Работа автомобильной шины [Текст] / В. И. Кнороз [и др.]. — Транспорт, 1976. — 238 с.
2. Бидерман, В. Л. Автомобильные шины (конструкция, расчет, испытания, эксплуатация) [Текст] / В. Л. Бидерман. — М. : Госхимиздат, 1963. — 384 с.
3. Тарасов, В. Н. Исследование влияния основных параметров эластичных колес на тяговые качества самоходных зем-

леройных машин : дис. ... канд. техн. наук : 05.05.04 [Текст] / Тарасов Владимир Никитич. — Омск, 1965. — 270 с.

4. Бояркина, И. В. Технологическая механика одноковшовых фронтальных погрузчиков : моногр. [Текст] / И. В. Бояркина. — Омск : СибАДИ, 2011. — 336 с. — ISBN 978-5-93204-605-0.

5. Ульянов, Н. А. Теория самоходных колесных землеройно-транспортных машин [Текст] / Н. А. Ульянов. — М. : Машиностроение, 1969. — 520 с.

6. Тарасов, В. Н. Теоретический радиус качения эластичного колеса [Текст] / В. Н. Тарасов // Автомобильная промышленность. — 1965. — № 1. — С. 5–6.

**ТАРАСОВ Владимир Никитич**, доктор технических наук, профессор (Россия), профессор кафедры механики Сибирской государственной автомобильно-дорожной академии (СибАДИ).

**БОЯРКИНА Ирина Владимировна**, доктор технических наук, доцент (Россия), профессор кафедры механики СибАДИ.

**ДЕГТЯРЬ Владимир Владимирович**, заведующий кафедрой эксплуатации автобронетанковой и автомобильной техники Омского автобронетанкового инженерного института.

Адрес для переписки: tarasov\_vladimir07@mail.ru

Статья поступила в редакцию 24.11.2014 г.

© В. Н. Тарасов, И. В. Бояркина, В. В. Дегтярь

## Книжная полка

51/P69

**Романовский, Р. К. Элементы математической теории устойчивости : учеб. пособие / Р. К. Романовский, Е. Н. Стратилатова. — Омск : ОмГТУ, 2014. — 1 о=эл. опт. диск (CD-ROM).**

Учебное пособие посвящено краткому изложению круга идей и методов Ляпунова в теории устойчивости. Найдена простая методика разъяснения ряда узловых понятий. Содержит приложения к задачам теории автоматического управления, набор задач для самостоятельного решения и варианты контрольных работ для студентов заочной формы обучения. Предназначено для методического обеспечения курсов «Устойчивость механических систем» и «Устойчивость управления движением» для студентов специальности 150301 «Динамика и прочность машин». Может быть использовано при чтении курса «Теория автоматического управления» для студентов технических специальностей, а также в качестве элементарного руководства для инженеров и научных работников, применяющих методы теории устойчивости.

537/Б73

**Богачков, И. В. Электромагнитные поля и волны : учеб. пособие для вузов по направлению подгот. 11.03.02, 11.04.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» квалификации (степени) «бакалавр», «магистр» и 11.05.04 «Инфокоммуникационные технологии и системы специальной связи» квалификации «специалист». В 2 ч. Ч. 2. Электромагнитные волны в средах и устройствах / И. В. Богачков. — Омск : ОмГТУ, 2014. — 115 с. — ISBN 978-5-8149-1871-0.**

Рассмотрены основные разделы, изучение которых необходимо для освоения последующих дисциплин: «Распространение радиоволн и антенно-фидерные устройства», «Направляющие среды в сетях электро-связи и методы их защиты», «Направляющие среды в телекоммуникациях», «Устройства СВЧ и антенны». Учебное пособие разработано на кафедре «Средства связи и информационная безопасность» и предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров 11.03.02, 210700.62 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» и дипломированных специалистов 11.05.04, 210701.65 «Инфокоммуникационные технологии и системы специальной связи», изучающих дисциплину «Электромагнитные поля и волны», а также может использоваться в учебном процессе других радиотехнических направлений подготовки.

## ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ОБЪЕМНЫХ И ПОВЕРХНОСТНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В УСЛОВИЯХ ВРАЩЕНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ДАТЧИКАХ ПАРАМЕТРОВ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ

Исследована возможность создания датчиков угловой скорости на базе объемных и поверхностных акустических волн. Представлен теоретический анализ, а также результаты экспериментальных исследований влияния вращения на распространение акустических волн в твердых средах. Предложены новые концепции построения датчиков угловой скорости.

**Ключевые слова:** объемные акустические волны, поверхностные акустические волны, твердая среда, вращение, датчики угловой скорости.

Датчики параметров движения, предназначенные для измерения угловой скорости, широко используются в различных областях, в частности в области приборостроения, а именно в приборах ориентации, инерциальной навигации и систем управления подвижными объектами, в том числе в системах наведения. Класс микромеханических гироскопов (ММГ), широко применяемый на данный момент, однако, имеет недостаточную устойчивость к динамическим и вибрационным нагрузкам, так как в их конструкцию входит механический колебательный элемент на упругих подвесах. Это не позволяет использовать ММГ в областях, требующих устойчивости к повышенным нагрузкам, например, в изделиях военно-промышленного комплекса специального назначения. Поэтому в последние годы существенно возрос интерес к исследованию возможностей построения чувствительных элементов датчиков параметров движения на базе акустических колебаний, где для получения информативного сигнала использовались бы инерциальные свойства упругих волн, распространяющихся в твердой среде. В связи с этим в настоящее время большое внимание уделяется анализу особенностей распространения высокочастотных ультразвуковых колебаний в условиях вращения материала среды распространения и использованию этих особенностей для построения датчиков движения [1–5]. В работе [2] очевидно впервые было показано, что колебания частиц в акустических волнах сопровождаются инерциальными эффектами, что делает возможным использование этих волн в гироскопии в целях создания чувствительных элементов датчиков параметров движения, отличающихся устойчи-

востью к нагрузкам и достаточной точностью при сохранении конструктивной простоты и необходимой чувствительности.

В равномерно вращающейся с угловой скоростью  $\vec{\Omega}$  среде помимо линейного ускорения  $\vec{a}_{\text{лин}} = \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2}$  на тело действуют центробежные  $\vec{a}_{\text{ц.с}} = \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{\xi})$  и кориолисово  $\vec{a}_{\text{кор}} = 2\vec{\Omega} \times \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t}$  ускорения. Поэтому уравнение движения во вращающейся среде будет иметь следующий вид:

$$\rho \left( \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2} + 2(\epsilon_{ink} \Omega_n) \frac{\partial \xi_k}{\partial t} + (\Omega_i \Omega_k \xi_k - \Omega_k \Omega_i \xi_i) \right) = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \quad (1)$$

где  $\rho$  — плотность среды,  $\xi_i$  — вектор смещения,  $\sigma_{ik} = C_{iklm} u_{lm}$  — тензор механических напряжений,  $C_{iklm}$  — тензор модулей упругости материала звукопровода,  $u_{lm} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \xi_l}{\partial x_m} + \frac{\partial \xi_m}{\partial x_l} \right)$  — тензор деформации,  $x_k, t$  — пространственная и временная координаты,  $\epsilon_{ink}$  — символ Леви–Чивита.

На основании общего уравнения движения (1) авторами настоящей статьи был проанализирован частный случай распространения сдвиговой объемной акустической волны (ОАВ) в изотропной твердой среде при наличии вращения, при этом ось вращения совпадала с направлением распространения ОАВ.

Подробный анализ скорости распространения и направления вектора поляризации колебаний частиц в волне [3, 4] показал, что движение частиц в волне определяется сложением двух базовых волн

и описывается круговой поляризацией. При распространении в условиях вращения, из-за разницы скоростей компонент волны характер движения частиц будет изменяться. Линейный характер движения при этом сохранится, однако направление колебаний будет непрерывно меняться, т.е. возникает вращение направления поляризации упругой волны. При этом угол поворота направления поляризации волны  $\beta$  определяется как

$$\beta = \frac{x}{V_0} \Omega = \tau \Omega. \quad (2)$$

Здесь  $V_0 = \sqrt{\mu/\rho}$  — скорость поперечной волны при отсутствии вращения,  $\tau$  — время прохождения волной расстояния  $x$ . Пропорциональность угла поворота вектора поляризации  $\beta$  скорости вращения звукопровода  $\Omega$  может быть положена в основу определения величины этой скорости. Стоит отметить, что полученная закономерность справедлива для распространения сдвиговой ОАВ не только в изотропной твердой среде, но и вдоль акустических осей кристаллов.

На основе проведенных теоретических исследований авторами предложен ряд новых принципов конструктивной реализации чувствительных элементов гироскопов на ОАВ с различными способами разделения первичной и вторичной, возникающей за счет вращения, волн [6–9] (см. рис. 1).

На рис. 1а показан принцип разделения волн за счет скрещивания поляризаций излучающего и приемного преобразователей [6]. Чувствительный элемент, реализующий данный принцип [7], содержит твердотельный звукопровод, на противоположных плоскостях торцов которого расположены излучающий И и приемный П преобразователи поперечных волн. Приемный преобразователь имеет направление чувствительности, ориентированное под углом, близким к  $90^\circ$  относительно направления поляризации излучающего преобразователя. При наличии вращения звукопровода под действием силы Кориолиса в звукопроводе возникают вторичные колебания распространяющейся ОАВ, имеющие повернутую на  $90^\circ$  поляризацию и детектируемые приемным преобразователем. Уровень принятого сигнала при этом пропорционален скорости вращения звукопровода.

На рис. 1б приведен принцип построения гироскопа с пространственным разделением волн за счет трансформационных эффектов [8, 9]. Излучатель, расположенный на торце звукопровода, возбуждает в нем поперечную волну с вектором смещения, пер-

пендикулярным плоскости рисунка. Отражаясь от противоположной грани, расположенной под углом к основной оси звукопровода, поперечная волна меняет направление распространения и попадает на его боковую грань. При вращении звукопровода вокруг оси  $X$ , совпадающей с направлением излучаемой поперечной волны, возникнут колебания с вектором смещения, лежащим в плоскости рисунка. При этом при отражении от грани звукопровода будет происходить трансформация волн. Угол наклона отражающей грани может быть выбран таким, что возникающая в результате трансформации продольная волна ( $l$ ) будет иметь направление, перпендикулярное излучаемой поперечной волне ( $t$ ), и сможет быть принята приемником П, расположенным на боковой грани звукопровода. Отраженная поперечная волна ( $t$ ) будет попадать на боковую грань звукопровода в пространственной области вне приемного преобразователя. Таким образом, имеет место не только поляризационное, но и пространственное разделение мод.

На рис. 1в представлена конструкция чувствительного элемента гироскопа, принцип работы которой реализован за счет разделения волн на основе законов преломления на границе раздела двух сред. Как видно из рисунка, звукопровод представляет собой составную конструкцию из двух твердых материалов. Излучающий преобразователь возбуждает поперечную волну с вектором смещения, перпендикулярным плоскости рисунка, которая, падая на границу раздела двух сред, претерпевает как отражение, так и преломление.

Если параметры сред подобраны таким образом, что значение скорости продольной волны в среде  $C_2$  близко значению скорости поперечной волны в среде  $C_1$ , то возникающая при трансформации продольная волна, возникающая только при наличии вращения, будет иметь то же направление и может быть принята приемником продольной волны, который расположен на противоположном торце звукопровода.

Рассмотренные конструкции основаны на эффекте поворота плоскости поляризации излучаемой сдвиговой волны. Однако, проведенные авторами исследования показали возможность непосредственного возбуждения циркулярно поляризованных акустических волн, скорость распространения которых зависит от скорости вращения среды [10]. Это позволяет создавать датчики параметров движения, базирующиеся на высокоточных фазовых методах измерения скорости распространения ультразвука в твердых средах.

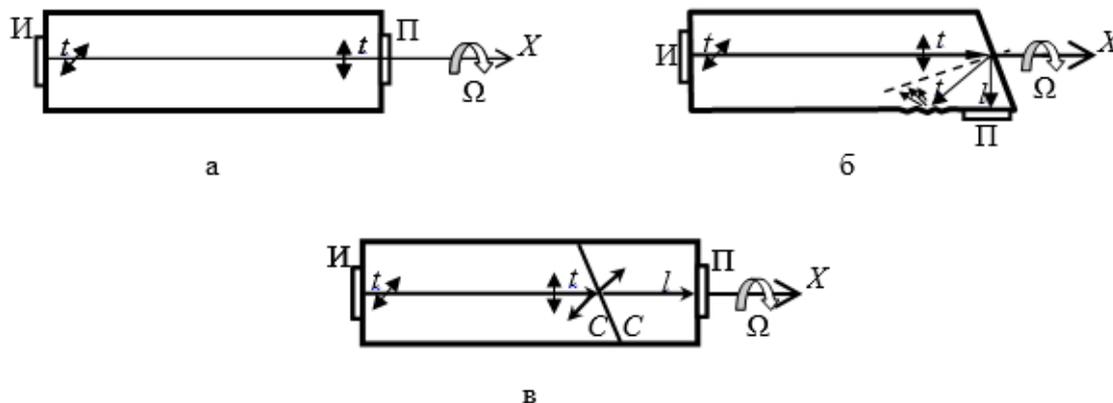


Рис. 1. Принципы построения гироскопов на ОАВ

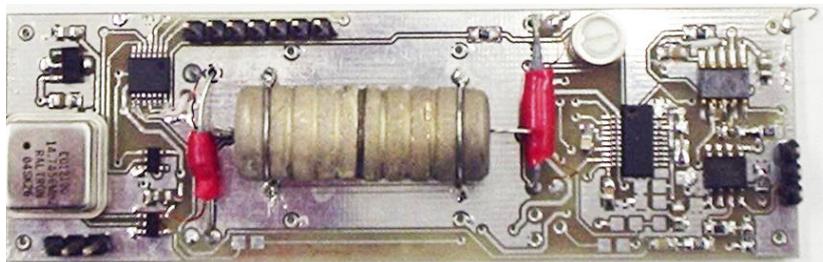


Рис. 2. Макет гироскопа на ОАВ



Рис. 3. Экспериментальная установка

Необходимо отметить, что возможны и другие способы разделения мод и, следовательно, конструктивные реализации чувствительных элементов, например, основанные на зависимостях направления распространения акустической энергии (луча) от поляризации волны, имеющее место в анизотропных средах.

С целью проверки достоверности полученных результатов теоретического анализа был изготовлен ряд экспериментальных макетов. На рис. 2 представлены чувствительный элемент и лабораторный макет гироскопа, принцип построения которых основан на разделении волн за счет скрещивания поляризаций излучающего и приемного преобразователей (см. рис. 1а).

На плате макета, кроме чувствительного элемента, расположены генератор радиоимпульсов, а также приемное устройство, вырабатывающее постоянное напряжение, пропорциональное выходному сигналу с чувствительного элемента. В качестве технологических материалов при изготовлении звукопровода и преобразователей использовались, соответственно, плавный кварц и пьезокварцевые пластины Y-среза с основной рабочей частотой 15 МГц.

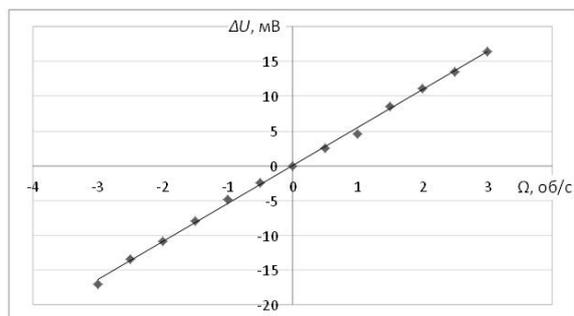


Рис. 4. Экспериментальная зависимость выходного сигнала от угловой скорости вращения

Приемный преобразователь с ортогональной поляризацией будет принимать сигнал  $U_{\Omega}$ , пропорциональный  $\sin \beta$ , а с учетом малости угла — пропорциональный самому углу  $\beta$ .

$$U_{\Omega} = U_{\text{вых}} \sin \tau \Omega \approx U_{\text{вых}} \tau \Omega, \quad (3)$$

где  $\tau$  — время распространения волны в звукопроводе.

При этом, как показала оценка, порядок значений принимаемого полезного сигнала при значениях угловой скорости вращения звукопровода  $360^\circ/\text{с}$ ,  $1^\circ/\text{с}$  и  $0,1^\circ/\text{с}$  составит  $628 \text{ мкВ}$ ,  $1,74 \text{ мкВ}$  и  $0,17 \text{ мкВ}$  соответственно. Вопрос природы происхождения и величины шумовых сигналов, влияющих на предельную выявляемость информативного сигнала, связанного с вращением, был подробно рассмотрен авторами в работе [10].

В ходе натурных испытаний макет гироскопа устанавливался на специализированную центрифугу (см. рис. 3), управление которой осуществлялось от персонального компьютера, позволяя изменять скорость и направление вращения.

На рис. 4 приведены результаты экспериментального исследования в виде графика зависимости изменения величины выходного электрического напряжения от значения угловой скорости вращения. Видно, что выявленный линейный характер изменения амплитуды сигнала, вызванный вращением, имеет высокую степень корреляции с закономерностью, полученной аналитическим путем в соответствии с выражением (2).

Авторами настоящей работы также проводились исследования особенностей распространения в условиях наличия вращения поверхностных акустических волн (ПАВ) [11].

Распространение ПАВ во вращающейся пьезоэлектрической среде может быть описано системой дифференциальных уравнений, полученной из совместного решения уравнения движения (1) и уравнения пьезоэффекта. Для решения в виде линейной

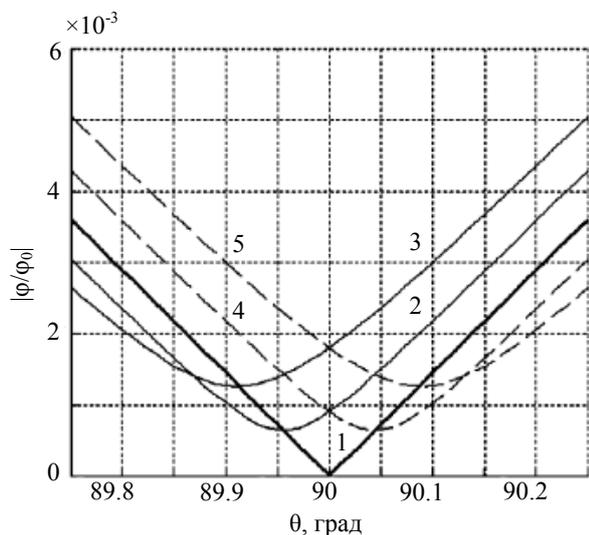


Рис. 5. Угловая зависимость относительного электрического потенциала

комбинации плоских гармонических волн, получим систему уравнений типа Грина – Кристоффеля для вращающихся сред

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} - \rho \cdot v^2 & \Gamma_{12} + 2j\rho \cdot v^2 W_3 & \Gamma_{13} - 2j\rho \cdot v^2 W_2 & \gamma_1 \\ \Gamma_{12} - 2j\rho \cdot v^2 W_3 & \Gamma_{22} - \rho \cdot v^2 & \Gamma_{23} + 2j\rho \cdot v^2 W_1 & \gamma_2 \\ \Gamma_{13} + 2j\rho \cdot v^2 W_2 & \Gamma_{23} - 2j\rho \cdot v^2 W_1 & \Gamma_{33} - \rho \cdot v^2 & \gamma_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \xi_{01} \\ \xi_{02} \\ \xi_{03} \\ \varphi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где  $\Gamma_{im} = C_{iklm} l_k l_l$ ,  $\gamma_i = e_{jik} l_j l_k$ ,  $\gamma_4 = -\varepsilon_{pq} l_p l_q$  ( $i, m = 1, 2, 3$ ),  $e_{jik}$ ,  $\varepsilon_{pq}$  — тензор пьезоэлектрических и диэлектрических постоянных, соответственно,  $\varphi$  — электрический потенциал,  $v$  — фазовая скорость,  $W_i = \Omega_i / \omega$  — относительная частота вращения.

Анализ решения системы (4) показал, что в ряде пьезодиэлектриков в отсутствие вращения имеются так называемые непьезоэлектрические направления, где деформации от распространяющейся ПАВ не вызывают возникновения электрического поля. В пьезокварце найденные непьезоэлектрические направления описываются следующими углами Эйлера:  $\lambda = 0^\circ + n \cdot 60^\circ$ ,  $\mu$  — любой,  $\theta = 90^\circ + m \cdot 180^\circ$ , где  $n, m$  — любые целые числа. Принципиально важной особенностью является то, что в условиях наличия вращения звукопровода в данных направлениях появляются условия распространения ПАВ, сопровождающейся волной электрического потенциала, причем амплитуда волны электрического потенциала пропорциональна скорости вращения  $\Omega$ , что может являться основой для создания датчиков угловой скорости на ПАВ. На рис. 5 приведены результаты расчетного моделирования — полученные угловые зависимости относительной величины электрического потенциала при разных относительных угловых скоростях вращения звукопровода  $W$  ( $1 - W_i = 0$ ;  $2 - W_i = 0,001$ ;  $3 - W_i = 0,002$ ;  $4 - W_i = -0,001$ ;  $5 - W_i = -0,002$ ) вокруг направления распространения ПАВ для пьезокварца.

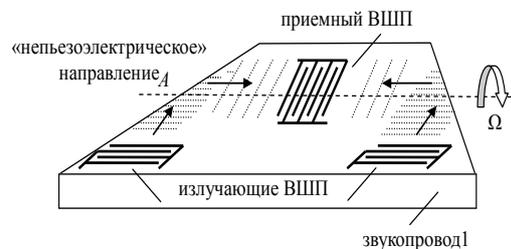


Рис. 6. Чувствительный элемент гироскопа на ПАВ

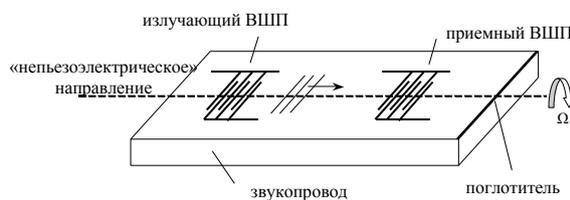


Рис. 7. Чувствительный элемент гироскопа на ПАВ

Важной, с точки зрения практического применения, особенностью является постоянство скорости ПАВ, а также линейный характер зависимости для всех реализуемых на практике значений относительной угловой скорости.

По результатам проведенных аналитической и расчетной оценок авторами был предложен ряд принципов конструктивной реализации твердотельных датчиков параметров углового движения на ПАВ.

Схема конструктивной реализации чувствительного элемента на ПАВ, основанная на принципе переизлучения ПАВ из пьезоэлектрического направления в выявленное особое непьезоэлектрическое направление, приведена на рис. 6 [12].

Схема конструктивной реализации чувствительного элемента гироскопа на ПАВ, основанная на принципе совмещения его оси вращения и выявленного особого непьезоэлектрического направления, представлена на рис. 7 [13].

Таким образом, на основании изложенных результатов теоретических и экспериментальных исследований особенностей распространения ОАВ и ПАВ в твердой среде при наличии вращения, можно утверждать о возможности их использования при создании нового класса ударо- и вибропрочных датчиков параметров угловой скорости на базе акустических волн. Рассмотренные концепции не являются единственно возможными, что открывает широкие перспективы для проведения дальнейших исследований в этом направлении.

#### Библиографический список

1. Сарапулов, С. А. Влияние вращения на объемные волны в упругой среде и их использование в твердотельной гироскопии / С. А. Сарапулов, И. А. Улитко // Гироскопия и навигация. — 2001. — № 4 (35). — С. 64–72.
2. Lao Binney, Y. Gyroscopic effect in surface acoustic waves / Y. Lao Binney // Ultrasonic Symposium, 1980. — P. 687–691.
3. Грибкова, Е. С. Особенности распространения объемных акустических волн во вращающихся твердых средах / Е. С. Грибкова, А. Н. Перегудов, М. М. Шевелько // Известия СПбГЭТУ «ЛЭТИ». — 2009. — № 1. — С. 53–58.

4. Gribkova, E. Theoretical and Experimental Researches of Bulk Acoustic Wave's Availability in Angular Motion Sensors / E. Gribkova, A. Peregudov, M. Shevelko // Proceedings of the IEEE Russia. North West section. – 2011. – Vol. 1. – P. 69–72.
5. Лутовинов, А. И. Преобразователь ультразвуковых волн круговой поляризации. Теория и эксперимент / А. И. Лутовинов, А. Н. Перегудов, М. М. Шевелько // Известия СПбГЭТУ «ЛЭТИ». – 2013. – № 7. – С. 78–84.
6. Пат. 2392625 РФ, МПК G01P3/44. Способ измерения угловой скорости / Грибкова Е. С., Лукьянов Д. П., Перегудов А. Н., Шевелько М. М.; заявитель и патентообладатель Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина); опубл. 20.06.2010.
7. Пат. 2397445 РФ, МПК G01C19/58 / G01P9/04. Чувствительный элемент гироскопа / Грибкова Е. С., Лукьянов Д. П., Перегудов А. Н., Шевелько М. М.; заявитель и патентообладатель Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина); опубл. 20.08.2010.
8. Пат. 2457436 РФ, МПК G01C19/58. Устройство для измерения угловой скорости / Грибкова Е. С., Перегудов А. Н., Поженская А. А., Шевелько М. М.; заявитель и патентообладатель Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина); опубл. 27.07.2012.
9. Пат. 2460078 РФ, МПК G01P3/44. Способ измерения угловой скорости / Грибкова Е. С., Перегудов А. Н., Поженская А. А., Шевелько М. М.; заявитель и патентообладатель Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина); опубл. 27.08.2012.
10. Грибкова, Е. С. Оценка предельной чувствительности твердотельных датчиков гироскопов на объемных акустических волнах / Е. С. Грибкова, А. Н. Перегудов, М. М. Шевелько // Известия СПбГЭТУ «ЛЭТИ». – 2012. – № 7. – С. 84–90.
11. Горбачевич, В. Ф. Анализ характеристик поверхностных акустических волн в пьезоэлектрических кристаллах произвольной симметрии / В. Ф. Горбачевич, А. Н. Перегудов, М. М. Шевелько // Известия СПбГЭТУ «ЛЭТИ». – 2004. – № 1. – С. 60–66.
12. Пат. 2426131 РФ, МПК G01P3/44. Способ и устройство для измерения угловой скорости / Грибкова Е. С., Лукьянов Д. П., Перегудов А. Н., Шевелько М. М., Шевченко С. Ю.; заявитель и патентообладатель Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина); опубл. 10.08.2011.
13. Пат. 2426132 РФ, МПК G01P3/44. Способ и устройство для измерения угловой скорости / Грибкова Е. С., Лукьянов Д. П., Перегудов А. Н., Шевелько М. М., Шевченко С. Ю.; заявитель и патентообладатель Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина); опубл. 10.08.2011.

**ШЕВЕЛЬКО Михаил Михайлович**, кандидат технических наук, доцент (Россия), доцент кафедры электроакустики и ультразвуковой техники.

Адрес для переписки: MMShevelko@mail.eltech.ru

**ПЕРЕГУДОВ Александр Николаевич**, кандидат технических наук, доцент (Россия), доцент кафедры электроакустики и ультразвуковой техники.

Адрес для переписки: ANPeregudov@mail.eltech.ru

**ГРИБКОВА Екатерина Сергеевна**, кандидат технических наук, ассистент кафедры электроакустики и ультразвуковой техники.

Адрес для переписки: katerina.gribkova@gmail.com

**ЛУТОВИНОВ Андрей Игоревич**, аспирант, ассистент кафедры электроакустики и ультразвуковой техники.

Адрес для переписки: lutovinovspb@gmail.com

Статья поступила в редакцию 01.12.2014 г.

© М. М. Шевелько, А. Н. Перегудов, Е. С. Грибкова, А. И. Лутовинов

## Книжная полка

### 519.2/P69

**Романовский, Р. К. Элементы теории вероятностей и случайных процессов : учеб. текстовое электрон. изд. локального распространения : учеб. пособие / Р. К. Романовский, О. Н. Канева, О. В. Кириченко. – Омск : ОмГТУ, 2014. – 1 о=эл. опт. диск (CD-ROM). – ISBN 978-5-8149-1846-8.**

Изложены основы теории вероятностей и теории случайных процессов в рамках учебных программ направлений подготовки 010300 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» и 010500 (010503) «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем» в рамках физико-математического образования по прикладной математике. Теоретический материал проиллюстрирован примерами. Найдена простая методика разъяснения ряда узловых понятий. Предложены задачи для использования на практических занятиях и для самостоятельного решения.

### 519.2/3-15

**Задорожный, В. Н. Введение в статистическое моделирование : учеб. пособие для вузов по направлению подгот. 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», 09.03.04 «Программная инженерия», 27.03.03 «Системный анализ и управление» / В. Н. Задорожный. – Омск : ОмГТУ, 2014. – 107 с. – ISBN 978-5-8149-1889-5.**

Изложены основные сведения о методах статистического моделирования систем. Рассмотрены классические и усовершенствованные методы моделирования. Приведены практические примеры работы на компьютере для их выполнения обучаемыми. Предназначено для использования при изучении дисциплины «Моделирование систем» и смежных дисциплин студентами, обучающимися по направлениям подготовки «Информатика и вычислительная техника», «Программная инженерия», «Системный анализ и управление».