

УДК 519.8

А. А. КОЛОКОЛОВ

И. А. ЦИГЛЕР

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Омск

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ФОРМИРОВАНИЯ ЦЕЛЕВЫХ ГРУПП С УЧЕТОМ ЛОГИЧЕСКИХ ОГРАНИЧЕНИЙ

В работе рассматривается задача проектирования целевых групп с логическими ограничениями, учитывающими как согласованные, так и несогласованные межличностные отношения. Для этой задачи построена модель целочисленного линейного программирования (ЦЛП) и предложены алгоритмы решения, основанные на методе ветвей и границ и методе отсечения. Выполнен вычислительный эксперимент с указанными алгоритмами и коммерческим пакетом CPLEX, показавший классы задач, на которых одни алгоритмы имеют преимущество над другими.

Ключевые слова: дискретная оптимизация, задачи формирования целевых групп, целочисленное программирование, метод ветвей и границ, отсечения.

Работа над разделами 1, 2.2, 3, 4 выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013–2020 годы, п. 1.5.1.6. «Анализ и решение задач проектирования с использованием дискретной оптимизации».

Работа над разделом 2.1 выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 16-01-00740.

1. Введение. Успешная деятельность современных предприятий во многом определяется эффективностью подбора персонала и формирования различного рода функциональных групп. Характер этих групп зависит от профиля предприятия: это могут быть производственные, творческие, экспертные группы и т.п.

Создание таких групп требует учета многих факторов. Например, при формировании производственных групп необходимо произвести назначение на должности, обеспечивающее качество и своевременность выполнения работ, соблюдение условий труда, учет межличностных и иерархических отношений в коллективе и другие требования.

При решении задач подобного рода применимы модели и методы дискретной оптимизации, в частности, аппарат целочисленного линейного программирования (ЦЛП). Целочисленность переменных в этих моделях позволяет учесть альтернативность выбора претендентов в формируемых группах.

В настоящее время изучение задач управления персоналом идет по нескольким направлениям, в частности:

- разработка и использование моделей ЦЛП, построенных на основе известных задач о назначениях и их обобщениях [1–8];
- применение кластерного анализа [9];
- применение задач о покрытии, задач оптимального разбиения и размещения [10];

— построение теоретико-игровых моделей для анализа процессов формирования и функционирования коллектива [11];

— оптимизация на графах [12, 13].

Важными аспектами исследования рассматриваемых задач являются изучение их структуры и сложности, разработка алгоритмов точного и приближенного решения, анализ этих алгоритмов и другие вопросы.

В данной работе исследуются задачи формирования производственных групп с логическими ограничениями, учитывающими как согласованные, так и несогласованные межличностные отношения, предлагаются алгоритмы их решения, основанные на методах ветвей и границ, и отсечений, приводят результаты вычислительного эксперимента.

Во многих случаях задача формирования производственной группы сводится к задаче о назначениях (ЗН), которая может быть сформулирована следующим образом. Пусть некоторое предприятие создает производственную группу при условии наличия на рынке труда, определенного множества претендентов, число которых не меньше количества имеющихся работ. Любому из них может быть назначена только одна работа, причем каждая работа должна выполняться только одним специалистом. Необходимо образовать производственную группу с учетом указанных условий так, чтобы суммарные затраты на выполнение всех работ были минимальны [1]. Известно, что ЗН является полиномиально разрешимой задачей комбинаторной оптимизации.

В задаче о назначениях многие факторы не принимаются во внимание, поэтому возникает необходимость использования других постановок. Например, в [1, 2] рассмотрена задача управления персоналом с учетом так называемых несогласованных межличностных отношений. Множество таких отношений определяется следующим образом. Пусть специалист i_1 претендует на работу j_1 , а специалист i_2 — на работу j_2 . Межличностные отношения $\langle (i_1, j_1), (i_2, j_2) \rangle$ считаются **несогласованными**, если работы j_1, j_2 требуют взаимодействия специалистов i_1, i_2 при их выполнении, а отношения между ними рассматриваются как напряженные. Множество всех несогласованных межличностных отношений обозначим через W .

Допустим, что известно число специалистов n , число работ m и пусть i — номер специалиста, $i \in I, I = \{1, \dots, n\}$; j — номер работы, $j \in J, J = \{1, \dots, m\}$. Обозначим затраты на выполнение i -м специалистом j -ой работы через $s_{ij}, i \in I, j \in J$.

Введем булевы переменные. Будем полагать, что $x_{ij} = 1$, если i -ый специалист назначается на j -ю работу и $x_{ij} = 0$ — в противном случае.

Введем еще один класс ограничений. Допустим, требуется учесть условия **согласованности** межличностных отношений, которые будут сформулированы ниже, а также наличие парных связей между некоторыми специалистами: если первый из них включается в группу для выполнения определенной работы, то второй специалист из этой пары обязательно должен быть взят в группу для выполнения некоторой другой работы.

Отметим, что наряду с задачами формирования групп на минимум может возникнуть необходимость решения подобных задач на максимум, если необходимо, например, получить наибольший эффект от включения специалистов в группу.

Построим математическую модель, учитывающую условия **согласованности**, используя введен-

ные обозначения. Величины $s_{ij}, i \in I, j \in J$ здесь будем интерпретировать как эффект от выполнения i -м специалистом j -ой работы. Предполагается, что $s_{ij} > 0$.

Пусть специалист i_1 претендует на работу j_1 , а специалист i_2 — на работу j_2 . Межличностные отношения назовем согласованными, если при назначении специалиста i_1 на работу j_1 специалист i_2 обязательно должен быть назначен на работу j_2 . Множество всех логически согласованных отношений обозначим через S .

Тогда модель целочисленного линейного программирования для задачи имеет вид:

$$F(x) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} s_{ij} x_{ij} \rightarrow \max \quad (1)$$

при условиях

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1, j \in J; \quad (2)$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} \leq 1, i \in I; \quad (3)$$

$$x_{i_1 j_1} + x_{i_2 j_2} \leq 1, \langle (i_1, j_1), (i_2, j_2) \rangle \in W; \quad (4)$$

$$x_{i_1 j_1} - x_{i_2 j_2} \geq 0, \langle (i_1, j_1), (i_2, j_2) \rangle \in S; \quad (5)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, i \in I, j \in J. \quad (6)$$

Здесь целевая функция (1) представляет собой общий эффект, получаемый предприятием от назначения специалистов на работы, равенства (2) указывают, что на каждую работу назначается только один специалист; неравенства (3) гарантируют, что каждый включенный в группу специалист выполняет не более одной работы, неравенства (4) — (5) отражают необходимость обеспечения условия согласованности и несогласованности межличностных отношений.

Отметим, что задача (1) — (3), (5) представляет собой классическую задачу о назначениях, которая, как отмечено ранее, полиномиально разрешима. Дополнение ограничений задачи (1) — (3), (5) условием (4) ведет к повышению ее сложности. В [1, 3] доказана NP-трудность данной задачи, а из нее следует NP-трудность задачи (1) — (6), так как задача (1) — (5) является ее частным случаем.

В работах [1, 3] авторами предложен алгоритм ветвей и границ для указанной задачи, в котором решение задачи сводится к решению последовательности задач о назначениях. Результаты эксперимента позволили сделать вывод о перспективности применения, разработанных в [1, 3] модели ЦЛП и алгоритма для решения задач формирования производственных групп при учете несогласованных межличностных отношений.

В исследовании [2] недостаток разнообразия отношений между претендентами предыдущей постановки восполняется введением неотрицательного числа δ — порога комфортности, при превышении которого отношения между специалистами могут считаться благоприятными для совместной деятельности. Введем матрицу C размерности $n \times n$ коэффициентов комфортности, элементами которой являются положительные вещественные числа. Далее дается определение δ -несогласованных отно-

шений между специалистами, множество которых обозначается через W_δ . Межличностные отношения $\langle (i_1, j_1), (i_2, j_2) \rangle$ называются δ -несогласованными, если работы j_1 и j_2 требуют взаимодействия специалистов i_1 и i_2 при их выполнении, коэффициент комфортности между которыми меньше заданного порога δ . Таким образом, отношения с коэффициентом комфортности меньше δ считаются напряженными, а иначе — комфортными. В таком случае система вида (4) записывается следующим образом: $x_{i_1 j_1} + x_{i_2 j_2} \leq 1, \langle (i_1, j_1), (i_2, j_2) \rangle \in W_\delta$. Отметим, что при $\delta=0$ эти ограничения совпадают с ограничениями (4). Очевидно, что в такой постановке задача NP-трудна.

2. Алгоритмы решения задачи.

2.1 Метод ветвей и границ.

Для решения задачи (1) – (6) разработан алгоритм ВВ, основанный на методе ветвей и границ, который предполагает решение текущих задач о назначении также с помощью венгерского метода.

Процесс ветвления состоит в последовательном разбиении множества допустимых решений (2) – (5) на подмножества, на каждом из которых строятся оценки значений целевой функции (6) с последующим отсеком тех подмножеств, которые не содержат оптимального решения. Данная операция рекурсивно применяется к подмножествам, которые можно условно называть узлами дерева поиска. Каждое подмножество в этом разбиении представляется потомком узла-родителя, а исходная задача соответствует корню дерева.

Обозначим через Rec — наилучшее значение целевой функции $F(x)$, полученное к текущей итерации алгоритма. В начале процесса полагаем, что $Rec = 0$. Опишем алгоритм по шагам.

Шаг 0. Находим оптимальное решение x' исходной ЗН (1) – (3), (6). Если все ограничения (4), (5) выполняются для x' , то процесс заканчивается — получено оптимальное решение исходной задачи. Иначе переходим на шаг 1.

Шаг 1.

1.1. Ветвление 1. Пусть $\langle (i_1, j_1), (i_2, j_2) \rangle \in W$ и хотя бы одно из ограничений системы (4): $x_{i_1 j_1} + x_{i_2 j_2} \leq 1$ или $x_{i_1 j_2} + x_{i_2 j_1} \leq 1$ не выполнилось. В этом случае задача делится на две подзадачи. В дереве ветвления это соответствует левой ветви (претендент i_1 не принимается на работы j_1, j_2 , т.е. полагаем $x_{i_1 j_1} = x_{i_1 j_2} = 0$) и правой ветви (претендент i_2 не принимается на работы j_1, j_2 , т.е. полагаем $x_{i_2 j_1} = x_{i_2 j_2} = 0$). Выбираем левую ветвь и переходим на шаг 2.

1.2. Ветвление 2. Пусть $\langle (i_1, j_1), (i_2, j_2) \rangle \in S$ и ограничение $x_{i_2 j_2} - x_{i_1 j_2} \geq 0$ не выполнилось. В этом случае задача делится на две подзадачи. В дереве ветвления это соответствует левой ветви: $x_{i_1 j_1} = x_{i_2 j_2} = 1$ и правой ветви: $x_{i_1 j_1} = 0$. Выбираем левую ветвь и переходим на шаг 2.

1.3. Анализ правой ветви.

1. Если текущий узел — корень дерева поиска и все узлы правой ветви рассмотрены, то переходим на шаг 3.

2. Если текущий узел — не корень дерева поиска и все узлы правой ветви рассмотрены, то переходим к его родительскому узлу на шаг 1.3.

3. Если текущий узел — не корень дерева поиска и не все узлы правой ветви рассмотрены, то анализируем правую ветвь. Переходим на шаг 2.

Шаг 2. Если текущая ЗН с новыми исходными данными не имеет решения, то переходим на шаг 1.3. Иначе находим оптимальное решение x' текущей задачи, вычисляем $F(x')$.

1. Если $F(x') \leq Rec$, то движение по этой ветви не может привести к улучшению Rec , переходим на шаг 1.3.

2. Если $F(x') > Rec$, все ограничения (4) выполняются для x' и хотя бы одно ограничение (5) не выполняется для x' , то переходим на шаг 1.2.

3. Если $F(x') > Rec$ и все ограничения (4), (5) выполняются для x' , то обновляем $Rec := F(x')$ и переходим на шаг 1.3.

4. Если $F(x') > Rec$ и хотя бы одно ограничение (4) не выполняется для x' , то переходим на шаг 1.1.

Шаг 3. Завершение процесса. Если $Rec > 0$, то решение, соответствующее Rec , является оптимальным для задачи (1) – (6). В противном случае задача не имеет допустимых решений.

Отметим, что ветвление на две подзадачи, осуществляемое на шаге 1, не приводит к потере допустимых решений задачи (1) – (6). А поскольку число ограничений (4) и (5) конечно, то алгоритм заканчивает свою работу за конечное число шагов.

2.2. Алгоритм отсечений.

Также для решения данной задачи применим метод последовательного расширения системы дополнительных ограничений (4) – (5), аналогичный предложенному в статьях [1, 2].

Множество стратегий сортировки дополнительных ограничений (4), (5) можно разбить на два класса: распределение неравенств из системы (4), (5) в некотором порядке до запуска алгоритмов решения (обозначим их BSort1, BSort2) и после каждой итерации алгоритмов (обозначим их ISort1, ISort2). Сначала опишем возможные варианты упорядочивания первого класса. Для каждого ограничения, порождаемого парой (i_1, i_2) , подсчитываем, сколько раз индекс i_1 встречается в остальных ограничениях системы (4), (5), то же самое находим для индекса i_2 . В случае сортировки BSort1 весом линейного неравенства, соответствующего паре (i_1, i_2) , будем считать сумму этих двух чисел, а для BSort2 — максимальное из них. Располагаем все неравенства из (4), (5) в порядке невозрастания весов. Вычисление весов ограничений (4), (5) в случае сортировки ISort1 такое же, как и для BSort1, а в случае ISort2 — как для BSort2. Отличие состоит в том, что нахождение указанных весов осуществляется только для неравенств, которые не выполнены после текущей итерации, а веса остальных равны 0. Описанный алгоритм далее обозначается через CUT. Проведем сравнительный анализ указанных алгоритмов и пакета CPLEX.

3. Вычислительный эксперимент. Нами разработан программный комплекс и проведен вычислительный эксперимент для задачи P_1 , цель которого заключалась в исследовании предложенных алгоритмов в зависимости от значения входных параметров задачи, а также в сравнении с пакетом CPLEX 12. В качестве тестовых примеров использовались задачи со случайными исходными данными. Расчеты проводились на компьютере с процессором Intel(R) Core(TM)2 i7-4770 CPU 3.4 GHz.

Введем необходимые обозначения. Пусть A — некоторый алгоритм, $\bar{T}(A)$ — среднее время счета в секундах алгоритма A . Тестовые примеры были получены с помощью процедуры генерации с входными данными: число специалистов n , работ m , несогласованных межличностных отношений $|W|$ и число согласованных межличностных отношений $|S|$, а также нижние и верхние границы затрат на выполнение работ. Задачи при фиксированных значениях указанных параметров образовывали серии.

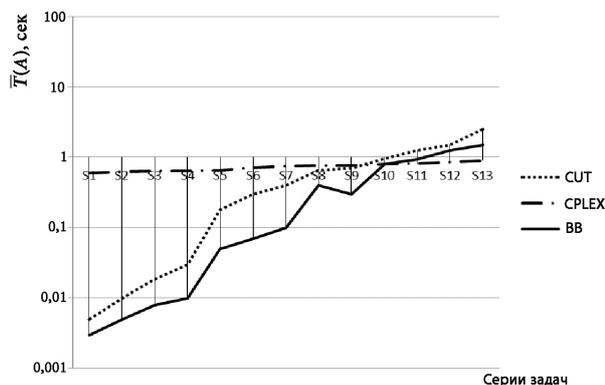


Рис. 1. Среднее время решения задач алгоритмами BB, CUT и пакетом CPLEX

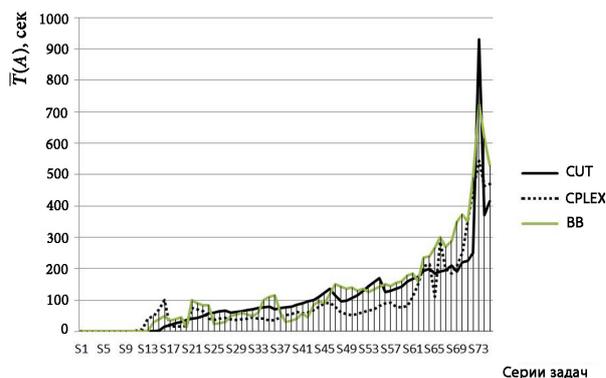


Рис. 2. Среднее время решения задач алгоритмами BB, CUT и пакетом CPLEX

Всего было решено 75 серий задач, каждая из которых содержала по 50 тестовых примеров. В сериях S1÷S13 число специалистов и работ равнялось 50, согласованных и несогласованных отношений — 10, а количество пар связанных работ варьировалось от 10 до 150; в S14÷S17 число специалистов и работ равнялось 50, количество согласованных и несогласованных отношений и пар связанных работ изменялось от 50 до 200; в S18÷S20 со 100 специалистами и работами количество согласованных и несогласованных отношений равнялось 100 а связанных работ 100, 200 или 500; в сериях S21÷S73 число специалистов и работ равнялось 500, количество согласованных и несогласованных отношений изменялась от 100 до 1000; в S74, S75 число специалистов, работ и межличностных отношений равнялось 1000. Во всех задачах предполагалось, что $1 \leq s_{ij} \leq 100$. Для генерации случайных величин использовалось равномерное распределение.

Отметим, что для задач небольшой размерности среднее время работы пакета CPLEX значительно больше времени работы алгоритмов CUT и BB, что особенно заметно на сериях S1÷S9 (рис. 1).

Расчеты показали, что алгоритм CUT обладал преимуществом по времени счета перед пакетом CPLEX на сериях задач S14÷S75 в 40 % случаях, а алгоритм BB — в 64 % (рис. 2). Установлено, что CUT и BB находили оптимальные решения задачи быстрее в случае, если число межличностных отношений и пар связанных работ были достаточно велики и при этом разрыв оптимальных значений целевых функций задач (1) — (6) и соответствующим ЗН являлся небольшим.

Для алгоритма CUT на сериях задач S1÷S75 варьировалось число добавляемых неравенств типа (4), (5) и применялись описанные выше стратегии сортировки дополнительных ограничений. Алгоритм CUT с использованием сортировок ISort2 оказался в отдельных случаях быстрее пакета CPLEX на 55 % (на серии S39), а алгоритм BB на 63 % (на серии S51). Был проведен статистический тест Вилкоксона, показавший, что на сериях задач S1÷S75 алгоритм BB имеет преимущество над алгоритмом CUT с уровнем значимости менее 5 %. А на сериях S1÷S13 алгоритм BB имеет статистически значимое преимущество над алгоритмом CUT, который в свою очередь быстрее пакета CPLEX с уровнем значимости менее 5 %.

4. Заключение. В работе рассмотрена новая постановка задачи формирования целевых групп

и соответствующая ей модель ЦЛП. Предложены и реализованы точные алгоритмы решения этой задачи, на их основе разработан и апробирован программный комплекс.

Проведен вычислительный эксперимент, который показал преимущество алгоритма ветвей и границ над модификацией алгоритма отсечений и пакетом CPLEX на задачах малой размерности, что показывает перспективность применения указанной модели и алгоритмов в системах поддержки принятия решений для формирования малых функциональных групп.

В дальнейшем планируется изучение сложности задачи, учитывающей только согласованные межличностные отношения.

Библиографический список

- Афанасьева Л. Д., Колоколов А. А. Исследование и решение одной задачи формирования производственных групп // Вестник УГАТУ. 2013. № 5. С. 20–25.
- Колоколов А. А., Рубанова Н. А., Циглер И. А. Исследование и решение некоторых задач формирования малых групп на основе дискретной оптимизации // Омский научный вестник. Сер. Приборы, машины и технологии. 2016. № 4 (148). С. 139–142.
- Kolokolov A. A., Afanasyeva L. D. Research of Production Groups Formation Problem Subject to Logical Restrictions // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2013. Vol. 6, no 2. P. 145–149.
- Колоколов А. А., Рубанова Н. А., Циглер И. А. Решение задач управления персоналом с учетом некоторых бинарных отношений // Проблемы оптимизации сложных систем: тр. XII Междунар. азиатской школы-семинара. Новосибирск, 2016. С. 278–284.
- Колоколов А. А., Рубанова Н. А., Циглер И. А. Решение задач формирования малых групп с использованием дискретной оптимизации // Information Technologies for Intelligent Decision Making Support. Proceedings of the 4th International Conference. 2016. № 1. С. 215–218.
- Колоколов А. А., Рубанова Н. А. Анализ и решение некоторых задач формирования производственных групп // Проблемы оптимизации и экономические приложения: материалы VI Междунар. конф. Омск, 2015. 99 с.
- Истомина И. М., Циглер И. А. О некоторых алгоритмах решения задач формирования производственных групп с учетом логических ограничений // Проблемы оптимизации и экономические приложения: материалы VI Междунар. конф. Омск, 2015. 95 с.

8. Циглер И. А. О некоторых алгоритмах решения задач формирования целевых групп // Россия молодая: передовые технологии в промышленность. 2017. № 2. С. 51–53.

9. Еремеев А. В., Кельманов А. В., Пяткин А. В. О сложности некоторых евклидовых задач оптимального суммирования // Доклады Академии наук. 2016. Т. 468, № 4. С. 372–375.

10. Новиков Д. А. Математические модели формирования и функционирования команд: моногр. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 186 с. ISBN 9875-94052-146-0.

11. Burkard R. E., Dell'Amico M., Martello S. Assignment problems. Philadelphia: SIAM, 2009. 382 p.

12. Сигал И. Х., Иванова А. П. Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы. 2-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 240 с. ISBN 5-9221-0377-6.

13. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи: моногр. М.: Мир, 1982. 416 с.

КОЛОКОЛОВ Александр Александрович, доктор физико-математических наук, профессор (Россия), заведующий лабораторией дискретной оптимизации Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омский филиал; заведующий кафедрой прикладной и вычислительной математики ОмГУ им. Ф. М. Достоевского.

ЦИГЛЕР Игорь Александрович, аспирант лаборатории дискретной оптимизации Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омский филиал. Адрес для переписки: icygler@hwdtech.ru

Статья поступила в редакцию 14.06.2017 г.

© **А. А. Колоколов**, И. А. Циглер

УДК 004.94:519.711.3

В. И. ПОТАПОВ

Омский государственный
технический университет,
г. Омск

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИГРОВОЙ ЗАДАЧИ ПРОТИВОБОРСТВА АППАРАТНО-ИЗБЫТОЧНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ПРОТИВНИКОМ, ДЕЙСТВУЮЩИХ В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О ПОВЕДЕНИИ УЧАСТНИКОВ ИГРЫ

Разработана математическая модель игровой задачи, в которой противоборствующие стороны действуют и принимают решения в условиях неполной информации о поведении участников игры. Атакуемая сторона располагает аппаратно-избыточной динамической системой, которая обладает не только ресурсом защиты от атак противника, но и ресурсами активного воздействия на вероятность нахождения атакующей стороны в соответствующих состояниях атаки. Полагается, что поведение противоборствующих сторон аппроксимируется марковским процессом. Решение рассматриваемой дифференциальной игры сводится к многошаговой матричной игре и последовательному ее решению на интервалах дискретизации с постоянными средними вероятностями нахождения атакующей стороны на этих интервалах. При решении задачи используются численные и аналитические методы.

Ключевые слова: игровая задача, математическая модель, динамическая система, численно-аналитический метод, информация, вероятностный процесс, противоборство.

Введение. Вопросам постановки и решения игровых задач противоборства систем различной природы в конфликтных ситуациях посвящено большое количество работ [1–10], наиболее близкая из которых к содержанию данной статьи [10], посвящена вопросам постановки и решения игровой задачи противоборства технической системы с атакующим противником, действующим в условиях неполной информации в течение игры.

В работе [10] была поставлена и решена игровая задача противоборства атакуемой, защищающейся от атак за счет собственных ресурсов аппаратно-избыточной динамической системы $S_A(n, m, \bar{s})$, с атакующим противником, действующим в условиях неполной информации о поведении атакуемого противника в процессе конфликта. Атакующая сторона в процессе игры стремится за счет своих ресурсов нападения увеличить интенсивность

отказов $\lambda_0(t), \lambda_1(t), \dots, \lambda_q(t)$ основных и резервных блоков атакуемой $S_A(n, m, \bar{s})$ -системы, вплоть до ее полного отказа.

Атакуемая сторона (игрок A) за счет соответствующей стратегии $W^A = \{\bar{\tau}, \bar{s}(\bar{\tau})\}$ перераспределения $m(m = s_1 + s_2 + \dots + s_q)$ резервных блоков, разбитых на q соответствующих групп, между отказавшими из числа основных функциональных $n(n = n_1 + n_2 + \dots + n_q)$ блоков аппаратно-избыточной системы в соответствующие моменты времени τ в течение времени игры $[0, t_f]$, стремится максимизировать свою вероятность безотказной работы $P(t_f) = \max P(t_f, \bar{s}(\bar{\tau}_k))$ к моменту окончания игры (противоборства) с атакующим противником.

Приведенные выше обозначения, соответствующие обозначениям в [10], имеют следующий смысл: $s = (s_1, s_2, \dots, s_q)$ — целочисленный вектор резервирования; $\lambda_0(t)$ — интенсивность отказов резервных блоков; $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_q(t)$ — интенсивность отказов соответствующих основных блоков; $\bar{\tau} = \{\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_L\}$ — вектор настройки (перераспределения резервных блоков между отказавшими основными) атакуемой $S_A(n, m, \bar{s})$ -системы, элементы которого соответствуют моментом перераспределения резервных блоков, причем $\tau_0 = 0, \tau_L < t_f$, где t_f — момент окончания игры; $\bar{s}(\bar{\tau}_k)$ — вектор распределения резервных блоков в момент времени τ_k ($0 \leq k \leq L$).

В работе [10] также полагалось, что атакующий систему $S_A(n, m, \bar{s})$ противник (игрок B) в течение игры может находиться в одном из состояний B_1, B_2, \dots, B_N , характеризующихся соответствующим результатом атаки из ресурса нападения на аппаратно-избыточную динамическую систему в виде вектора интенсивностей отказов этой системы $\bar{\lambda}(t) = \{\lambda^i(t)\}$, каждый элемент которого представляет совокупность интенсивностей отказов в q группах основных функциональных блоков и не включенных в работу резервных блоков атакуемой системы $\bar{\lambda}^i(t) = \{\lambda_0^i(t), \lambda_1^i(t), \dots, \lambda_q^i(t)\}$, $i = 1, 2, \dots, N$. При этом если для каждого состояния B_i атакующего противника заданы вероятности его нахождения в этих состояниях $Q(t) = \{Q_i(t)\}$, то множество стратегий атакующего противника (игрока B) определяется как $W^B = \{Q(t), \bar{\lambda}(t)\}$. Таким образом, действия игрока B в процессе игры заключаются в случайном выборе из N состояний, которым соответствуют интенсивности нестационарных пуассоновских потоков отказов основных и резервных блоков $S_A(n, m, \bar{s})$ -системы, с целью минимизации вероятности безотказной работы атакуемой системы.

Для численного решения игровой задачи противоборства игроков A и B в [10] приводятся два алгоритма. Первый — для вычисления вектора $\bar{s}(\bar{\tau}_k)$, максимизирующего вероятность безотказной работы $P(t_f, \bar{s}(\bar{\tau}_k))$ атакуемой системы $S_A(n, m, \bar{s})$ к концу игры и второй — собственно решению игровой задачи с использованием первого алгоритма для нахождения векторов $\bar{\tau}$ и \bar{s} искомой стратегии игрока A .

В данной работе в развитие сформулированной выше игровой задачи ставится более сложная игровая задача, в которой предлагается развитие и расширение рассмотренной выше модели игры в условиях неполной информации о поведении ее участников, с учетом того, что атакуемая сторона A не только пассивно защищается от атак противника, (стороны B), за счет своего ресурса защиты — аппаратной избыточности, но имеет и активно использует ресурс воздействия на нападающую сто-

рону B , которая в результате этого воздействия, в отличие от [10], изменяет вероятность $Q_i(t)$ нахождения в соответствующем состоянии B_i из всего множества состояний ($i = 0, 1, 2, \dots, N + 1$) не скачкообразно в заранее зафиксированные моменты времени, а непрерывно на всем временном интервале $[0, t_f]$ игры.

Решение данной игровой задачи с функцией выигрыша $P(t_f) = \max P(t_f, \bar{s}(\bar{\tau}_k))$ базируется на методике и численных алгоритмах, разработанных автором данной статьи в работе [10].

Постановка и решение игровой задачи противоборства. Будем считать, что в рассматриваемой игре G_2 в условиях неполной информации у участников игры о поведении противоборствующей стороны участвуют два игрока A и B .

Игрок A располагает системой $S_A^*(n, m, \bar{s})$, структурно и функционально идентичной аппаратно-избыточной динамической системе, рассмотренной в [10] и отличающейся от нее тем, что обладает не только «пассивными» ресурсами защиты от атак противника (игрока B), но и ресурсами активного воздействия на вероятности нахождения в соответствующих состояниях B_i ($i = 0, 1, \dots, N + 1$) нападающего игрока B . В качестве вероятностной модели изменения состояний нападающей стороны (противника) будем использовать неоднородный марковский процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем. Будем полагать, что переходы противника из состояния B_i ($i = 0, 1, \dots, N + 1$) с одним ресурсом нападения $\bar{\lambda}^i(t) = \{\lambda_0^i(t), \lambda_1^i(t), \dots, \lambda_q^i(t)\}$, $i = 1, 2, \dots, N$ на игрока A в состояние с другим ресурсом происходит под активным воздействием со стороны игрока A в виде нестационарных пуассоновских потоков событий с интенсивностями $\gamma_j(t)$, при переходах из состояния B_0 в состояние B_j ($j = 1, 2, \dots, N$) и с интенсивностями $\delta_j(t)$ при переходах из B_j в B_{N+1} . Легко понять, что в состоянии B_{N+1} игрок B исчерпал все свои ресурсы нападения на игрока A .

При этом в течение игры G_2 на интервале времени $[0, t_f]$ игрок A оптимальным образом, используя свой ресурс защиты в виде m резервных блоков, перераспределяет их в процессе игры в соответствующие моменты времени τ_k ($0 \leq k \leq L$) между основными, отказывающим от атак противника (игрока B), функциональными n блоками аппаратно-избыточной динамической системы $S_A^*(n, m, \bar{s})$ с целью максимизации ее вероятности безотказной работы $P(t_f)$ к концу игры.

С учетом сделанных выше предположений вероятность $Q_i(t)$ нахождения нападающей стороны в состояниях B_i ($i = 0, 1, \dots, N + 1$) описывается системой дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами по известной методике [11]

$$\frac{dQ_0(t)}{dt} = - \sum_{j=1}^N \gamma_j(t) Q_0(t),$$

$$\frac{dQ_i(t)}{dt} = \gamma_i(t) Q_0(t) - \delta_i(t) Q_i(t), \quad (1)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

$$\frac{dQ_{N+1}(t)}{dt} = \sum_{j=1}^N \delta_j(t) Q_j(t),$$

с начальными условиями в начале игры, когда нападающая сторона находится в состоянии B_0 , равными

$$Q_0(0) = 1, Q_1(0) = Q_2(0) = \dots = Q_{N+1}(0) = 0.$$

Аналитическое решение системы уравнений (1) с переменными коэффициентами не представляется возможным, поэтому для приближенного вычисления вероятностей $Q_i(t)$ будем использовать численно-аналитический метод решения задачи.

Воспользуемся для этого методом дискретизации [7], суть которого сводится к следующему.

Вычислим минимальное натуральное число r , удовлетворяющее условиям:

$$r \geq 2,$$

$$\max_{1 \leq i \leq N} \max_{1 \leq v \leq r} \max_{t \in \Delta_v} |\gamma_i(t) - \gamma_{iv}| \leq \varepsilon,$$

$$\max_{1 \leq i \leq N} \max_{1 \leq v \leq r} \max_{t \in \Delta_v} |\delta_i(t) - \delta_{iv}| \leq \varepsilon,$$

где

$$\Delta_v = [t_{v-1}, t_v], t_v = v \cdot \Delta t, \Delta t = T/r,$$

$$\gamma_{iv} = \frac{1}{2} [\gamma_i(t_{v-1}) + \gamma_i(t_v)],$$

$$\delta_{iv} = \frac{1}{2} [\delta_i(t_{v-1}) + \delta_i(t_v)].$$

ε — наибольшее допустимое отклонение функций $\gamma_i(t)$ и $\delta_i(t)$ от соответствующих констант γ_{iv}, δ_{iv} на интервалах дискретизации Δ_v для всех v ($1 \leq v \leq r$), $T = t_f$.

Тогда система уравнений (1) распадается на r систем с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dQ_0^v(t)}{dt} = -\sum_{j=1}^N \gamma_j^v Q_0^v(t),$$

$$\frac{dQ_i^v(t)}{dt} = \gamma_i^v Q_0^v(t) - \delta_i^v Q_i^v(t), \quad (2)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

$$\frac{dQ_{N+1}^v(t)}{dt} = \sum_{i=1}^N \delta_i^v Q_i^v(t),$$

с начальными условиями

$$Q_i^v(t_{v-1}) = \begin{cases} Q_i(0), & \text{если } v=1, \\ Q_i^{v-1}(t_{v-1}), & \text{если } 2 \leq v \leq r. \end{cases}$$

Интегрируя систему (2) с помощью преобразования Лапласа [12], получим выражения для вероятностей состояний нападающей стороны на v -м интервале дискретизации:

$$Q_0^v(t) = Q_0^{v-1}(t_{v-1}) \exp\left(-\sum_{j=1}^N \gamma_j t\right),$$

$$Q_i^v(t) = Q_0^{v-1}(t_{v-1}) \gamma_i \frac{\exp\left(\sum_{j=1}^N \gamma_j t\right) - \exp(-\delta_i t)}{\delta_i - \sum_{j=1}^N \gamma_j} + Q_i^{v-1}(t_{v-1}) \exp(-\delta_i t),$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

$$Q_{N+1}^v(t) = \sum_{i=0}^{N+1} Q_i^{v-1}(t_{v-1}) - \sum_{i=0}^N Q_i^v(t).$$

На интервале $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ определим средние значения вероятностей нахождения нападающей стороны в состояниях B_i :

$$\tilde{Q}_i = \frac{1}{\tau_{k+1} - \tau_k} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} Q_i(t) dt = \frac{\varphi_i(\tau_{k+1}) - \varphi_i(\tau_k)}{\tau_{k+1} - \tau_k}, \quad (3)$$

где

$$\varphi_i(\tau) = \int_0^{\tau} Q_i(t) dt.$$

Исходя из приведенных выше рассуждений, при $T = \tau$ можно записать приближенное равенство

$$\varphi_i(\tau) \approx \sum_{v=1}^{\tau} \int_{t_{v-1}}^{t_v} Q_i^v(t) dt \approx \sum_{v=1}^{\tau} \Psi_i^v. \quad (4)$$

Выражения для Ψ_i^v имеют следующий вид:

$$\Psi_0^v = \frac{Q_0^{v-1}(t_{v-1})}{C} [\exp(-ct_{v-1}) - \exp(-ct_v)], \quad (5)$$

$$\Psi_i^v = Q_0^{v-1}(t_{v-1}) \gamma_i \left[\frac{\exp(-ct_{v-1}) - \exp(-ct_v)}{c(\delta_i - c)} + \frac{\exp(-\delta_i t_{v-1}) - \exp(-\delta_i t_v)}{\delta_i(c - \delta_i)} \right] + \frac{Q_i^{v-1}(t_{v-1})}{\delta_i} [\exp(-\delta_i t_{v-1}) - \exp(-\delta_i t_v)] \quad (6)$$

$$i = 1, 2, \dots, N$$

$$\Psi_{N+1}^v = (t_v - t_{v-1}) \sum_{i=0}^{N+1} Q_i^{v-1}(t_{v-1}) - \sum_{i=0}^N \Psi_i^v, \quad (7)$$

где

$$C = -\sum_{j=1}^N \gamma_j.$$

Решение рассматриваемой игры G_2 сводится к многошаговой матричной игре и последовательно-му решению в соответствии с методикой и численными алгоритмами, представленными в [10], $(L+1)$ игр на интервалах $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ ($0 \leq k < L; \tau_{L+1} = t_f$) с постоянными средними вероятностями нахождения атакующей стороны в состояниях B_i ($i=0, 1, \dots, N+1$), вычисляемых по формулам (3–7). Совокупность решений $(L+1)$ игр, для которых вероятность безотказной работы $P(t_f)$ атакуемой аппаратно-избыточной динамической системы имеет наибольшее значение, дает требуемый вектор настроек $\tau = \{\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_L\}$, $\tau_0 = 0, \tau_L < t_f$ системы $S_A^*(n, m, s)$, элементы которого соответствуют моментам перераспределения резервных элементов атакуемой системы между отказавшими основными в q -группах и соответствующие этим настройкам векторы резервирования $s(\tau_k) = \{s_1(\tau_k), s_2(\tau_k), \dots, s_q(\tau_k)\}$ динамической системы, являющиеся решением G_2 игры.

В заключение следует отметить, что рассмотренная численно-аналитическая модель игровой задачи противоборства двух динамических систем

в условиях неполной информации у игроков о поведении участников игры в процессе конфликтной ситуации применима не только для исследования и оптимизации поведения противоборствующих технических систем, но и для систем иной физической природы при соответствующей идентификации.

При этом следует понимать, что аналитическое решение задачи возможно только в самых простейших случаях. В остальных случаях следует использовать численные методы и моделирование с помощью персональных компьютеров.

Библиографический список

1. Крапивин В. Ф. Теоретико-игровые методы синтеза сложных систем в конфликтных ситуациях / ред. В. Н. Заболоцкий. М.: Советское радио, 1972. 192 с.
2. Гермейер Ю. Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971. 383с.
3. Лефевр В. А. Конфликтующие структуры. М.: Советское радио, 1973. 159 с.
4. Оуэн Н. Г. Теория игр и игровое моделирование. Исследование операций. Методологические основы и математические методы: в 3-х т. М.: Мир, 1981. Т. 1. С. 513–549.
5. Петросян Л. А., Томский Г. В. Динамические игры и их приложения. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1982. 252 с.
6. Nartov V. K. Conflict of Moving Systems. France: AMSE Press, 1994. 87 p.
7. Потапов В. И. Противоборство технических систем в конфликтных ситуациях: модели и алгоритмы: моногр. Омск: Изд-во ОмГТУ, 2015. 166 с. ISBN 978-5-8149-1993-9.
8. Потапов В. И. Задачи и численные алгоритмы оптимизации надежности аппаратно-избыточной технической системы в конфликтной ситуации при различных стратегиях защиты от атак противника // Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. Т. 16. С. 617–624. DOI 10.17587/mau.16.617-624.
9. Потапов В. И., Горн О. А. Математическая модель, метод решения и программное обеспечение для поиска и исследования оптимальных стратегий поведения в конфликтных ситуациях двух динамических систем // Омский научный вестник. Сер. Приборы, машины и технологии. 2016. № 5 (149). С. 142–147.
10. Потапов В. И. Постановка и решение игровой задачи противоборства аппаратно-избыточной динамической системы с атакующим противником, действующим в условиях неполной информации в процессе конфликта // Мехатроника, автоматизация, управление. 2017. Т. 18, № 8. С. 525–531.
11. Вентцель Е. С. Исследование операций. М.: Советское радио, 1972. 552 с.
12. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Наука, 1974. 542 с.

ПОТАПОВ Виктор Ильич, доктор технических наук, профессор (Россия), заведующий кафедрой «Информатика и вычислительная техника», заслуженный деятель науки и техники РФ.
Адрес для переписки: ivt @ omgtu.ru

Статья поступила в редакцию 10.05.2017 г.
© В. И. Потапов

Книжная полка

Михайлов, А. Н. Мировые информационные ресурсы : учеб. электрон. изд. локального распространения: практикум / А. Г. Михайлов, Т. В. Новикова – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2017. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM)

Рассмотрены основы алгоритмизации решения задач и программирования с использованием основ языка HTML. Приводятся примеры разработки алгоритмов и программ для задач разного уровня сложности. Предназначен для выполнения студентами лабораторных работ по курсу «Мировые информационные ресурсы».

Силаенков, А. Н. Компьютерные системы поддержки принятия решений : учеб. электрон. изд. локального распространения: конспект лекций / А. Н. Силаенков – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2017. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM)

Изложены основные понятия компьютерных систем поддержки принятия решений, история их возникновения, структура, принципы их построения и функционирования, классификация задач, методы решения задач принятия решений и их компьютерная поддержка. Рассматриваются системы поддержки принятия решений в различных предметных областях. Подробно рассмотрены системы поддержки принятия решений в ситуационных системах и ситуационных центрах, финансовой диагностике предприятий, информационно-аналитических системах, системах управления территориальными образованиями, системах формирования бюджетов. Рассмотрено применение систем принятия решений в телекоммуникациях, торговле, банковском деле, страховании. Издание предназначено для студентов специальности 060801 «Прикладная информатика в экономике» заочной и дистанционной форм обучения.

Цыганенко, В. Н. CALS/CASE-технологии проектирования информационных систем : учеб. электрон. изд. локального распространения: конспект лекций / В. Н. Цыганенко – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2017. – 1 эл. опт. диск (CD-ROM)

Приводятся основные методологии и принципы автоматизации проектирования программных информационных систем и информационного сопровождения и поддержки жизненного цикла изделий различного назначения. Предназначен для студентов, обучающихся по специальности 230102 «Автоматизированные системы обработки информации и управления».

ИНФОРМАЦИОННЫЕ КРИТЕРИИ ДЛЯ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, УЧАСТВУЮЩЕЙ В КОНФЛИКТНОЙ СИТУАЦИИ

В статье дается обоснование применению информационных критериев, используемых в теории информации для информационной оценки состояния динамической технической системы, участвующей в конфликтной ситуации, и эффективности ее системы тестового контроля и управления восстановлением работоспособности отказавших функциональных модулей системы в процессе конфликта в результате атак противника. Приводятся информационные критерии оценки состояния восстанавливаемой после отказов в процессе конфликта функциональных модулей технической системы. Дается информационная оценка эффективности системы тестового контроля и управления восстановлением после отказов в процессе конфликта динамической технической системы.

Ключевые слова: динамическая техническая система, конфликтная ситуация, теория информации, тестовый контроль, отказ системы, восстановление работоспособности.

Введение. В известных работах, посвященных решению проблем противоборства технических систем в конфликтных ситуациях [1–11], для оценки состояния и поведения участвующих в конфликте систем используются, как правило, параметры и критерии теории и надежности, такие как вероятность безотказной работы, среднее время наработки до отказа, коэффициент готовности, коэффициент оперативной готовности, интенсивность восстановления после отказа и другие. При этом чаще всего полагают, что у участвующих в конфликтных ситуациях технических системах для защиты от атак противника используется либо аппаратная, либо временная избыточность [12], а интенсивность отказов компонентов функциональных модулей технических систем $\lambda(t)$ и интенсивность их восстановления в процессе конфликта $\mu(t)$ являются, соответственно, возрастающими и убывающими функциями времени, закон изменения которых зависит от стратегии атакующей стороны. В указанных выше работах поведение конфликтующих технических систем аппроксимируется марковским процессом [13, 14], а для оценки состояния систем в процессе конфликта используются дифференциальные уравнения Колмогорова с переменными во времени коэффициентами. Численное решение этих уравнений позволяет при соответствующих ограничениях получить все параметры и критерии надежности и эффективности защиты от атак противника систем, участвующих в конфликтной ситуации.

В данной работе, в отличие от известных, сделана попытка использовать информационные крите-

рии, применяемые в теории информации [15–17], для оценки состояния динамической технической системы и эффективности ее системы тестового контроля и управления восстановлением работоспособности отказавших компонентов системы в процессе конфликтной ситуации.

Информационные критерии оценки состояния восстанавливаемой после отказов в процессе конфликта функциональных модулей технической системы. В развитие положений работ [6–12] будем рассматривать техническую систему с восстанавливаемыми после отказов функциональными модулями как систему автоматического управления [18], а точнее — как автоматизированную систему контроля и управления, где процессом управления, подлежащим автоматизации, является процесс восстановления после отказов в процессе конфликта функциональных свойств модулей (компонентов) системы, а система управления включает в свой состав устройство контроля состояния технической системы и устройство восстановления функциональных модулей после отказов в результате атак противника.

В теории информации [15, 16] для оценки состояния объектов в процессе контроля и управления введена интегральная характеристика неопределенности — энтропия состояния объекта $H(t, \tau)$, где t — текущий момент времени, τ — момент окончания работы рассматриваемой системы управления.

Воспользуемся этой интегральной информационной характеристикой для оценки состояния,

восстанавливаемой после отказов, участвующей в конфликтной ситуации технической системы.

Пусть динамическая техническая система (ДТС), участвующая в конфликтной ситуации $S_A(n)$, имеющая в своем составе устройство контроля и восстановления, состоит из n восстанавливаемых после отказов от атак противника функциональных модулей. Будем полагать, что в технической системе $S_A(n)$ наряду с внезапными константными отказами типа $(0 \rightarrow 1)$ и $(1 \rightarrow 0)$ имеют место постепенные отказы, связанные, например, с изменением во время конфликта под воздействием атак противника некоторых параметров функциональных модулей.

Обозначим вероятность отсутствия внезапных отказов в системе $S_A(n)$ через

$$P_{во}(t, \tau) = \prod_{i=1}^n p_{воi}(t, \tau), \quad (1)$$

начиная с текущего момента времени t до момента τ окончания работы в условиях конфликта.

Аналогично, вероятность отсутствия постепенных отказов в n , восстанавливаемых после отказов функциональных модулей технической системы $S_A(n)$, запишем в виде

$$P_{по}(t, \tau) = \prod_{i=1}^n p_{поi}(t, \tau). \quad (2)$$

В приведенных выражениях (1), (2) $p_{воi}$ и $p_{поi}$ — вероятность появления внезапных и вероятность появления постепенных отказов соответственно, в n функциональных модулях, входящих в состав $S_A(n)$ -системы.

Очевидно, что вероятность выполнения задания участвующей в конфликтной ситуации $S_A(n)$ -системой за время τ определяется выражением

$$P_{S_A(n)}(t, \tau) = P_{во}(t, \tau)P_{по}(t, \tau).$$

Теперь, используя известный из теории информации прием, получим выражение для энтропии состояния ДТС в процессе контроля и управления восстановлением после отказов функциональных модулей системы $S_A(n)$

$$H_{S_A(n)}(t, \tau) = H_{во}(t, \tau) + H_{по}(t, \tau), \quad (3)$$

где

$$H_{во}(t, \tau) = - \left\{ \begin{array}{l} P_{во}(t, \tau) \log_2 P_{во}(t, \tau) + \\ + [1 - P_{во}(t, \tau)] \log_2 [1 - P_{во}(t, \tau)] \end{array} \right\} -$$

энтропия, обусловленная наличием внезапных отказов в ДТС, происходящих с вероятностью $P_{во}(t, \tau)$;

$$H_{по}(t, \tau) = - \left\{ \begin{array}{l} P_{по}(t, \tau) \log_2 P_{по}(t, \tau) + \\ + [1 - P_{по}(t, \tau)] \log_2 [1 - P_{по}(t, \tau)] \end{array} \right\} -$$

энтропия, обусловленная наличием постепенных отказов в ДТС, происходящих с вероятностью $P_{по}(t, \tau)$.

Рассматриваемая система в процессе контроля и управления получает некоторое количество информации $J(t, \tau)$ о состоянии ДТС:

$$J(t, \tau) = H_{S_A(n)}(t, \tau) - H_0(t, \tau), \quad (4)$$

где $H_0(t, \tau)$ — остаточная энтропия состояния ДТС после проведения очередного процесса контроля

и управления восстановлением функциональных свойств технической системы $S_A(n)$ после отказов в процессе конфликта соответствующих функциональных модулей.

Для оценки эффективности процесса контроля и управления восстановлением в динамической $S_A(n)$ -системе, используя (3) и (4), можно получить следующий критерий:

$$G_J(t, \tau) = J(t, \tau) / H_{S_A(n)}(t, \tau), \quad (5)$$

из которого следует очевидный вывод о том, что чем большее количество информации будет получено о состоянии ДТС, тем система контроля и управления эффективнее.

В условиях реального функционирования динамической технической системы в конфликтной ситуации при ограничении времени выполнения задания при атаках противника удобно использовать критерий эффективности системы контроля и управления в ДТС, оценивающий ее быстродействие

$$G_{J,T}(t, \tau) = J(t, \tau) / T(t, \tau), \quad (6)$$

где $T(t, \tau)$ — время, необходимое для проведения контроля возможных неисправностей в $S_A(n)$ -системе и восстановления ее работоспособности после отказов — управление системой.

Выбор соответствующего, (5) или (6), критерия для оценки эффективности системы обнаружения отказов и восстановления работоспособности динамической технической системы $S_A(n)$ определяется требованиями к надежности и быстродействию технической системы, участвующей в конфликтной ситуации, и выбранной стратегией ее поведения в условиях конфликта.

Обычно процесс контроля состояния и управления участвующей в конфликтной ситуации ДТС представляет собой выполненную по соответствующему алгоритму последовательность k контрольных и диагностических процедур (проверяющих и диагностических тестов) E_{ij} ($i = 1, 2, \dots, k$), ($j = 1, 2, \dots, l$), состоящих, например, не более чем из l тест-наборов. При этом процесс контроля и управления технической системой может осуществляться либо непрерывно, либо дискретно с определенной частотой, выбранной из условия достаточности времени для снижения неопределенности до заданного уровня при определенной интенсивности процесса контроля и управления, определяемого стратегией атакующей $S_A(n)$ -системы.

Очевидно, что количество информации, получаемое в процессе контроля и управления ДТС в этом случае, равно изменению количества энтропии:

$$J_{E_{ij}}(X, t, \tau) = H_{S_A(n)}(X, t, \tau) - H_{E_{ij}}(X, t, \tau),$$

где $H_{E_{ij}}(X, t, \tau) = P_{E_{i1}} H_{E_{i1}}(X, t, \tau) + \dots + P_{E_{il}} H_{E_{il}}(X, t, \tau)$ — условная энтропия состояния ДТС при проведении E_{ij} контрольных и диагностических процедур, состоящих из l тест-наборов; $H_{E_{ij}}(X, t, \tau)$ — энтропия ДТС после осуществления процедуры E_{ij} ; $P_{E_{ij}}$ — вероятность исхода процедуры E_{ij} .

Если предположить, что в конфликтной ситуации участвует не одна динамическая техническая система, а i ($i = 1, 2, \dots, m$) не зависящих друг от друга атакуемых нападающей стороной $S_{Ai}(n)$ ($i = 1, 2, \dots, m$)-систем, а $X\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ — вектор случайных функций времени, характеризующих выходные параметры,

определяющие работоспособность в процессе конфликта рассматриваемых технических систем, то при очевидной независимости выходных параметров этих систем энтропия защищающейся системы, состоящей из $i (i = 1, 2, \dots, m)$ ДТС, определяется по формуле

$$H(x_1, x_2, \dots, x_m, t, \tau) = \sum_{i=1}^m H(x_i, t, \tau).$$

В связи с тем, что в составе рассматриваемой сложной защищающейся от атак противника системы имеет место $i (i = 1, 2, \dots, m)$ восстанавливаемых после отказов $S_{Ai}(n)$ -систем, каждую из которых можно рассматривать как дискретную систему управления, то энтропия такой сложной системы, состоящей из m ДТС, определяется по формуле

$$H(P_1, P_2, \dots, P_m, t, \tau) = - \sum_{i=1}^m P_i(t, \tau) \log_2 P_i(t, \tau),$$

где $P_i(t, \tau)$ — вероятность состояния i -ой ДТС.

Легко видеть, что готовность рассматриваемой сложной атакуемой системы к продолжению выполнения задания, т.е. к активному участию в конфликтной ситуации после восстановления отказавшей $S_{Ai}(n)$ -системы можно оценить коэффициентом готовности

$$K_r(X, t, \tau) = \frac{\sum_{i=1}^m H(x_i, t, \tau)}{\sum_{i=1}^m H_0(x_i, t, \tau)},$$

где $H_0(x_i, t, \tau)$ — максимально возможная энтропия i -го выходного параметра отказавшей ДТС до начала процесса контроля и управления.

Информационная оценка эффективности системы тестового контроля и управления восстановлением после отказов в процессе конфликта динамической технической системы. Проблема технической диагностики в оперативном режиме технических систем, участвующих в конфликтных ситуациях, в настоящее время изучена недостаточно полно и содержит много нерешенных вопросов, связанных как с аппаратными, так и с программными (тестовыми) методами контроля работоспособности и локализации неисправностей. Применение для этих целей известных методов контроля и технической диагностики [19–21] вызывает определенные трудности, так как эти методы разработаны чаще всего для избыточных технических систем, а современные динамические технические системы, участвующие в конфликтных ситуациях, функционально сложны и содержат одну или несколько видов избыточности, которая используется для защиты технической системы от атак противника. Поэтому разработчикам таких систем приходится искать порой достаточно сложные приемы и методы для создания у ДТС эффективной системы, чаще всего, тестового контроля и управления восстановлением после отказов в процессе конфликта. Поэтому представляет определенный интерес попытка получить информационную оценку эффективности тестового контроля рассматриваемой выше $S_A(n)$ -системы.

Будем полагать, что участвующая в конфликтной ситуации динамическая техническая система содержит в своем составе систему тестового контроля и управления (СКУ), которая в автоматическом режи-

ме осуществляет контроль работоспособности ДТС в течение конфликта, диагностику отказавшего функционального модуля и управление восстановлением работоспособности $S_A(n)$ -системы.

Используя методы теории информации, попытаемся дать количественную оценку эффективности функционирования такой системы тестового контроля и управления восстановлением после отказа функционального модуля от атак противника рассматриваемой технической системы.

Очевидно, что показатель эффективности функционирования рассматриваемой $S_A(n)$ -системы в значительной степени зависит от качества выполнения СКУ ее основных функций, то есть от эффективности функционирования самой системы контроля и управления. Мера, характеризующая качество выполнения СКУ основных ее функций, должна быть достаточно общей, чтобы учитывать все основные показатели качества процесса контроля и диагностики ДТС. Можно полагать, что такой мерой является информационная оценка состояния объекта контроля, доставляемая реальной системой контроля, которая может отказывать и давать неполную информацию о состоянии контролируемой или диагностируемой $S_A(n)$ -системы по сравнению с идеальной системой контроля, лишенной указанных недостатков.

Обозначим J_r — информацию о состоянии контролируемой ДТС, доставляемую реальной СКУ, т.е. такой системы контроля, которая может отказывать и вносить погрешность, а J_p — аналогичную информацию, доставляемую идеальной СКУ, которая определяет ее потенциальную возможность. Тогда, с информационной точки зрения, за эффективность функционирования системы контроля и управления $S_A(n)$ -системы на интервале времени $r-t$ можно принять отношение

$$W_{SA} = J_r(t, r) / J_p(t, r), \quad (7)$$

где t — текущим момент времени, r — момент окончания работы системы контроля и управления. Выражение (7) можно использовать как для оценки функционирования СКУ при контроле работоспособности рассматриваемой $S_A(n)$ -системы в целом, так и при локализации неисправностей в ДТС. При этом способы вычисления входящих в (7) величин в режимах контроля и диагностики будут различными, так как в этих случаях различен характер доставляемой информации.

Получим сначала информационную оценку эффективности системы тестового контроля участвующей в конфликтной ситуации $S_A(n)$ -системы.

Базируясь на известных положениях теории информации, можно записать, что количество информации, получаемое реальной СКУ рассматриваемой $S_A(n)$ -системы при контроле и управлении за интервал времени $r-t$, определяется равенством

$$J_r(t, \tau) = H_{S_A(n)}(t, r) - H(t, r), \quad (8)$$

где $H_{S_A(n)}(t, r)$ — энтропия $S_A(n)$ и СКУ вместе взятых, характеризующая неопределенность до начала процесса контроля и управления; $H(t, r)$ — оставшаяся после тестовой процедуры энтропия $S_A(n)$ и СКУ.

Используя обозначения, введенные в [17], с учетом внезапных и постепенных отказов функциональных модулей ДТС в результате атак противника имеет место равенство

$$H_{S_A(n)}(t, r) = H_{Bo}(t, r) + H_{Io}(t, r).$$

Потенциальные возможности получения информации идеальной SKU $S_A(n)$ -системы определяются следующим образом:

$$J_p(t, r) = H_{S_A(n)}(t, r). \quad (9)$$

Очевидно, что количество информации J_p может быть увеличено за счет повышения точности тестового контроля и уменьшения энтропии, обусловленной наличием ошибок в реальной SKU.

С учетом равенств (8) и (9) выражение (7) принимает следующий вид:

$$W_{S_A} = \frac{H_{S_A(n)}(t, r) - H(t, r)}{H_{S_A(n)}(t, r)}. \quad (10)$$

Из (10) видно, что эффективность функционирования системы тестового контроля и управления восстановлением работоспособности после отказа функционального модуля в процессе конфликта $S_A(n)$ -системы определяется числом, изменяющимся от 0 до 1. При этом очевидно, что идеальная SKU имеет эффективность, равную 1, а реальная SKU меньше единицы.

Поскольку процесс отказов компонентов в ДТС и в системе контроля и управления имеет вероятностный характер, то, зная вероятности внезапных и постепенных отказов в этих системах, нетрудно получить выражения для определения значений энтропии $H_{S_A(n)}(t, r)$ и $H(t, r)$ по формулам, приведенным выше.

В том случае, когда тестовый контроль и диагностику более удобно осуществлять не интегрально для всей $S_A(n)$ -системы, а дифференцированно для каждого функционального модуля, то это следует выполнять, а результат обобщать на всю рассматриваемую $S_A(n)$ -систему.

В этом случае эффективность системы тестового контроля и управления восстановлением после отказов в процессе конфликта функциональных модулей ДТС можно выразить через энтропии функциональных модулей, входящих в состав $S_A(n)$ -системы и SKU в следующем виде:

$$W_{S_A(n)} = \frac{\sum_{i=1}^n [H_{\Phi_{M_i}}(t, r) - H_i(t, r)]}{\sum_{i=1}^n H_{\Phi_{M_i}}(t, r)},$$

где $H_{\Phi_{M_i}}(t, r)$ и $H_i(t, r)$ — соответственно энтропия i -го функционального модуля $S_A(n)$ -системы до начала процесса тестового контроля и управления и оставшаяся энтропия i -го функционального модуля после тестовой процедуры контроля.

Заключение. В заключение следует отметить, что получить численные значения рассмотренных информационных критериев, оценивающих состояние динамических технических систем, участвующих в конфликтных ситуациях, когда противник, исходя из имеющихся у него ресурсов и выбранной стратегии атаки, стремится в процессе конфликта увеличить интенсивность отказов $\lambda(t)$ функциональных модулей ДТС и уменьшить интенсивность $\mu(t)$ их восстановления после отказа достаточно сложно. Это вызвано тем, что поведение участвующих в конфликтной ситуации динамических систем

описывается системой дифференциальных уравнений с переменными во времени коэффициентами [8], а их решение, как правило, возможно методом дискретизации и целочисленного программирования с использованием компьютерной техники.

Библиографический список

1. Крапивин В. Ф. Теоретико-игровые методы синтеза сложных систем в конфликтных ситуациях. М.: Советское радио, 1972. 192 с.
2. Лефевр В. А. Конфликтующие структуры. М.: Советское радио, 1973. 158 с.
3. Петросян Л. А., Томский Г. В. Динамические игры и их приложения. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1982. 252 с.
4. Нартов Б. К., Братцев С. Г., Мурзин Ф. А. [и др.]. Конфликт сложных систем: Модели и управление. М.: Изд-во МАИ, 1995. 118 с. ISBN 5-7035-0554-2.
5. Nartov B. K. Conflict of Moving Systems. France: AMSE Press, 1994. 86 p. ISBN 2-909214-66-4.
6. Potapov V. I. Model and Numerical Solving Algorithm of Counteraction Problem for Two Restored after Failure Redundant Engineering Systems // Journal of Automation and Information Sciences. 2015. Vol. 47, no. 8. P. 41–51. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v47.i8.40.
7. Потапов В. И. Математическая модель и алгоритм оптимального управления подвижным объектом в конфликтной ситуации // Мехатроника, автоматизация, управление. 2014. № 7 (160). С. 16–22.
8. Потапов В. И. Противоборство технических систем в конфликтных ситуациях: модели и алгоритмы: моногр. Омск: Изд-во ОмГТУ, 2015. 168 с. ISBN 978-5-8149-1993-9.
9. Потапов В. И. Задачи и численные алгоритмы оптимизации надежности аппаратно-избыточной технической системы в конфликтной ситуации при различных стратегиях защиты от атак противника // Мехатроника, автоматизация, управление. 2015. Т. 16, № 9. С. 617–624. DOI: 10.17587/mau.16.617-624.
10. Потапов В. И., Горн О. А. Математическая модель, метод решения и программное обеспечение для поиска и исследования оптимальных стратегий поведения в конфликтных ситуациях двух динамических систем // Омский научный вестник. Сер. Приборы, машины и технологии. 2016. № 5 (149). С. 142–147.
11. Потапов В. И. Новая математическая модель аппаратно-избыточной технической системы, участвующей в конфликтной ситуации // Мехатроника, автоматизация, управление. 2016. Т. 17, № 6. С. 363–367. DOI: 10.17587/mau.17.363-367.
12. Потапов В. И. Разработка математической модели динамической технической системы, восстанавливаемой после отказов в процессе конфликта // Омский научный вестник. Сер. Приборы, машины и технологии. 2017. № 2 (152). С. 97–101.
13. Вентцель Е. С. Исследование операций. М.: Советское радио, 1972. 552 с.
14. Козлов Б. А., Ушаков И. А. Справочник по расчету надежности аппаратуры радиоэлектроники и автоматики. М.: Советское радио, 1975. 472 с.
15. Кузьмин И. В., Кедрус В. А. Основы теории информации и кодирования. Киев: Вища школа, 1977. 280 с.
16. Бриллюэн Л. Наука и теория информации / пер. с англ. А. А. Харкевича. М.: Физматгиз, 1960. 392 с.
17. Кузьмин И. В. Оценка эффективности и оптимизация автоматических систем контроля и управления. М.: Советское радио, 1971. 296 с.
18. Красовский А. А., Поспелов Г. С. Основы автоматики и технической кибернетики. М., Л.: Госэнергоиздат, 1962. 600 с.
19. Карибский В. В., Пархоменко П. П., Согомонян Е. С. Техническая диагностика объектов контроля. М.: Энергия, 1967. 79 с.

20. Сердаков А. С. Автоматический контроль и техническая диагностика. Киев: Техника, 1971. 242 с.

21. Основы технической диагностики / Под ред. П. П. Пархоменко. М.: Энергия, 1976. 464 с.

ПОТАПОВ Виктор Ильич, доктор технических наук, профессор (Россия), заведующий кафедрой

«Информатика и вычислительная техника», заслуженный деятель науки и техники РФ.

РАЛОВЕЦ Марина Леонидовна, инженер 1-й категории кафедры «Информатика и вычислительная техника».

Адрес для переписки: ivt@omgtu.ru

Статья поступила в редакцию 31.05.2017 г.

© В. И. Потапов, М. А. Раловец

УДК 519.83

**О. Т. ДАНИЛОВА
С. О. САВЧЕНКО
Н. В. КАПЧУК**

Омский государственный
технический университет,
г. Омск

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛИ НАРУШИТЕЛЯ НА ПРИМЕРЕ СИСТЕМЫ ФИЗИЧЕСКОЙ ЗАЩИТЫ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТЕОРИИ ИГР И ТЕОРИИ ГРАФОВ

Для эффективного обеспечения защищенности системы информационной безопасности от различных видов атак и более тщательного описания нарушителя целесообразно рассматривать процесс защиты как одноходовую матричную бескоалиционную игру с совершенной информацией и нулевой суммой — существуют два игрока с конечным набором стратегий, которые знают все о действиях друг друга и выигрывают исключительно за счет оппонента, не имея возможности скооперироваться. В данной работе описывается использование элементов теории игр, теории вероятностей и теории графов для разработки алгоритма построения модели нарушителя в системе информационной безопасности.

Ключевые слова: модель нарушителя, теория игр, информационная безопасность, моделирование, графы.

I. Введение. В литературе рассматривается игровая модель системы защиты информации, используемая для решения проблемы выбора решения, обеспечивающего оптимальное соотношение между затратами на средства защиты и снижением риска эксплуатации [1, 2]. В ней исследуется антагонистическая матричная игра [3]. При этом стратегии одного игрока («защитника») заключаются в приведении автоматизированной системы в соответствие с требованиями определенного класса защищенности. Под классом защищенности понимается определенный набор требований к функциям защиты системы. Стратегии другого игрока («нарушителя») будут заключаться в реализации угрозы, относящейся к определенному классу угроз. Функция выигрыша будет представлять собой сумму затрат на реализацию предлагаемых мер защиты и ожидаемых потерь в случае реализации угрозы определенного класса, при условии приведения системы в соответствие с требованиями по классу защищенности [4]. Для построения данной модели необходимо:

- наличие классификации угроз;
- проведение анализа рисков, который покажет ожидаемый объем потерь в случае реализации атаки данного класса;
- формальное описание классов защиты для ИС.

Каждый класс защиты должен характеризоваться, с одной стороны, вероятностным коэффициентом, который показывает, насколько снижается вероятность успешной атаки на систему, а с другой — оценкой стоимости технических средств и мероприятий по приведению ИС в соответствие с требованиями данного класса. В модели предполагается, что нарушитель затрачивает x средств на преодоление механизма защиты, создание которого потребовало y средств. Ожидаемое количество информации, получаемое нарушителем, есть функция $I(x, y)$.

Функция $f(n)$ определяет ценность для нарушителя n единиц информации, а $g(n)$ — суммарные затраты на создание и сбережение такого же количества информации, то чистая прибыль нарушителя равна:

$$V(x, y) = f[I(x, y)] - x.$$

Потери же равны:

$$u(x, y) = g[I(x, y)] + y.$$

В соответствии с теорией игр оптимальные стратегии обеих сторон определяются исходя из следующих условий:

$$f'[I(x, y)] \frac{dI(x, y)}{dx} = 1,$$

$$g'[I(x, y)] \frac{dI(x, y)}{dx} = 1.$$

Основным недостатком модели, приведенной в [2], является то, что при практическом применении невозможно построить достоверные функции I , f и g . Также приведенная модель не рассчитывает вероятности реализации угроз.

При выполнении исследования был разработан алгоритм, обладающий преимуществами и недостатками, представленными в табл. 1.

II. Постановка задачи. Так как процесс защиты представлен в виде игры с совершенной информацией, то система знает все об уязвимостях, а нарушитель знает все об уязвимостях и обо всех действиях системы.

Пусть существует система ИБ (ИБ), в которой имеется множество уязвимостей $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_i\}$ [3]. Существует нарушитель, который может реализовать множество угроз (стратегий) $T = \{t_1, t_2, \dots, t_j\}$. В таком случае множество стратегий защиты системы $D = \{d_1, d_2, \dots, d_j\}$ будет направлено на ликвидацию уязвимостей. Мерой защиты будет являться сумма затрат на осуществление предлагаемых защитных мер и ожидаемых потерь в случае реализации угроз.

III. Теория. Исходя из вышеизложенного, алгоритм может быть представлен в виде девяти шагов.

Шаг 1. Определяются возможные потери при нарушении одного или нескольких свойств информации — конфиденциальности, целостности или доступности. Для этого можно использовать метод экспертных оценок или метод относительных шкал [5]. Предполагается, что потенциальная прибыль нарушителя пропорциональна этим потерям. Эти

данные могут быть представлены в виде элементов множества Q .

Шаг 2. Пусть существует множество $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_i\}$ — множество уязвимостей системы ИБ. Элементами множества могут стать факторы и события, позволяющие нарушителю успешно реализовать угрозы информационной безопасности. Вводится множество $S = \{s_1, s_2, \dots, s_i\}$, элементами которого является стоимость ликвидации каждого элемента из Y .

Шаг 3. Задается множество $T = \{T_1, T_2, \dots, T_j\}$. С целью более точного описания нарушителя производится его классификация. В качестве критерия целесообразно использовать принадлежность нарушителя к организации, его цель и потенциал — меру усилий, затрачиваемых нарушителем при реализации угроз безопасности информации в системе.

Каждый тип нарушителя может использовать только некоторые уязвимости. Поэтому множество T будет состоять из подмножеств t_i , элементами которых будут угрозы, доступные таким типам.

Шаг 4. Описывается множество $P = \{p_1, p_2, \dots, p_i\}$, элементами которого являются вероятности реализации нарушителем соответствующих угроз.

Шаг 5. Вводится множество $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_i\}$, элементы которого соответствуют затратам времени на использование каждой уязвимости в системе.

Шаг 6. Так как процесс защиты представлен в виде игры с совершенной информацией, нарушитель и защитник используют одно и то же множество уязвимостей, с той лишь разницей, что нарушитель пытается их реализовать, а защитник — ликвидировать. Поэтому задается множество стратегий защитника $D = \{d_1, d_2, \dots, d_j\}$, элементами которого будут являться всевозможные сочетания ликвидации уязвимостей. Добавим множество $K = \{k_1, k_2, \dots, k_j\}$, элементы которого характеризуют стоимость реализации стратегий из множества D :

$$k_i = f(d_i).$$

Шаг 7. Строится платежная матрица, строками которой будут являться стратегии защитника, а столбцами — нарушителя (табл. 2), где X_{ij} — вероятность неправильного функционирования системы при использовании стратегий d_i и T_j :

Таблица 1

Преимущества и недостатки разработанного алгоритма

Преимущества	Недостатки
Более широкий охват факторов, влияющих на систему ИБ	Необходимо большое количество входных данных
Совместимость с другими алгоритмами	Быстрый рост сложности алгоритма
Комплексный подход к оценке защищенности системы	Большое количество вычислений
Высокая точность при условии полноты входных данных	Высокая трудоемкость
Определение наиболее оптимальной и вероятной стратегии поведения нарушителя и защитника	Неточность и субъективность при оценке вероятностей угроз, а также стоимости информации

Платежная матрица

Нарушитель Защитник	T_1	T_2	...	T_m
d_1	X_{11}	X_{12}	...	X_{1m}
d_2	X_{21}	X_{22}	...	X_{2m}
...
d_n	X_{n1}	X_{n2}	...	X_{nm}

Таблица 3

Входные данные

№	Угроза	Вероятность реализации	Стоимость устранения, у.е.	Затраты времени на реализацию, сек.	Угроза доступна для типов нарушителя
1	Подделка пропуска	0,31	10 000	3600	T_2, T_3
2	Неправильная идентификация	0,17	15 000	60	T_2, T_3
3	Обесточивание здания	0,42	25 000	600	T_1, T_3
4	Преодоление сигнализации	0,27	25 000	300	T_1, T_2, T_3
5	Взлом двери	0,11	15 000	300	T_1, T_2, T_3

$$X_{ij} = F(d_i, T_j).$$

Данный параметр можно определить любым графовым методом, например, модифицированным алгоритмом Дейкстры. Такой подход позволит не только найти вероятность проникновения нарушителя, но и наикратчайший маршрут. Получив маршрут нарушителя, можно оценить время, затрачиваемое на реализацию атаки.

Шаг 8. Предполагается, что в системе имеется n уязвимостей. Количество стратегий защитника будет обозначено как N . Тогда вычисление N сводится к вычислению сочетаний из всех уязвимостей:

$$N = \sum_{i=0}^n C_n^i = \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

Для доказательства равенства можно использовать разложение в бином Ньютона [6]:

$$\sum_{i=0}^n C_n^i x^i = C_n^0 x^0 + C_n^1 x^1 + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n = (1+x)^n.$$

Если положить $x=1$, получается:

$$N = \sum_{i=0}^n C_n^i = 2^n.$$

Пусть m — количество стратегий нарушителя, полученное из его классификации по определенным признакам. Тогда общее количество возможных сценариев будет равно $m \cdot N$. Соответственно, с ростом количества уязвимостей сложность алго-

ритма будет быстро расти. Более того, возможен вариант, когда алгоритм покажет, что наиболее эффективной стратегией защитника будет ликвидация всех уязвимостей, чего на практике достичь невозможно.

Для оценки эффективности защиты для выбранной пары стратегий защитника и нарушителя вводится параметр R_{ij} :

$$R_{ij} = (X_{ij} \cdot Q_i) + k_i,$$

где X_{ij} — вероятность правильного функционирования системы, Q_i — потери при нарушении свойства информации, k_i — затраты на реализацию стратегии защиты d_i . Чем больше параметр R_{ij} , тем менее эффективна система и тем больше потерь понесет система при атаке нарушителя.

Шаг 9. В матрице, представленной в шаге 7, производится замена X_{ij} на R_{ij} .

Согласно теории игр, для защитника оптимальной будет «минимаксная» стратегия. Логично предположить, что для каждой стратегии d_i нарушителем будет выбрана стратегия, приводящая к максимальному выигрышу от нарушения, т.е. с наибольшим показателем R . Чтобы определить оптимальную стратегию защитника V , необходимо для каждой d_i найти наибольшее R , а затем из полученного множества выбрать стратегию с наименьшим показателем:

$$V = \min_{1 \leq i \leq n} \max_{1 \leq j \leq m} R_{ij}.$$

Стратегия нарушителя, наоборот, будет «максиминной». Предполагая, что защитник будет выбирать стратегию, приводящую к минимальному выигрышу, необходимо найти максимум из множества таких стратегий. Пусть оптимальная стратегия нарушителя обозначена как U . Тогда:

$$U = \max_{1 \leq i \leq n} \min_{1 \leq j \leq m} R_{ij}.$$

Значения U и V соответственно называются нижней и верхней ценой игры. Таким образом, если нарушитель будет придерживаться максиминной стратегии, ему гарантирован выигрыш, не меньший, чем U . Если же защитник использует минимаксную стратегию, то нарушитель не может выиграть больше, чем V .

Игра называется игрой с седловой точкой, если ее нижняя и верхняя цены совпадают, т.е. выполняется равенство:

$$V = \min_{1 \leq i \leq n} \max_{1 \leq j \leq m} R_{ij} = \max_{1 \leq i \leq n} \min_{1 \leq j \leq m} R_{ij} = U.$$

Если процесс защиты рассматривается как одноходовая игра, то сторонам целесообразно придерживаться минимаксной и максиминной стратегий как в игре с седловой точкой, так и в игре без седловой точки [7]. В случае многократного повторения игры с седловой точкой также целесообразно придерживаться принципа минимакса. Если же многократно повторяется игра без седловой точки, то постоянное использование минимаксной стратегии становится невыгодным [5]. Так как стратегиями защитника является ликвидация тех или иных уязвимостей, многократное повторение игры в вышеописанной форме можно считать не имеющей смысла.

Следовательно, для выбора средств эффективной защиты систем ИБ от различных видов атак целесообразно всегда придерживаться принципа минимакса.

Для более полного описания нарушителя следует рассматривать несколько сценариев его взаимодействия с нарушителем. Например, нарушитель может поставить перед собой цель нанести максимальный ущерб системе, без получения доступа к защищаемой информации, либо наоборот, получить доступ

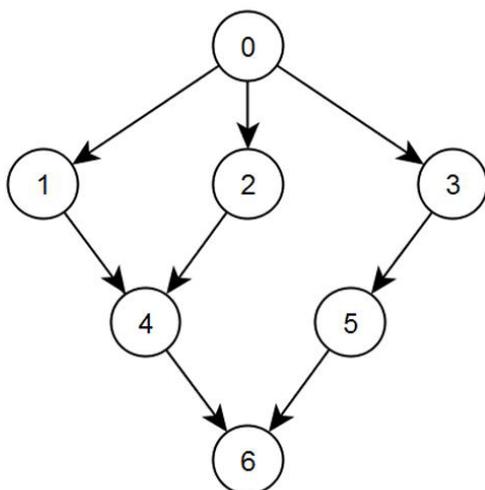


Рис. 1. Сценарий поведения злоумышленника

Результаты

Стратегия защитника (ликвидированные угрозы)	Стоимость потерь от типа нарушителя, у.е.		
	T_1	T_2	T_3
—	50 000	80 000	80 000
1	60 000	60 000	60 000
2	65 000	95 000	95 000
3	25 000	105 000	105 000
4	75 000	25 000	75 000
5	15 000	95 000	95 000
1, 2	75 000	25 000	75 000
1, 3	35 000	85 000	85 000
2, 3	40 000	120 000	120 000
1, 2, 3	50 000	50 000	50 000
1, 4	85 000	35 000	85 000
2, 4	90 000	40 000	90 000
1, 2, 4	100 000	50 000	100 000
3, 4	50 000	50 000	50 000
1, 3, 4	60 000	60 000	60 000
2, 3, 4	65 000	65 000	65 000
1, 2, 3, 4	75 000	75 000	75 000
1, 5	25 000	75 000	75 000
2, 5	30 000	110 000	110 000
1, 2, 5	40 000	40 000	40 000
3, 5	40 000	120 000	120 000
1, 3, 5	50 000	100 000	100 000
2, 3, 5	55 000	135 000	135 000
1, 2, 3, 5	65 000	65 000	65 000
4, 5	40 000	40 000	40 000
1, 4, 5	50 000	50 000	50 000
2, 4, 5	55 000	55 000	55 000
1, 2, 4, 5	65 000	65 000	65 000
3, 4, 5	65 000	65 000	65 000
1, 3, 4, 5	75 000	75 000	75 000
2, 3, 4, 5	80 000	80 000	80 000
1, 2, 3, 4, 5	90 000	90 000	90 000

Рекомендации

Название сценария	Уязвимости, рекомендуемые к ликвидации	Наиболее вероятный тип нарушителя	Возможные потери, руб.	Время, затрачиваемое на атаку, сек.	Наиболее вероятный маршрут нарушителя
Оптимальная стратегия для защитника	1, 2, 5	—	40 000	—	—
Бездействие защитника	—	T_2	80 000	3900	0-1-4-6
Нарушитель пытается нанести максимальный ущерб	—	T_1	90 000	—	—
Нарушитель пытается получить доступ к информации	—	T_2	80 000	3900	0-1-4-6

к информации. Защитник может бездействовать либо принимать все необходимые меры для укрепления системы.

IV. Результаты экспериментов. Для апробации описанного алгоритма была рассмотрена гипотетическая система физической защиты. Так как физический доступ к информации подразумевает возможность нарушения всех ее свойств, поэтому отдельными ее свойствами можно пренебречь, а общая стоимость защищаемой информации составляет 1000000 у.е. Рассматривается внешний злоумышленник, который может обладать низким, средним или высоким потенциалом, и в зависимости от этого способен реализовать некоторые из 5 доступных угроз. В данном примере стоимость ликвидации каждой угрозы определяется случайным числом от 0 до 25000 у.е. Вероятности и затраты времени при реализации угроз также задаются случайно. Эти данные могут быть представлены в виде следующей таблицы (табл. 3).

Сценарий поведения злоумышленника можно представить в виде графа, где вершины 0 и 6 — начальная и конечная точки (рис. 1).

Типы нарушителя T_1, T_2, T_3 соответствуют низкому, среднему и высокому потенциалу. Вероятность правильного функционирования системы определяется с помощью модифицированного алгоритма Дейкстры [8, 9]. Входные данные были обработаны с помощью описанного алгоритма, полученные результаты были занесены в табл. 4.

При этом нижняя цена игры U составляет 40000 у.е., а верхняя цена игры V равна 90000 у.е. Рекомендации, полученные в ходе работы алгоритма, можно представить в виде табл. 5.

V. Обсуждение результатов. Из результатов эксперимента следует, что для защитника оптимальной стратегией будет ликвидация уязвимостей № 1, № 2 и № 5. Для злоумышленника оптимальная стратегия подразумевает, что защитник ликвидирует все уязвимости и, таким образом, несет большие убытки либо будет бездействовать [10].

VI. Выводы и заключение. Предложенный алгоритм, базирующийся на теории игр, теории вероятностей и оценке стоимости информации, позволяет оценить защищенность системы информационной безопасности, а также определить наиболее оптимальные стратегии поведения защитника и нарушителя. При условии достаточности входных данных

такой подход позволяет с высокой точностью оценивать и оптимизировать эффективность защиты системы ИБ.

Библиографический список

1. Герасименко В. А., Малюк А. А. Основы защиты информации. М.: Моск. гос. инж.-физ. ин-т (техн. ун-т), 1997. 537 с. ISBN 5-88852-010-1.
2. Корт С. С. Теоретические основы защиты информации. М.: Гелиос АРВ, 2004. 240 с. ISBN 5-85438-010-2.
3. Протасов И. Д. Теория игр и исследование операций. М.: Гелиос АРВ, 2006. 368 с. ISBN 5-85438-133-8.
4. Мельников В. В. Безопасность информации в автоматизированных системах. М.: Финансы и статистика, 2003. 368 с. ISBN 5-279-02560-7.
5. Тихонов В. А., Райх В. В. Информационная безопасность: концептуальные, правовые, организационные и технические аспекты. М.: Гелиос АРВ, 2006. 528 с. ISBN 5-85438-153-2.
6. Колемаев В. А., Калинина В. Н. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: ИНФРА-М, 1997. 302 с. ISBN 5-86225-571-0.
7. Иванов В. П. Математическая оценка защищенности информации от несанкционированного доступа // Специальная техника. 2004. № 1. С. 58–69.
8. Оуэн Г. Теория игр: пер. с англ. М.: Вузовская книга, 2008. 216 с. ISBN 978-5-9502-0330-5.
9. Савченко С. О., Семенова А. Р. Программа «Реализация логико-вероятностного метода» // Хроники объединенного фонда электронных ресурсов «Наука и образование». 2016. № 7 (86). С. 6.
10. Малюк А. А. Информационная безопасность: концептуальные и методологические основы защиты информации. М.: Горячая линия — Телеком, 2004. 280 с. ISBN 5-93517-197-X.

ДАНИЛОВА Ольга Тимофеевна, кандидат физико-математических наук, доцент (Россия), заместитель заведующего кафедрой «Комплексная защита информации».

САВЧЕНКО Станислав Олегович, студент гр. КЗИ-131 радиотехнического факультета.

КАПЧУК Никита Викторович, студент гр. БИТ-141 радиотехнического факультета.

Адрес для переписки: stassavchenko@mail.ru

Статья поступила в редакцию 25.05.2017 г.

© О. Т. Данилова, С. О. Савченко, Н. В. Капчук

РАЗРАБОТКА СИСТЕМЫ РАСПОЗНАВАНИЯ ДОРОЖНЫХ ОБЪЕКТОВ

В статье приводится описание разрабатываемой системы распознавания дорожных объектов (знаки, пешеходы и другие участники дорожного движения). Описываются алгоритмы, применяемые в модулях «Предобработка изображения» и «Поиск и распознавание объектов». Данная система направлена на сокращение числа дорожно-транспортных происшествий, вызванных неверной оценкой водителями дорожной ситуации. По сравнению с аналогичными системами разрабатываемая система будет отличаться по качеству распознавания дорожных знаков и анализировать большее число объектов, выделяемых в дорожной ситуации.

Ключевые слова: активное компьютерное зрение, обнаружение объектов, предобработка изображения, распознавание образов, безопасность движения.

1. Введение. Статистика дорожно-транспортных происшествий (ДТП) в РФ свидетельствует о росте их количества и большом числе раненых и погибших в результате аварий. Если рассматривать основные причины ДТП (рис. 1), то наибольшее количество аварий вызвано неверной оценкой дорожной ситуации. Для сокращения числа ДТП предлагается использовать систему для распознавания дорожных объектов (знаки, пешеходы, другие участники дорожного движения). Данная система поможет оценить ситуацию как неопытным водителям, не успевающим одновременно следить за дорогой, знаками и другими участниками движения, так и опытным водителям в условиях недостаточной видимости.

Для создания системы распознавания дорожных объектов необходимо выбрать прототип системы, разработать модель предобработки изображения, разработать модель поиска и распознавания объекта. Компьютерное моделирование алгоритмов производилось в среде Matlab [1–2]. Упрощенная модель эксперимента представлена на рис. 2.

2. Выбор прототипа системы. В первом виде аппаратного исполнения разрабатываемой системы планируется использовать дополнительную камеру, установленную под лобовым стеклом. Данные от видеокamеры будут обрабатываться средствами смартфона (рис. 3). Использование дополнительной камеры дает не только хорошее качество изображения, но и телефон не будет нагреваться из-за длительного использования его камеры.

3. Разработка модуля «Предобработка изображения». На первом этапе разработки модуля «Предобработка изображения» была решена задача по стабилизации видео. В качестве базовой части алгоритма был взят пример по стабилизации видео, представленный в среде Matlab. Исходный код был изменен, исправлены параметры стабилизации, повышающие качество видео на неровных участках дороги.

Из-за работы системы распознавания дорожных объектов в различных условиях (светлое/темное

время суток, различные погодные условия) необходимо улучшать качество изображения (проводить усиление контрастности, коррекцию динамического диапазона и выравнивание гистограммы изображения).

Низкий контраст возникает из-за плохих погодных условий или недостаточности света (в темное время суток), что сказывается на качестве изображения. При реализации метода отдельно обрабатывалась каждая цветовая RGB-составляющая исходного изображения с помощью функций *fspecial*, *im2double* и *conv2*, а затем восстанавливалось результирующее цветное изображение. Для повышения контрастности видео в темное время суток в дальнейшем необходимо опытным путем подобрать коэффициенты усиления контрастности.

При недостаточности света формируются изображения с ограниченным динамическим диапазоном. Так как разрабатываемая система должна распознавать объекты в любое время суток, был разработан алгоритм коррекции динамического диапазона. При реализации метода отдельно обрабатывалась каждая цветовая RGB-составляющая исходного изображения с помощью функции *im2double*, а затем восстанавливалось результирующее цветное изображение из трех составляющих после коррекции динамического диапазона. Помимо коррекции динамического диапазона одновременно применялась медианная фильтрация изображения с помощью функции *medfilt2* для устранения импульсного шума. Результаты работы алгоритма представлены на рис. 4.

При работе системы распознавания дорожных объектов при различных погодных и временных условиях формируются изображения либо слишком светлые, либо слишком темные. Для повышения качества таких изображений был разработан метод выравнивания гистограммы. При реализации метода отдельно обрабатывалась функцией *histeq* каждая цветовая RGB-составляющая исходного изображения, а затем восстанавливалось результиру-



Рис. 1. Основные причины ДТП



Рис. 2. Схема модели эксперимента

ющее цветное изображение из трех составляющих после выравнивания гистограммы. Функция *histeq* улучшает контраст изображения с помощью преобразования значений пикселей исходного изображения таким образом, чтобы гистограмма яркостей результирующего изображения приблизительно соответствовала предопределенной гистограмме. Помимо коррекции выравнивания гистограммы для устранения импульсного шума одновременно применялась медианная фильтрация изображения. Результаты работы алгоритма представлены на рис. 5.

4. Разработка модуля «Поиск и распознавание объектов». Обнаружение пешеходов является одной из задач системы обнаружения объектов. Самый точный метод [3] по обнаружению людей — подход, основанный на гистограммах ориентированных градиентов (Histogram of Oriented Gradients, HOG) [4].

В среде Matlab система Computer Vision Toolbox поддерживает подход обнаружения людей, находящиеся в вертикальном положении, используя метод HOG. Для обнаружения движущихся пешеходов значения свойств системного объекта Matlab *vision.PeopleDetector* были изменены. При анализе видеопотока каждый кадр обрабатывается отдельно. Результаты работы алгоритма обнаружения пешеходов представлены на рис. 6.

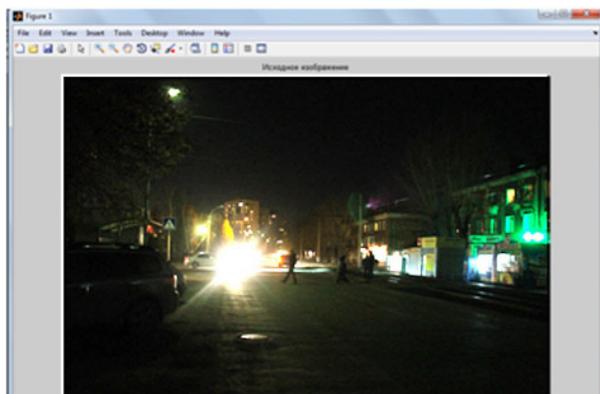
Существует множество подходов для решения задачи обнаружения и распознавания объектов (контурный анализ, блок-анализ, методы сегментации изображений, сопоставление шаблонов, оптический поток и определение углов [5–9]). После моделирования существующих методов в среде



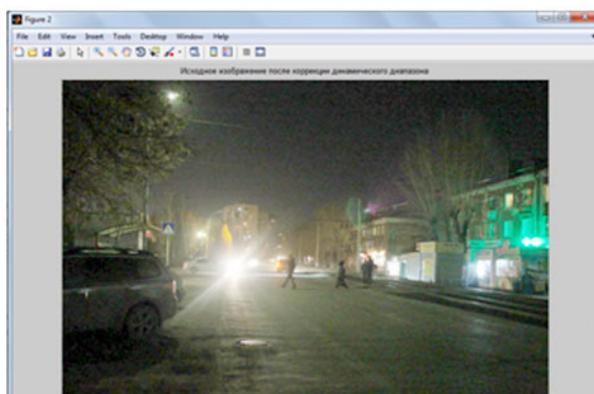
Рис. 3. Аппаратное исполнение разрабатываемой системы

Matlab был выбран блок-анализ в качестве базового подхода для решения задачи обнаружения дорожных знаков.

Алгоритм распознавания дорожных знаков основан на применении двух тип шаблонов. Первый тип шаблонов отвечает за непосредственное обнаружение объекта, второй вид — за окончательное

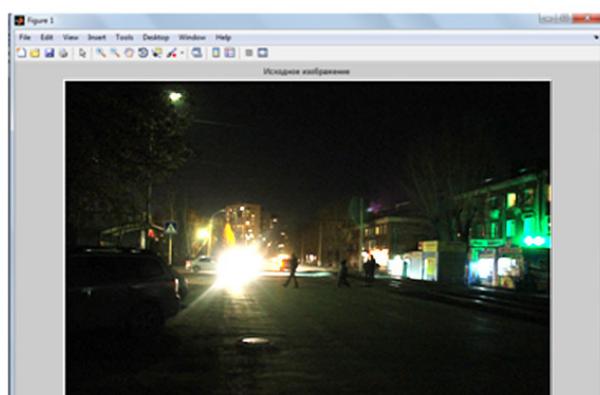


а)

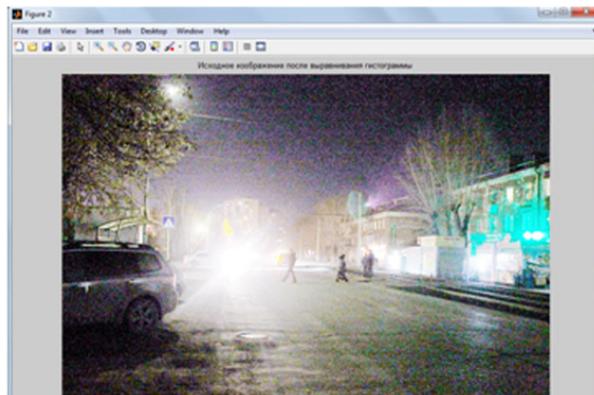


б)

Рис. 4. Результаты работы алгоритма коррекции динамического диапазона:
а) исходное изображение; б) исходное изображение после коррекции динамического диапазона



а)



б)

Рис. 5. Результаты работы алгоритма выравнивания гистограммы:
а) исходное изображение; б) исходное изображение после выравнивания гистограммы

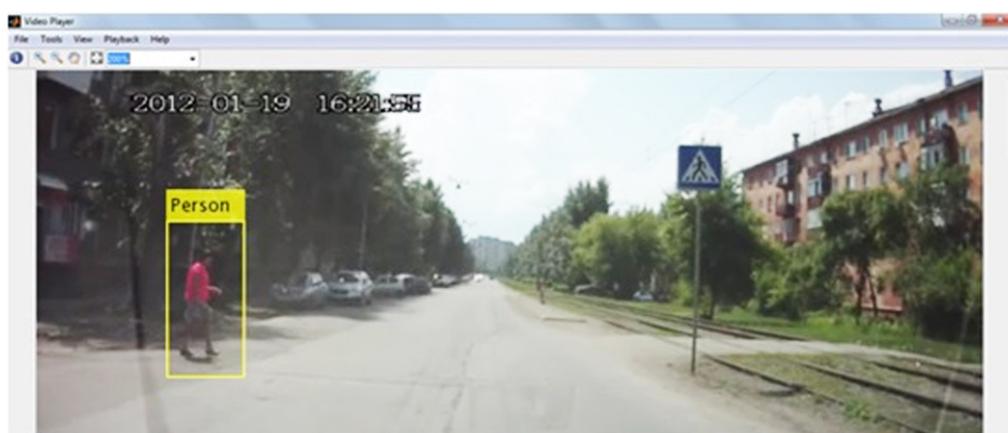


Рис. 6. Результаты работы алгоритма обнаружения пешеходов

распознавание объектов. Примеры шаблонов для обнаружения и окончательного распознавания знака «Уступи дорогу» представлены на рис. 7. Шаблон окончательного распознавания содержит различные ориентации знака.

Поиск объектов осуществляется на каждом кадре видеопотока при помощи шаблонов для обнаружения. После того как алгоритм определяет совпадение, найденный объект помечается как «по-

тенциальный знак». Если «потенциальный знак» алгоритмом определяется на трех подряд идущих кадрах, в этом случае происходит сравнение блока «потенциальный знак» с шаблоном для окончательного распознавания. При установлении корреляционной связи между изображением шаблона и полученным «потенциальным знаком», делается вывод и выдается результат. Коэффициенты корреляции между объектом «потенциальный знак» и шабло-

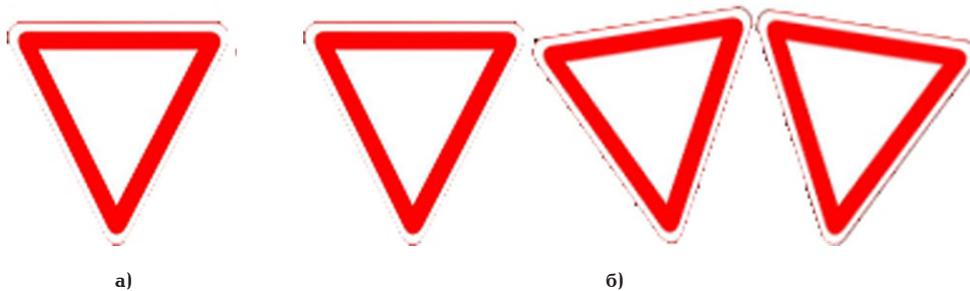


Рис. 7. Шаблоны для обнаружения и распознавания дорожного знака «Уступи дорогу»: а) шаблон для обнаружения; б) шаблон для окончательного распознавания

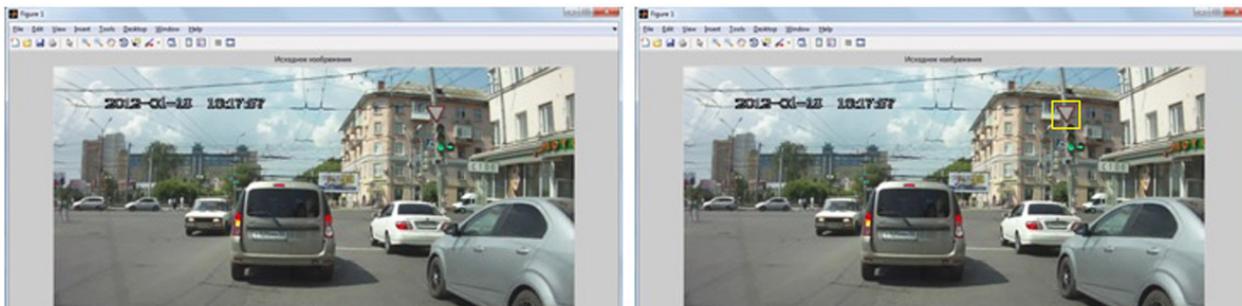


Рис. 8. Результаты работы модуля «Поиск и распознавание объектов»

ном определяются с помощью функции *corr2*. Результаты работы модуля «Поиск и распознавание объектов» представлены на рис. 8.

5. Выводы. Для создания системы распознавания дорожных объектов был выбран прототип системы, разработаны модели предобработки изображения, поиска и распознавания объектов. При разработке модуля «Предобработка изображения» была решена задача по стабилизации видео и предложены алгоритмы по улучшению качества изображения за счет усиления контрастности, коррекции динамического диапазона и выравнивания гистограммы изображения. При разработке модуля «Поиск и распознавание объектов» для распознавания пешеходов применялся подход, основанный на гистограммах ориентированных градиентов, а для распознавания дорожных знаков в качестве базового подхода был выбран блоч-анализ.

В результате проведенных исследований были изучены и разработаны алгоритмы обнаружения и распознавания дорожных объектов, предложены алгоритмы, повышающие качество входных изображений, позволяющие реализовать модули «Предобработка изображения» и «Поиск и распознавание объектов». Далее планируется объединить алгоритмы разработанных модулей в единый модуль и проанализировать полученные результаты.

Библиографический список

1. Computer Vision System Toolbox — компьютерное зрение для Simulink. URL: <http://matlab.ru/products/computer-vision-system-toolbox> (дата обращения: 15.05.2017).
2. Matlab и Simulink — сообщество пользователей, материалы, книги, форум. URL: <http://matlab.exponenta.ru> (дата обращения: 15.05.2017).
3. Dalal N., Triggs B. Histograms of Oriented Gradients for Human Detection // INRIA, 2005. URL: http://lear.inrialpes.fr/pubs/2005/DT05/hog_cvpr2005.pdf (дата обращения: 16.05.2017).

fr/pubs/2005/DT05/hog_cvpr2005.pdf (дата обращения: 16.05.2017).

4. Южаков Г. Б. Алгоритм быстрого построения дескрипторов изображения, основанных на технике гистограмм ориентированных градиентов // Труды МФТИ. 2013. Т. 5, № 3 (19). С. 84–91.

5. Nikonorov A., Petrov M., Yakimov P. Traffic sign detection on GPU using color shape regular expressions // VISIGRAPP IMTA-4 2013. URL: https://www.researchgate.net/profile/Artem_Nikonorov/publication/286738110_Spectrum_shape_elements_model_to_correct_color_and_hyperspectral_images/links/57175ea208aeb56278c44e53.pdf (дата обращения: 16.05.2017).

6. Shneier M. Road sign detection and recognition // Proceedings. IEEE Computer Society Int. Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition. 2005. P. 215–222.

7. Методы сегментации изображений: автоматическая сегментация. URL: <http://cgm.computergraphics.ru/content/view/147> (дата обращения: 16.05.2017).

8. Detecting Objects as Colored Blobs using HSV Colors. URL: <http://shervinemami.info/blobs.html> (дата обращения: 16.05.2017).

9. Ruta A., Li Y., Liu X. Detection, Tracking and Recognition of Traffic Signs from Video Input // Proceedings of the 11th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC '08). Beijing, China. 2008. P. 55–60. DOI: 10.1109/ITSC.2008.4732535.

ЕЛИЗАРОВ Дмитрий Александрович, доцент кафедры «Автоматика и системы управления». Адрес для переписки: elizarovda@gmail.com

Статья поступила в редакцию 26.05.2017 г.
© Д. А. Елизаров

КЛАССИФИКАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ГРАФОВ С ПРЕДПОЧТИТЕЛЬНЫМ СВЯЗЫВАНИЕМ

Выполнен обзор принципов генерации различных видов случайных графов, строящихся по правилам предпочтительного связывания. Показано многообразие предложенных подходов к построению случайных графов, существенно расширяющих базовую идею предпочтительного связывания. Выделены наиболее существенные классификационные признаки, позволяющие построить систему классификации случайных графов.

Ключевые слова: случайный граф, предпочтительное связывание, классификационные признаки.

1. Введение. Стремительное развитие Интернета и социальных сетей, основанных на современных информационных технологиях, дает мощный стимул к изучению, объяснению, моделированию поведения этих больших сетевых структур. Конечная цель исследований — научиться управлять информационными потоками, оказывая целенаправленное информационное воздействие на социальные сети и Интернет-сообщество в целом. На протяжении последних 20 лет возникла и успешно развивается отрасль научных исследований, называемая «Network science», изучающая именно большие сетевые структуры. Сами по себе Интернет, и социальные сети слишком велики для прямого исследования, поэтому для изучения генезиса таких структур применяются случайные графы различных типов. Особо следует выделить случайные графы с предпочтительным связыванием, которые объясняют механизм роста сетевой структуры и обеспечивают адекватное моделирование растущих сетевых структур.

Базовая идея графов с предпочтительным связыванием очень проста — в графе, который эволюционирует во времени, постоянно появляются новые вершины, которые соединяются с уже существующими вершинами и вероятность присоединения новой вершины к существующим определяется каким-либо правилом. Исторически первая модель предпочтительного связывания, разработанная для моделирования Интернет и наиболее известная на сегодняшний день, была предложена в работе А. L. Barabasi и R. Albert [1]. Впоследствии случайные графы, реализующие эту модель, получили название графов Барабаш–Альберт (далее графы БА). Но графы БА, несмотря на свою популярность, являются не единственными представителями класса случайных графов с предпочтительным связыванием. Цель настоящей статьи — дать характеристику менее известным видам случайных графов, сопоставив их с графами БА, и предложить систему классификации случайных графов, выделив их основные классификационные признаки.

1. Ориентированная модель случайного графа с предпочтительным связыванием. Группа авторов В. Boolobas, С. Borgs, J. Chayes и О. Riordan [2] пред-

ложила ориентированную модель графа с предпочтительным связыванием. В модели полагают, что имеется какой-либо фиксированный начальный ориентированный граф G_0 с t_0 дугами, где t_0 — некоторое произвольное положительное целое число. В качестве такого начального графа может выступать единственная вершина без дуг. На каждом шаге генерации в графе появляется единственная дуга, с некоторой вероятностью на этом шаге может появиться и новая вершина. Для построения графа фиксируются некоторые неотрицательные параметры $\alpha, \beta, \gamma, \delta_{in}, \delta_{out}$ таким образом, что $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Затем определяется граф $G(t)$, который в момент времени t имеет в точности t дуг и случайное число $n(t)$ вершин.

Правило предпочтительного связывания состоит в том, что выбор вершины v графа $G(t)$, согласно величине $d_{out} + \delta_{out}$, означает, что вероятность выбора $P(v = v_i) = (d_{out}(v_i) + \delta_{out}) / (t + \delta_{out}n(t))$. Аналогично выбор вершины v , согласно величине $d_{in} + \delta_{in}$, означает, что вероятность $P(v = v_i) = (d_{in}(v_i) + \delta_{in}) / (t + \delta_{in}n(t))$.

Здесь под $d_{out}(v_i)$ и $d_{in}(v_i)$ понимаются полустепень исхода и, соответственно, полустепень захода вершины v_i графа $G(t)$.

Для $t \geq t_0$ из графа $G(t)$ формируется граф $G(t + 1)$ в соответствии со следующими правилами роста.

Правило А. С вероятностью α добавляется новая вершина v совместно с дугой от вершины v к существующей вершине w , которая выбирается согласно $d_{in} + \delta_{in}$.

Правило В. С вероятностью β добавляется дуга между существующими вершинами v и w , где v и w выбираются независимо, v согласно $d_{out} + \delta_{out}$ и w согласно $d_{in} + \delta_{in}$.

Правило С. С вероятностью γ добавляется новая вершина w и дуга от существующей вершины v к вершине w , где вершина v выбирается согласно $d_{out} + \delta_{out}$.

Таким образом, моделируются два типа страниц — информационные страницы, которые ни на что не ссылаются (правило С), и обычные страницы (правило А). Правило В моделирует расширение связей между уже существующими страницами. Полагая $\beta = \gamma = \delta_{out} = 0$ и $\alpha = \delta_{in} = 1$, мы

приходим к графу БА с количеством $m = 1$ ребер в приращении.

2. Общая модель предпочтительного связывания. Общая модель предпочтительного связывания представлена *C. Cooper* и *A. Frieze* [3, 4]. Согласно этой модели, изначально на шаге 0 существует единственная вершина v_0 . На каждом шаге $t = 1, 2, \dots, T, \dots$ происходит добавление новой вершины с новыми ребрами либо добавление только новых ребер. Первый случай, происходящий с вероятностью $1 - \alpha$, назовем процедурой NEW (новый), второй случай, происходящий с вероятностью α , назовем процедурой OLD (старый). В процедуре NEW к графу $G(t - 1)$ добавляется единственная вершина v с одним или несколькими ребрами, соединяющими вершину v с графом. В процедуре OLD выбирается вершина v графа, которая новыми ребрами соединяется с другими вершинами.

Способ добавления ребер на шаге t разрешает выбор начальной вершины v (в случае процедуры OLD), из которой проводятся новые ребра, и конечных вершин (в обоих случаях), в которые проводятся ребра, или равновероятно, или с вероятностями, пропорциональными степеням вершин, или в комбинации этих двух методов. Число ребер, добавляемых к вершине v процедурой NEW, задается распределением вероятностей \mathbf{p} , число ребер, добавляемых процедурой OLD, задается распределением вероятностей \mathbf{q} .

Общая модель предпочтительного связывания определяется набором параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mathbf{p}, \mathbf{q}$, которые имеют следующие значения:

α — вероятность того, что на шаге t выполняется процедура OLD;

$(1 - \alpha)$ — это вероятность того, что выполняется процедура NEW);

$\mathbf{q} = \{q_i\}$, где q_i — вероятность того, что процедура OLD генерирует i ребер, $i \geq 1$;

δ — вероятность того, что выбор вершины v осуществляется процедурой OLD равновероятно;

$(1 - \delta)$ — вероятность того, что выбор вершины v процедурой OLD осуществляется с вероятностями, пропорциональными степеням вершин;

γ — вероятность того, что выбор конечных вершин осуществляется процедурой OLD равновероятно;

$(1 - \gamma)$ — вероятность того, что выбор конечных вершин осуществляется процедурой OLD с вероятностями, пропорциональными степеням вершин;

$\mathbf{p} = \{p_i\}$ — где p_i — вероятность того, что процедура NEW генерирует i ребер, $i \geq 1$;

β — вероятность того, что выбор конечных вершин осуществляется процедурой NEW равновероятно;

$1 - \beta$ — вероятность того, что выбор конечных вершин осуществляется процедурой NEW с вероятностями, пропорциональными степеням вершин.

Полагая в модели вероятности $\alpha = \beta = 0, p_1 = 1$ и $p_i = 0$ для всех $i > 1$, получаем граф БА с количеством $m = 1$ ребер в приращении.

3. Модель предпочтительного связывания с дополнительным качеством. Кроме высокой степени связности узла сети существуют и другие свойства узла, которые делают его более притягательным для присоединения к нему новых узлов. Ряд механизмов роста сетевых структур, расширяющих принцип предпочтительного связывания, предложен в работе *G. Ergun* и *G. J. Rodgers* [5], которые вводят понятие качества (*fitness*). Под качеством понимается некоторое дополнительное свойство, при-

писываемое каждой вершине графа. Это свойство наряду со степенью связности вершины определяет ее привлекательность. Авторами предложены три модели — модели А, В и С. Рассмотрим некоторые детали этих моделей.

Модель А предполагает построение графа из вершин с качеством η . Качество присуще каждой вершине и задается в виде распределения вероятностей $f_A(\eta)$. Граф строится путем добавления новой вершины и соединения этой вершины с одной из вершин графа единственным ребром. Предпочтительность вершины определяется на основании степени связности k вершины и ее качества η , вероятностью выбора, пропорциональной величине $(k - 1) + \eta$. Иными словами, это линейное предпочтительное связывание с вершинами, которые уже имеют много связей и большое значение качества η . Это означает, что степень связности k недостаточно полная информация о популярности вершины. Например, если вершина — web-сайт, то ее качество η может определяться числом ассоциированных с сайтом рекламных телевизионных каналов или иных средств рекламы.

Важно отметить несколько моментов построения модели:

1. Формируя растущую сеть, нам необходимо иметь величину $k - 1 + \eta > 0$ для всех k , так что $\eta > 0$, поскольку по определению модели каждая вершина создается с одной исходящей дугой.

2. Все вершины, имеющие качество $\eta = 1$, выбираются по правилу линейного предпочтительного связывания, как и в других моделях предпочтительного связывания, например, в модели *R. Albert* и *A. L. Barabasi* [6] и модели *P. L. Krapivsky, S. Redner* [7, 8], рассматриваемой ниже.

3. Величина $f_A(\eta)$ может быть как дискретной, так и непрерывной.

Модель В предполагает, что нет особых причин считать коэффициент пропорциональности, применяемый при предпочтительном связывании, одинаковым для всех вершин. Поэтому предлагается рассматривать модель графа, в которой с каждой вершиной ассоциируется триада значений (k, η, ζ) . Граф строится путем добавления новой вершины на каждом шаге времени и добавлением единственной дуги, связывающей эту вершину с существующей вершиной, обладающей случайным аддитивным качеством η , случайным мультипликативным качеством ζ и степенью связности k , с оценкой вида $\zeta(k - 1) + \eta$.

Модель С предполагает, что на каждом шаге времени к графу с вероятностью p добавляется новая вершина, а с вероятностью $q = 1 - p$ добавляется новая дуга между двумя уже существующими вершинами. Вершина, обладающая качеством в виде пары параметров (α, β) , имеет i заходящих дуг и j исходящих дуг.

Такая вершина получает новую заходящую дугу с вероятностью, пропорциональной $\alpha(i + 1)$, и новую исходящую дугу с вероятностью, пропорциональной $\beta(j + 1)$.

4. Модели предпочтительного связывания с условно независимыми ребрами. Модели предпочтительного связывания с условно независимыми ребрами исследуются в работе *S. Dereich* и *P. Morters* [9, 10]. Они определяют правило предпочтительного связывания произвольной, монотонно возрастающей функцией предпочтения $f: \{0, 1, 2, \dots\} \rightarrow (0, \infty)$ со значением $f(0) \leq 1$ и $\Delta f(k) = f(k + 1) - f(k) < 1$ для всех $k \geq 0$.

Принцип генерации графа сети состоит в следующем. В момент времени $t = 1$ граф состоит из единственной вершины без ребер (обозначается как $G(1)$), для каждого момента времени $t \geq 2$ граф эволюционирует в соответствии со следующим правилом.

1. К графу добавляется новая вершина (обозначается как n).

2. Для каждой старой вершины m к графу добавляется дуга от вершины n к вершине m с вероятностью:

$$\frac{f(d_m(m))}{n}$$

где $d_m(m)$ — полустепень захода вершины m в момент времени $t = n$.

Новые дуги проводятся независимо для каждой старой вершины. Отметим, что наложенные ограничения на функцию предпочтения f гарантируют, что на каждом шаге эволюции вероятность добавления дуги меньше либо равна 1. Предложенный способ построения случайного графа не позволяет генерировать графы БА.

5. Модели предпочтительного связывания с устареванием вершин. А. А. Прохоренкова [11] и Е. А. Самосват [12] предложили внести в модель предпочтительного связывания свойство устаревания вершин. Модель предполагает, что на выбор вершины для присоединения влияют три фактора:

- степень связности вершины: чем выше степень, тем выше вероятность присоединения;
- качество (*fitness*) вершины, приписываемое каждой вершине графа: чем больше качество, тем привлекательнее вершина для присоединения;
- время жизни вершины: чем больше ее «возраст», тем меньше вероятность выбора этой вершины для присоединения (старые новости в web-пространстве мало кому интересны).

В модели предпочтительного связывания с устареванием вершин строится последовательность случайных графов $\{G_n\}$. У этой последовательности есть следующие параметры — количество ребер m в приращении и функция $N(n)$, принимающая целочисленные значения. Здесь под величиной n понимается шаг (время), на котором вершина добавилась в граф.

Первоначально имеется граф с двумя вершинами и единственным ребром между ними. Параметры качества $q(1)$ и $q(2)$ двух первых вершин определяются независимыми положительными случайными величинами ζ_1 и ζ_2 соответственно.

На шаге $t + 1$, где t находится в интервале $2 \leq t \leq n - 1$, к графу добавляется одна новая вершина и m инцидентных ребер. Новые ребра проводятся независимо друг от друга и соединяют новую вершину со старыми. Новой вершине присваивается качество $q(t + 1)$, задаваемое положительной случайной величиной ζ_{t+1} с некоторым законом распределения.

Для каждого ребра существует вероятность p_i , того, что оно будет проведено в вершину i ($1 \leq i \leq t$). Вероятность определяется в виде:

$$p_i = \frac{attr_i(i)}{\sum_{j=1}^t attr_i(j)},$$

где $attr_i(i) = (1 \text{ или } q(i)) \cdot (1 \text{ или } d_i(i)) \cdot (1 \text{ или } I[i > t - N(n)] \text{ или } e^{-\frac{t-i}{N(n)}}$). Здесь союз *или* предполагает выбор ис-

следователем одной из величин, соединенных этим союзом. Таким образом, $attr_i(i)$ может быть определен одним (любым) из 12 возможных способов.

Значение $I[i > t - N(n)]$ равно 1, если неравенство в скобках истинно, и равно 0, если ложно. Этот элемент учитывает время жизни вершины — вершина i может получить входящие ребра только в течение следующих N шагов после ее рождения (время жизни вершины). Подобное определение правила присоединения задает 12 различных вариантов модели. В частности, полагая $attr_i(i) = 1 \cdot d_i(i) \cdot 1$, получаем граф БА.

6. Нелинейное предпочтительное связывание.

Развитие идеи линейного предпочтительного связывания нашло отражение в работах *P. L. Krapivsky* и *S. Redner* [7], которые предлагают два типа моделей с нелинейным правилом предпочтительного связывания.

В модели GN (*growing network*) генерация случайного графа производится путем генерации на каждом шаге времени новой вершины с единственным инцидентным ей ребром, которое своим свободным концом соединяется с одной из более ранних вершин графа. Начальная вершина графа является уникальной, поскольку у нее нет исходящего ребра. Это приводит к образованию графа, имеющего топологию ориентированного дерева.

Выбор вершины графа для соединения осуществляется по правилу предпочтительного связывания с вероятностью, пропорциональной значению убывающей функции от степени k этой вершины. Вероятность A_k выбора вершины со степенью k пропорциональна k^γ для ограниченного круга значений γ .

Модель GNR (*growing network with redirection*) является развитием модели GN. На каждом шаге t времени к графу добавляется новая вершина $n = t$ и инцидентное ей ребро графа, которое свободным концом соединяется с ранее образованной вершиной x . С вероятностью $1 - r$ создается ребро, связывающее вершины n и x . С вероятностью r ребро от вершины x перенаправляется к вершине-предку у вершины x .

В работе *B. H. Zagorzhnoy* [13] был предложен новый класс случайных графов с предпочтительным связыванием — случайные графы с НППС. Развитие теории случайных графов представлено в работах [14–16]. Случайный граф с НППС выращивается по принципу предпочтительного связывания, но имеет более общее правило выбора вершины для присоединения, чем в предыдущих графах. Нелинейное правило предпочтительного связывания предполагает, что выбор более предпочтительной вершины для присоединения зависит от степени связности k вершины как некоторая произвольная неотрицательная функция $f(k)$, на которую, в отличие от рассмотренных выше графов, не накладывается практически никаких ограничений. Например, если задать функцию предпочтения в виде $f(k) = k$, то получим граф БА. Задав функцию предпочтения в виде $f(k) = k^g$, получим графы, рассматриваемые в работах *P. L. Krapivsky* и *S. Redner*.

Согласно [13], для выращивания графа с НППС используется граф-затравка из нескольких вершин, связанных ребрами. Любая вершина со степенью k имеет весовую функцию (вес) $f(k)$, где $f(k) > 0$, если $g \leq k \leq M$, иначе $f(k) = 0$ (здесь $g \geq 1$, $M \leq \infty$). Генерация графа осуществляется путем добавления на каждом шаге вершины и случайного числа g инцидентных ей ребер, которые свободными конца-

Таблица 1

Типология моделей случайных графов предпочтительного связывания

Название модели с предпочтительным связыванием	Авторство модели приписывается	Классификационные признаки				Примечания
		Форма начального графа	Количество ребер в приращении	Функция предпочтения	Генерация вершин и/или ребер	
1	2	3	4	5	6	7
Ориентированная модель графа с предпочтительным связыванием	Volobas В., Borgs С., Chayes J., Riordan О. [2]	Единственная вершина без ребер	Единственное ребро	Предпочтительность вершины v определяется вероятностью $P(v = v) = (d_{in}(v) + \delta_{out}(v))/(t + \delta_{out}(t))$ для исходящего ребра или вероятностью $P(v = v) = (d_{in}(v) + \delta_{in}(v))/(t + \delta_{in}(t))$ для входящего ребра	Может генерироваться вершина с ребром либо просто ребро	Вероятности α , β и γ ($\alpha + \beta + \gamma = 1$) задают либо появление новой вершины и инцидентного исходящего ребра, либо появление ребра, либо появление новой вершины и входящего в нее ребра
Общая модель предпочтительного связывания	Cooper С., Fitzge А. [3, 4]	Единственная вершина без ребер	Кол-во ребер в приращении определяется некоторым законом распределения	Вершины для присоединения выбираются равновероятно или по праву линейного предпочтительного связывания, в соответствии с их степенями	Добавляется либо новая вершина с инцидентными ребрами, либо старая вершина новыми ребрами соединяется с другими	С вероятностью α на очередном шаге генерируется ребро, с вероятностью $1 - \alpha$ генерируется новая вершина с инцидентными ребрами
Модель предпочтительного связывания с дополнительным качеством	Ergun С., Rodgers С., J. [5]	Произвольный	Единственное ребро	Оценка предпочтительности вершины строится на основании степени k вершины и ее качества η пропорционально либо величине $(k - 1) + \eta$ (модель А), либо $\zeta(k - 1) + \eta$ (модель В)	Добавляется вершина и единственное ребро (модели А и В)	В модели С к графу с вероятностью p добавляется новая вершина, а с вероятностью $q = 1 - p$ добавляется новое ориентированное ребро между старыми вершинами
Модели предпочтительного связывания с условием независимыми ребрами	Dereich S., Morters P. [9, 10]	Единственная вершина без ребер	Случайное число	Произвольная монотонно возрастающая весовая функция: $f: \{0, 1, 2, \dots\} \rightarrow (0, \infty)$ с $f(0) \leq 1$ и $\Delta(k) := f(k + 1) - f(k) < 1$ для всех $k \geq 0$	Добавляется вершина и ребра	Новые ребра вставляются независимо для каждой старой вершины m с вероятностью $\frac{f(d_{in}(m))}{n}$
Модели предпочтительного связывания с устареванием вершин	Прохорова Л. А. [11] и Самосват Е. А. [12]	Две вершины и ребро между ними	Фиксированное число ребер m	Вероятность соединения с вершиной i ($1 \leq i \leq t$) определяется в виде: $p_i = \frac{attr_i(t)}{\sum_{j=1}^t attr_j(t)}$, где $attr(t) = (1 \text{ или } q(t)) \cdot (1 \text{ или } d_i(t))$. (1 или $f_i[t > t - N(n)]$ или $e^{-N(t)}$)	Добавляются новая вершина и m ребер	
Нелинейное предпочтительное связывание	Krapivsky P. L., Redner S. [7, 8]	Единственная вершина без ребер	Единственное ребро	Вероятность выбора вершины со степенью k пропорциональна k^γ . Показатель степени $\gamma \geq 0$	Добавляется вершина и ребро	
Графы с НППС	Задорожный В. Н., Юдин Е. Б. [13 – 16]	Произвольный	Случайное число	Вероятность связывания ребра приращающа с вершиной i графа, именуете N вершин, определяется в виде $p_i = \frac{f(k_i)}{\sum_j f(k_j)}$, $i, j = 1, \dots, N$.	Добавляется вершина и ребра	Любая вершина со степенью k имеет произвольную весовую функцию $f(k)$: $f(k) > 0$, если $g \leq k \leq M$, иначе $f(k) = 0$ (здесь $g \geq 1, M \leq \infty$)

ми соединяются с вершинами графа. Вероятность связывания ребра приращения с вершиной i графа, имеющего N вершин, определяется в виде

$$p_i = \frac{f(k_i)}{\sum_j f(k_j)}, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Количество ребер в приращении определяется как случайная величина $x \in \{g, g + 1, \dots, h\}$, которая имеет дискретное распределение вероятностей $\{r_k\}$.

Вероятность $r_k = P(x = k) \geq 0$ при $g \leq k \leq h$, $\sum_{k=g}^h r_k = 1$.

При этом $h \leq M$ и конечно. Тогда среднее число m ребер в приращении также конечно: $m = \langle x \rangle =$

$$= \sum_{k=g}^h k r_k < \infty.$$

Таким образом, алгоритм генерации графа с НППС задается параметрами f и $\{r_k\}$, удовлетворяющими вышеперечисленным ограничениям. Предложенный класс графов с НППС позволяет реализовать самые разнообразные зависимости степени вершин от времени, в отличие от других случайных графов с предпочтительным связыванием.

Заключение. Сравнение существенных характеристик рассмотренных случайных графов с предпочтительным связыванием представлено в табл. 1.

Подводя итог рассмотрению моделей случайных графов предпочтительного связывания, можно выделить несколько классификационных признаков:

1. Форма начального графа (одна вершина, две вершины, произвольное количество вершин).

2. Количество ребер в приращении — одно ребро, фиксированное количество ребер, случайное количество ребер (определяется некоторым законом распределения).

3. Функция предпочтения. Наиболее важный классификационный признак. Функция предпочтения может быть связана только со степенью вершины, выбираемой для присоединения. Вероятность выбора вершины в этом случае либо пропорциональна степени вершины (линейная функция предпочтения), либо является какой-либо функцией от степени вершины (нелинейная функция предпочтения). В рассмотренных моделях класс таких нелинейных функций очень ограничен. Более сложный класс функций предпочтения образуется, если во внимание принимается не только степень выбираемой вершины, но и некоторые качества, приписываемые этой вершине. Значение качества может быть детерминированной величиной, либо случайной, с некоторым законом распределения. Степень вершины и ее качество могут быть связаны в аддитивной или мультипликативной форме. Третий класс функций предпочтения учитывает время жизни вершины, когда в функцию предпочтения выбора вершины наряду со степенью и качеством в какой-либо форме вводится время.

4. Генерация вершин и/или ребер. В большинстве случаев при росте случайного графа появляется новая вершина и инцидентные ей ребра (или одно ребро). Однако ряд рассмотренных графов предполагает, что с некоторой вероятностью в них на очередном шаге генерации может появляться не вершина, а новое ребро (ребра).

Библиографический список

1. Barabási A.-L., Albert R. Emergence of scaling in random networks // *Science*. 1999. Vol. 286, № 5439. P. 509–512.
2. Bollobas B., Borgs C., Chayes J., Riordan O. Directed scale-free graphs // *Proceedings of the Fourteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms* (Baltimore, MD, 2003). N. Y.: ACM, 2003. P. 132–139.
3. Cooper C., Frieze A. A general model of web graphs // *Random Structures Algorithms*. 2003. Vol. 22, № 3. P. 311–335. URL: <http://www.aladdin.cs.cmu.edu/papers/pdfs/y2003/power.pdf> (дата обращения: 26.09.2016).
4. Cooper C. Distribution of Vertex Degree in Web-Graphs // *Combinatorics, Probability and Computing*. 2006. Vol. 15. P. 637–661. DOI: <https://doi.org/10.1017/S096354830600753X>.
5. Ergun G., Rodgers G. J. Growing random networks with fitness // *Physica A*. 2002. Vol. 303. P. 261–272.
6. Albert R., Barabasi A. Statistical mechanics of complex networks. URL: http://www.barabasilab.com/pubs/CCNR-ALB_Publications/200201-30_RevModernPhys-StatisticalMech/200201-30_RevModernPhys-StatisticalMech.pdf (дата обращения: 16.12.2016).
7. Krapivsky P. L., Redner S. Organization of growing random networks. URL: <http://physics.bu.edu/~redner/pubs/pdf/organization.pdf> (дата обращения: 16.12.2014).
8. Krapivsky P. L., Redner S., Leyvraz F. Connectivity of growing random networks // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Vol. 85. 4629 p. URL: <https://arxiv.org/pdf/cond-mat/0005139.pdf> (дата обращения: 16.12.2016).
9. Dereich S., Morters P. Random networks with sublinear preferential attachment: Degree evolutions // *Electronic Journal of Probability*. 2009. Vol. 14. P. 1222–1267.
10. Dereich S., Morters P. Random networks with concave preferential attachment rule // *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker Vereinigung*. 2011. Vol. 113, № 1. P. 21–40.
11. Прохоренкова Л. А. Свойства случайных веб-графов, основанных на предпочтительном связывании: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2015.
12. Самосват Е. А. Моделирование Интернета с помощью случайных графов: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2014. 28 с.
13. Задорожный В. Н. Случайные графы с нелинейным правилом предпочтительного связывания // *Проблемы управления*. 2010. № 6. С. 2–11.
14. Zadorozhnyi V. N., Yudin E. B. Growing network: models following nonlinear preferential attachment rule // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2015. Vol. 428. P. 111–132. DOI: 10.1016/j.physa.2015.01.052.
15. Zadorozhnyi V., Yudin E. Growing Network: Nonlinear Extension of the Barabasi-Albert Model // *Communications in Computer and Information Science*. 2014. Vol. 487. P. 432–439.
16. Юдин Е. Б. Генерация случайных графов предпочтительного связывания // *Омский научный вестник. Сер. Приборы, машины и технологии*. 2010. № 2 (90). С. 188–192.

БАДРЫЗЛОВ Владимир Александрович, аспирант кафедры «Автоматизированные системы обработки информации и управления»; старший преподаватель кафедры «Организация и управление наукоемкими производствами». Адрес для переписки: v_bad@mail.ru

Статья поступила в редакцию 07.06.2017 г.

© В. А. Бадрызов