

## МЕТОДИКА ФОРМИРОВАНИЯ ЧИСЛЕННОГО ПРОЕКЦИОННО- СЕТОЧНОГО АЛГОРИТМА НА ОСНОВЕ «ТРЕХМЕРНОГО РЕГУЛЯРНОГО ЭЛЕМЕНТА» ДЛЯ РАСЧЕТА 3D-МОДЕЛЕЙ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ ДЛЯ СИНХРОННЫХ МАГНИТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН В СОСТАВЕ ВЫСОКОТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ КОМПЛЕКСОВ

В статье предложена методика формирования численного проекционно-сеточного алгоритма на регулярной триангуляционной сети для расчетов трехмерных моделей магнитного поля синхронных магнитоэлектрических машин с возбуждением от постоянных магнитов (СМЭМ ПМ), используя рекуррентные выражения, полученные на основе «трехмерного регулярного элемента» для цилиндрической системы координат. Использование «трехмерного регулярного элемента» позволяет максимально автоматизировать процесс формирования глобальной системы линейных алгебраических уравнений в проекционно-сеточном методе Галеркина в сочетании с методом конечных элементов, минуя этап построения элементных систем уравнений. При решении задачи оптимизации конструкций тихоходных синхронных магнитоэлектрических машин в электротехническом комплексе центральное место в уточнении решения занимает расчет магнитного поля. По известному распределению индукции магнитного поля в областях, занятых обмоткой с током, вычисляются индуктивность обмотки, противо-ЭДС, рабочие характеристики СМЭМ ПМ в высокотехнологических электротехнических комплексах (ВЭТК).

**Ключевые слова:** трехмерный регулярный элемент, метод конечных элементов, магнитное поле, магнитная система, тихоходные синхронные магнитоэлектрические машины в ВЭТК.

Разработка высокотехнологических электротехнических комплексов (ВЭТК) с тихоходными синхронными магнитоэлектрическими машинами с постоянными магнитами (СМЭМ ПМ) с учетом требований технического задания предусматривает расчет магнитного поля [1–10].

В данной работе краевая задача для расчета магнитного поля представляет собой распределение квазистатического магнитного поля по объему моделирования  $V$  [11–13]. Система уравнений магнитного поля в магнитной системе, где наряду с постоянными магнитами присутствуют токи проводимости, имеет вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{J}, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} + \mu_0 \vec{M}_0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\vec{J}$  — плотность тока проводимости;  $\mu = \mu_0 \mu_r$  — абсолютная магнитная проницаемость;  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$  — соответственно векторы магнитной индукции и напряженности магнитного поля;  $\vec{M}_0$  — вектор остаточной намагниченности;  $\mu_0$  — магнитная постоянная;  $\mu_r$  — относительная магнитная проницаемость.

Введем в рассмотрение векторный магнитный потенциал  $\bar{A}$ , удовлетворяющий калибровке

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \bar{A} &= \bar{B}, \\ \operatorname{div} \bar{A} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда, учитывая (1) и (2), можно записать:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \bar{A}) = \mu \operatorname{rot} \bar{H} + \mu_0 \operatorname{rot} \bar{M}_0. \quad (3)$$

Для расчетной модели синхронной тихоходной магнитоэлектрической машины примем следующие допущения:

— относительная и абсолютная магнитная проницаемости элементов конструкции магнитопровода из электротехнической стали при фиксированных положениях подвижной части постоянны;

— при описании постоянного магнита учитываются только поверхностные токи, вследствие линейности участка на кривой размагничивания и высокого значения магнитной твердости магнитов из редкоземельных постоянных магнитов в рабочих режимах.

Последнее допущение справедливо для высокоэнергетических постоянных магнитов. Намагниченность таких магнитов можно считать постоянной по всему объему.

Поверхностные токи намагниченности определяют скачкообразное изменение тангенциальных составляющих напряженности магнитного поля на границе постоянного магнита и воздушной окружающей среды. Средняя плотность поверхностных токов намагниченности записывается в виде:

$$i_m = \operatorname{rot} \bar{M}_0 = [\bar{n}, \bar{M}_{02} - \bar{M}_{01}], \quad (4)$$

где  $\bar{n}$  — нормаль (единичный вектор) к границе раздела двух сред с различными магнитными свойствами;  $\bar{M}_{01}$ ,  $\bar{M}_{02}$  — соответственно векторы намагниченности этих сред.

Для воздушной окружающей среды вектор намагниченности  $\bar{M}_{02} = 0$ , поэтому справедливо выражение

$$i_m = [\bar{n} - \bar{M}_{01}] = [\bar{M}_{01}, \bar{n}] = [\bar{M}_0, \bar{n}]. \quad (5)$$

Среднюю плотность поверхностных токов намагниченности можно также записать через вектор остаточной намагниченности  $\bar{M}_0$ . По аналогии с записью выражения объемной плотности тока намагничивания

$$\bar{J}_M = \operatorname{rot} \frac{\mu_0 \bar{M}_0}{\mu} \quad (6)$$

плотность поверхностного тока намагничивания  $i_m$  будет

$$i_m = \operatorname{rot} \frac{\mu_0 \bar{M}_0}{\mu}. \quad (7)$$

Для магнитных систем с высокоэнергетическими постоянными магнитами, имеющими осевую симметрию, плотность поверхностного тока намагничивания  $i_m$  имеет одну составляющую. При радиальном направлении намагничивания постоянного магнита плотность поверхностного тока  $i_m$  в цилиндрической системе координат направлена вдоль угла  $\theta$ . При совпадении вектора намагниченности

$\bar{M}_0$  с осью  $r$  выражение (7) можно преобразовать к виду:

$$i_m = M_0 \cos(\bar{n} \bar{r}). \quad (8)$$

Для осесимметричных магнитных полей, исследуемых в цилиндрической системе координат и создаваемых магнитными системами, имеющими ось симметрии, важно то, что распределение поля не зависит от угла  $\theta$ , и тогда  $\partial/\partial\theta = 0$ . Также можно принять, что направление тока в цилиндрической системе координат перпендикулярно оси  $z$  и тогда  $A_z = 0$  [1, с. 283]. При этих условиях калибровка  $\operatorname{div} \bar{A} = 0$  примет вид  $\frac{1}{r} \frac{\partial r A_r}{\partial r} = 0$ , из которой вытекает, что  $A_r$  зависит только от  $1/r$  и при  $r = 0$  неограниченно возрастает. Таким образом, из физических соображений можно принять  $A_r = 0$  [1, с. 284]. Следовательно, у магнитного поля с осевой симметрией векторный магнитный потенциал имеет только одну составляющую  $A_\theta$ .

Также одну составляющую будет иметь вектор плотности электрического тока  $\bar{J} = \bar{i}_0 J_\theta = \operatorname{rot} \bar{H}$ , а векторный магнитный потенциал  $\bar{A} = \bar{i}_0 A_\theta$ .

Уравнение Пуассона для трехмерного магнитного поля в цилиндрической системе координат по аналогии с [1, с. 134] имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu} r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu} r \frac{\partial A}{\partial z} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\mu} \frac{A}{r^2} = -J - i_m. \end{aligned} \quad (9)$$

При переходе к функции магнитного потока

$$\Psi(r, \theta, z) = rA(r, \theta, z). \quad (10)$$

Условие  $\Psi(r, \theta, z) = \text{const}$  определяет уравнение силовой линии трехмерного магнитного поля. Для случая составляющие вектора магнитной индукции можно записать [9]

$$B_r = -\left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right), \quad B_z = -\left( r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right), \quad B_\theta = -\left( \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right). \quad (11)$$

Уравнение Пуассона в однородном отдельном объеме  $V$  имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu} r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu} r \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\mu} r \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) = -J - i_m. \end{aligned} \quad (12)$$

На внешней грани расчетного объема  $V$  модели заданы нулевые граничные условия. На оси модели функционал равен нулю, на внешних гранях прямоугольного объема также выполняется равенство  $\Psi = 0$ .

Для конструкции магнитных систем синхронных магнитоэлектрических машин характерны однородные области (объемы) моделирования: магнитопровод из электротехнической стали, катушки, постоянные магниты.

Для каждого из этих однородных областей моделирования можно записать уравнение Лапласа — Пуассона:

— для магнитопровода из электротехнической стали

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu_c} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu_c} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\mu_c} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) = 0; \quad (13)$$

— для объема, занятого обмоткой с током с плотностью постоянного тока намагничивания, магнитная проницаемость  $\mu_r = 1$  и  $\mu$  равна  $\mu_0$ ;

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) = -\mu_0 J, \quad (14)$$

где  $J = \frac{IW}{V_{обм} K_3}$ ;  $V_{обм} = V_{обм1} + V_{обм2} + \dots + V_{обм i}$  — суммарный объем обмоток на пару полюсов;

— для постоянного магнита и воздушного пространства уравнение Пуассона можно записать в виде

После дальнейших преобразований получим:

$$\int_V \left( \frac{1}{\mu_r} \right) \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left\{ [N_m]_r^T \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ [N_m]_r^T \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \right\} \right] dV - \int_V \left( \frac{1}{\mu_r} \right) \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial [N_m]_r^T}{\partial r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial [N_m]_r^T}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right] dV + \int_V [N_m]_r^T \mu_0 (J + i_m) dV = 0. \quad (17)$$

Используя теорему Остроградского — Гаусса, первый интеграл уравнения (17) преобразуется к виду:  $2\pi \oint_M \left( \frac{1}{\mu_r} \right) [F_r \cos(\bar{n} \bar{r}) + F_z \cos(\bar{n} \bar{z})] r dM$  и будет определяться граничными условиями задачи.

При принятых нулевых граничных условиях для моделируемой области  $V$  и на ее внешней границе  $S$  уравнение Пуассона для исследуемой задачи по МКЭ примет вид:

$$\int_S \frac{1}{\mu_r} \left[ \frac{\partial [N_m]_r^T}{\partial r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial [N_m]_r^T}{\partial \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \frac{\partial [N_m]_r^T}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right] dS - \int_S [N_m]_r^T \mu_0 (J + i_m) r dS = 0. \quad (18)$$

По методу конечных элементов (МКЭ) [9–13] используется трехмерный симплекс-элемент, где моделируемая (исследуемая) функция описывается линейным интерполяционным полиномом первой степени, который содержит константу и линейные члены. Число коэффициентов в таком полиноме на единицу больше размерности координатного пространства. Интерполяционный полином для тетраэдра в декартовой системе координат имеет вид:

$$\phi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z. \quad (19)$$

В цилиндрической системе координат уравнение (19) примет вид:

$$\Psi = \lambda_1 + \lambda_2 r + \lambda_3 z + \lambda_4 \theta. \quad (20)$$

Для симплекс-элемента характерны два свойства:

— функция  $\Psi$  изменяется линейно между двумя любыми узлами;

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) = -\mu_0 i_m, \quad (15)$$

причем плотность тока намагниченности  $i_m \neq 0$  только на границе постоянного магнита. В остальных случаях  $i_m = 0$ .

Уравнения (13–15) дополняются внешними нулевыми граничными условиями (на гранях  $N$ -функция формы  $\Psi = 0$ ) и условиями сопряжения на внутренних гранях расчетного объема  $V$ .

По методу Галеркина [10–13] с использованием базисной функции формы  $N_m$  [14, 15] приведем уравнение (15) к виду:

$$\int_V \left( \frac{1}{\mu_r} \right) [N_m]_r^T \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \right] dV + \int_V [N_m]_r^T \mu_0 (J + i_m) dV = 0. \quad (16)$$

— любая линия, вдоль которой  $\Psi$  принимает одинаковые значения, есть прямая, пересекающая две стороны элемента.

Коэффициенты  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  определяются через координаты вершин тетраэдра  $i, j, k, \ell$  (рис. 1).

$$\begin{Bmatrix} \Psi_i \\ \Psi_j \\ \Psi_k \\ \Psi_\ell \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_i & z_i & \theta_i \\ 1 & r_j & z_j & \theta_j \\ 1 & r_k & z_k & \theta_k \\ 1 & r_\ell & z_\ell & \theta_\ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{Bmatrix}. \quad (21)$$

В сокращенной форме записи

$$\{\Psi\} = [A]\{\lambda\}, \quad (22)$$

следовательно,

$$\{\lambda\} = [A]^{-1}\{\Psi\}, \quad (23)$$

где

$$\det[A] = \begin{vmatrix} 1 & r_i & z_i & \theta_i \\ 1 & r_j & z_j & \theta_j \\ 1 & r_k & z_k & \theta_k \\ 1 & r_\ell & z_\ell & \theta_\ell \end{vmatrix} = 6V_e. \quad (24)$$

Выполняется расчет обратной матрицы  $[A]^{-1}$ , тогда (23) примет вид

$$\begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{6V_e} \begin{bmatrix} a_i & b_i & c_i & d_i \\ a_j & b_j & c_j & d_j \\ a_k & b_k & c_k & d_k \\ a_\ell & b_\ell & c_\ell & d_\ell \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \Psi_i \\ \Psi_j \\ \Psi_k \\ \Psi_\ell \end{Bmatrix}, \quad (25)$$

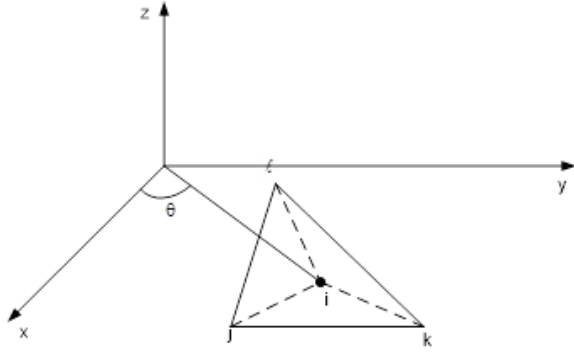


Рис. 1. Трехмерный конечный элемент в форме тетраэдра

где

$$a_i = \begin{vmatrix} r_j & z_j & \theta_j \\ r_k & z_k & \theta_k \\ r_\ell & z_\ell & \theta_\ell \end{vmatrix}, \quad a_j = \begin{vmatrix} r_i & z_i & \theta_i \\ r_k & z_k & \theta_k \\ r_\ell & z_\ell & \theta_\ell \end{vmatrix},$$

$$a_k = \begin{vmatrix} r_i & z_i & \theta_i \\ r_j & z_j & \theta_j \\ r_\ell & z_\ell & \theta_\ell \end{vmatrix}, \quad a_\ell = \begin{vmatrix} r_i & z_i & \theta_i \\ r_j & z_j & \theta_j \\ r_k & z_k & \theta_k \end{vmatrix}$$

и

$$a_i = r_j(z_k\theta_\ell - z_\ell\theta_k) - z_j(r_k\theta_\ell - r_\ell\theta_k) + \theta_j(r_kz_\ell - r_\ellz_k),$$

$$a_j = r_i(z_k\theta_\ell - z_\ell\theta_k) - z_i(r_k\theta_\ell - r_\ell\theta_k) + \theta_i(r_kz_\ell - r_\ellz_k),$$

$$a_k = r_i(z_j\theta_\ell - z_\ell\theta_j) - z_i(r_j\theta_\ell - r_\ell\theta_j) + \theta_i(r_jz_\ell - r_\ellz_j),$$

$$a_\ell = r_i(z_j\theta_k - z_k\theta_j) - z_i(r_j\theta_k - r_k\theta_j) + \theta_i(r_jz_k - r_kz_j),$$

$$b_i = r_i \begin{vmatrix} 1 & z_j & \theta_j \\ 1 & z_k & \theta_k \\ 1 & z_\ell & \theta_\ell \end{vmatrix}, \quad b_j = r_j \begin{vmatrix} 1 & z_i & \theta_i \\ 1 & z_k & \theta_k \\ 1 & z_\ell & \theta_\ell \end{vmatrix},$$

$$b_k = r_k \begin{vmatrix} 1 & z_i & \theta_i \\ 1 & z_j & \theta_j \\ 1 & z_\ell & \theta_\ell \end{vmatrix}, \quad b_\ell = r_\ell \begin{vmatrix} 1 & z_i & \theta_i \\ 1 & z_j & \theta_j \\ 1 & z_k & \theta_k \end{vmatrix},$$

$$b_i = r_j[(z_k\theta_\ell - z_\ell\theta_k) - z_j(\theta_\ell - \theta_k) + \theta_j(z_\ell - z_k)],$$

$$b_j = r_i[(z_k\theta_\ell - z_\ell\theta_k) - z_i(\theta_\ell - \theta_k) + \theta_i(z_\ell - z_k)],$$

$$b_k = r_\ell[(z_j\theta_\ell - z_\ell\theta_j) - z_\ell(\theta_\ell - \theta_j) + \theta_\ell(z_\ell - z_j)],$$

$$b_\ell = r_i[(z_j\theta_k - z_k\theta_j) - z_i(\theta_k - \theta_j) + \theta_i(z_k - z_j)],$$

$$c_i = z_i \begin{vmatrix} 1 & r_j & \theta_j \\ 1 & r_k & \theta_k \\ 1 & r_\ell & \theta_\ell \end{vmatrix}, \quad c_j = z_j \begin{vmatrix} 1 & r_i & \theta_i \\ 1 & r_k & \theta_k \\ 1 & r_\ell & \theta_\ell \end{vmatrix},$$

$$c_k = z_k \begin{vmatrix} 1 & r_i & \theta_i \\ 1 & r_j & \theta_j \\ 1 & r_\ell & \theta_\ell \end{vmatrix}, \quad c_\ell = z_\ell \begin{vmatrix} 1 & r_i & \theta_i \\ 1 & r_j & \theta_j \\ 1 & r_k & \theta_k \end{vmatrix},$$

$$c_i = z_i[(z_k\theta_\ell - z_\ell\theta_k) - r_j(\theta_\ell - \theta_k) + \theta_j(r_\ell - r_k)],$$

$$c_j = z_j[(z_k\theta_\ell - z_\ell\theta_k) - r_i(\theta_\ell - \theta_k) + \theta_i(r_\ell - r_k)],$$

$$c_k = z_k[(r_j\theta_\ell - r_\ell\theta_j) - r_i(\theta_\ell - \theta_j) + \theta_i(r_\ell - r_j)],$$

$$c_\ell = z_\ell[(r_j\theta_k - r_k\theta_j) - r_i(\theta_k - \theta_j) + \theta_i(r_k - r_j)]$$

$$d_i = \theta_i \begin{vmatrix} 1 & r_j & z_j \\ 1 & r_k & z_k \\ 1 & r_\ell & z_\ell \end{vmatrix}, \quad d_j = \theta_j \begin{vmatrix} 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_k & z_k \\ 1 & r_\ell & z_\ell \end{vmatrix},$$

$$d_k = \theta_k \begin{vmatrix} 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_j & z_j \\ 1 & r_\ell & z_\ell \end{vmatrix}, \quad d_\ell = \theta_\ell \begin{vmatrix} 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_j & z_j \\ 1 & r_k & z_k \end{vmatrix},$$

$$d_i = \theta_i[(r_kz_\ell - r_\ellz_k) - r_j(z_\ell - z_k) + z_j(r_\ell - r_k)],$$

$$d_j = \theta_j[(r_kz_\ell - r_\ellz_k) - r_i(z_\ell - z_k) + z_i(r_\ell - r_k)],$$

$$d_k = \theta_k[(r_jz_\ell - r_\ellz_j) - r_i(z_\ell - z_j) + z_i(r_\ell - r_j)],$$

$$d_\ell = \theta_\ell[(r_jz_k - r_kz_j) - r_i(z_k - z_j) + z_i(r_k - r_j)].$$

Функция магнитного потока для конечного элемента может быть представлена в виде:

$$\Psi_m = (N_i\Psi_i + N_j\Psi_j + N_k\Psi_k + N_\ell\Psi_\ell) = [N_m]_r [\Psi_m]_r, \quad (26)$$

где  $N_m = \frac{a_m + b_m r + c_m z + d_m \theta}{6V_e}$  — функция формы;  $m = i, j, k, \ell$ ;  $V_e$  — объем конечного элемента.

Указанное выражение функции формы  $[N_m]_r$  на конечном элементе позволяет выполнить операцию интегрирования по объему:

$$\sum_{r=1}^p \int_{V_e} \left[ \frac{\partial [N_m]_r}{\partial r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\partial [N_m]_r}{\partial z} \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial [N_m]_r}{\partial \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right] dV - \int_{V_e} [N_m]_r \mu_0 J r dV - \int_L [N_m]_r \mu_0 i_m r dL = 0, \quad (27)$$

где  $i_m = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial z} \cos(\bar{n} \wedge \bar{z}) \right)$ ,  $\bar{n}$  — единичный вектор, перпендикулярный поверхности;  $p$  — число тетраэдров в расчетном объеме модели;  $q$  — число узлов трехмерной сети;  $m = 1, 2, \dots, q$ .

После подстановки (27), (28) в (18) получим:

$$\frac{1}{12V_e} \sum_{r=1}^p \frac{1}{\mu_r} [B_m]_r^T [B_m]_r \{\Psi_m\}_r - \frac{1}{6V_e} \sum_{r=1}^p \int_{V_e} \frac{1}{\mu_r} \begin{bmatrix} L_1 c_i & L_1 c_j & L_1 c_k & L_1 c_\ell \\ L_2 c_i & L_2 c_j & L_2 c_k & L_2 c_\ell \\ L_3 c_i & L_3 c_j & L_3 c_k & L_3 c_\ell \\ L_4 c_i & L_4 c_j & L_4 c_k & L_4 c_\ell \end{bmatrix} \{\Psi_m\}_r r dr - \mu_0 J \frac{V_e}{12} \sum_{r=1}^p \begin{bmatrix} 2r_i + r_j + r_k \\ r_i + 2r_j + r_k \\ r_i + r_j + 2r_k \end{bmatrix} = 0, \quad (29)$$

$$\text{где } [B_m]_r = \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k & b_\ell \\ c_i & c_j & c_k & c_\ell \\ d_i & d_j & d_k & d_\ell \end{bmatrix},$$

$$[B_m]_r^T = \begin{bmatrix} b_i & c_i & d_i \\ b_j & c_j & d_j \\ b_k & c_k & d_k \\ b_\ell & c_\ell & d_\ell \end{bmatrix}.$$

После сокращения на  $\frac{1}{12V_e}$  получим

$$\sum_{r=1}^p \frac{1}{\mu_r} [B_m]_r^T [B_m]_r \{\Psi_m\}_r - 2 \sum_{r=1}^p \int_r \frac{1}{\mu_r} \begin{bmatrix} L_1 c_i & L_1 c_j & L_1 c_k & L_1 c_\ell \\ L_2 c_i & L_2 c_j & L_2 c_k & L_2 c_\ell \\ L_3 c_i & L_3 c_j & L_3 c_k & L_3 c_\ell \\ L_4 c_i & L_4 c_j & L_4 c_k & L_4 c_\ell \end{bmatrix} \{\Psi_m\}_r r dr - \mu_0 J V_e^2 \sum_{r=1}^p \begin{bmatrix} 2r_i + r_j + r_k \\ r_i + 2r_j + r_k \\ r_i + r_j + 2r_k \end{bmatrix} = 0. \quad (30)$$

При составлении глобальной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

$$[U]\{\Psi\} = \{F\}. \quad (31)$$

Рекуррентные соотношения для формирования глобальной СЛАУ из элементарных уравнений (22):

$$u_{ms} = \frac{1}{\mu_{r1}} (b_m^{(r1)} b_s^{(r1)} + c_m^{(r1)} c_s^{(r1)} + d_m^{(r1)} d_s^{(r1)}) + \frac{1}{\mu_{r2}} (b_m^{(r2)} b_s^{(r2)} + c_m^{(r2)} c_s^{(r2)} + d_m^{(r2)} d_s^{(r2)}) + u'_{ms} \text{ при } m \neq s \quad (32)$$

$$u'_{ms} = h \left[ \frac{1}{\mu_{r1}} (c_m^{(r1)} + c_s^{(r1)}) + \frac{1}{\mu_{r2}} (c_m^{(r2)} + c_s^{(r2)}) \right] \cos(\bar{n} \wedge \bar{z})$$

$$u_{mm} = \sum_{r=1}^{20} \frac{1}{\mu_{r1}} (b_m^{(r)} b_m^{(r)} + c_m^{(r)} c_m^{(r)} + d_m^{(r)} d_m^{(r)}) + u'_{mm} \text{ при } m = s, \quad (33)$$

$$u'_{mm} = h \sum_{r=1}^{20} (c_m^{(r)} + c_m^{(r)}) \cos(\bar{n} \wedge \bar{z}),$$

где  $r1, r2$  — номера конечных элементов с узлами  $m$  и  $s$  (рис. 2),  $h$  — длина ребра.

При составлении СЛАУ используем «регулярный элемент» [14]. Применение «регулярного элемента» позволяет пропустить этап составления матрицы жесткости и перейти непосредственно к составлению системы уравнений.

Для пояснения структуры глобальной СЛАУ вводится расширенный до трех измерений «регулярный элемент». «Трёхмерный регулярный элемент» на равномерной триангуляционной сети используется для моделирования магнитного поля электротехнических устройств в 3D расчетной области.

Запишем уравнение для 11-го узла «трехмерного регулярного элемента» (рис. 2):

$$u_{11,10} \Psi_{10} + u_{11,11} \Psi_{11} + u_{11,8} \Psi_8 + u_{11,9} \Psi_9 + u_{11,12} \Psi_{12} + u_{11,13} \Psi_{13} + u_{11,14} \Psi_{14} + u_{11,16} \Psi_{16} +$$

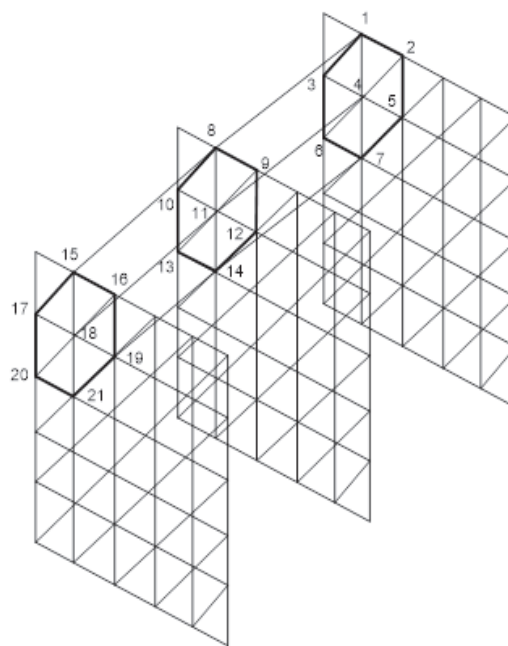


Рис. 2. Регулярный элемент на 3D сетке расчетной области

$$+ u_{11,18} \Psi_{18} + u_{11,15} \Psi_{15} + u_{11,19} \Psi_{19} + u_{11,21} \Psi_{21} + u_{11,20} \Psi_{20} + u_{11,17} \Psi_{17} + u_{11,3} \Psi_3 + u_{11,4} \Psi_4 + u_{11,6} \Psi_6 + u_{11,7} \Psi_7 + u_{11,5} \Psi_5 + u_{11,2} \Psi_2 + u_{11,1} \Psi_1 = F_{11}. \quad (34)$$

Из уравнения (27) видно, что решением глобальной СЛАУ при заданных граничных и начальных условиях являются значения функции магнитного потока  $\{\Psi_m\}$  в узлах триангуляционной сети магнитной системы СГПМ, представленной на рис. 2. Для решения глобальной СЛАУ могут быть использованы прямые и итерационные методы.

Программная реализация предложенного метода расчета трехмерного поля выполнена на языке Java для тестовой задачи расчета электротехнического устройства, для которого трехмерная геометрическая модель в цилиндрической системе координат приведена на рис. 3.

Результаты расчета и их сравнение с результатами, полученными в стороннем программном обеспечении Ansys Maxwell 16.0, приведены на рис. 4.

Количество уравнений в СЛАУ — 600. Время расчета тестовой задачи с помощью разработанной

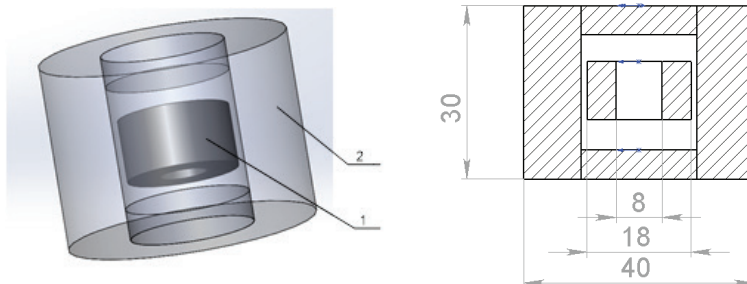


Рис. 3. Внешний вид тестовой магнитной системы: 1 — постоянный магнит; 2 — магнитопровод из электротехнической стали

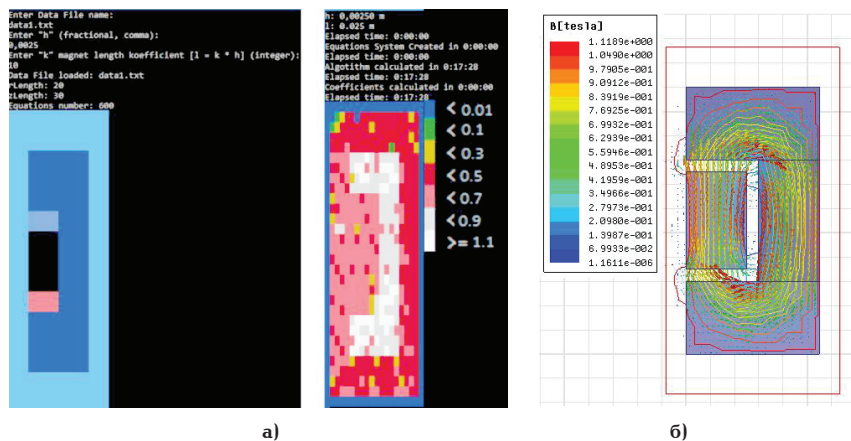


Рис. 4. Результат расчета магнитной системы в разработанном программном обеспечении (а) и в программном обеспечении Ansys Maxwell 16.0 (б)

программы составляет 17,28 мин. В качестве решателя СЛАУ использовался открытый код метода Гаусса.

Таким образом, предлагаемая методика формирования глобальной СЛАУ алгоритмизирована, выполнена программная реализация на языке Java по разработанной методике для решения тестовой задачи: расчета трехмерного магнитного поля постоянного магнита окруженного магнитопроводом в цилиндрической системе координат на основе «трехмерного регулярного элемента». Большие временные затраты на вычисление объемных мультифизических распределенных задач делают актуальным применение для данной методики специальных численных процедур расчета разреженных СЛАУ с использованием алгоритмов параллельных вычислений, что приведет к еще более существенному сокращению времени расчета.

#### Библиографический список

1. Шимони К. Теоретическая электротехника: пер. с нем. М.: Мир, 1964. 773 с.
2. Шарафеддин К. Ф., Цырук С. А., Сангов Х. С., Михеев Д. В. Система автоматического регулирования напряжения трехфазного самовозбуждающегося асинхронного генератора ветроэнергетической установки // Промышленная энергетика. 2018. № 12. С. 33–41.
3. Durand R., Pantoja-Rosero B. G., Oliveira V. A general mesh smoothing method for finite elements // Finite Elements in Analysis and Design. 2019. Vol. 158. P. 17–30.
4. Важнов С. А., Калимов А. Г., Шиманский С. А. Применение векторных конечных элементов для расчета вихревых токов в проводящих немагнитных оболочках // Известия НТЦ Единой энергетической системы. 2017. № 2 (77). С. 43–53.
5. Шевченко А. Ф. Многополюсные синхронные машины с дробными  $q < 1$  зубцовыми обмотками с возбуждением от постоянных магнитов // Электротехника. 2007. № 9. С. 3–8.
6. Шевченко А. Ф. Многополюсные магнитоэлектрические генераторы с дробными однозубцовыми обмотками для ветроэлектрических установок // Электротехника. 2007. № 9. С. 3–8.
7. Исмагилов Ф. Р., Вавилов В. Е., Герасин А. А. Экспериментальные исследования высокооборотных генераторов с магнитопроводов статора из аморфного железа // Авиакосмическое приборостроение. 2017. № 12. С. 3–11.
8. Кулешов Е. В. Вопросы проектирования синхронного ветрогенератора с магнитоэлектрическим возбуждением // Труды дальневосточного государственного технического университета. 1999. № 124. С. 121–126.

9. Сегерлинд Л. Дж. Применение метода конечных элементов: пер. с англ. А. А. Шестакова. М.: Мир, 1979. 392 с.
10. Тозони О. В. Метод вторичных источников в электротехнике. М.: Энергия, 1975. 295 с.
11. Тамм И. Е. Основы теории электричества. 10-е изд., испр. М.: Наука, 1989. 504 с. ISBN 5-02-014244-1.
12. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981. 416 с.
13. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация: пер. с англ. Б. И. Квасова. М.: Мир, 1986. 318 с.
14. Андреева Е. Г., Ковалев В. З. Математическое моделирование электротехнических комплексов: моногр. Омск: Изд-во ОмГТУ, 1999. 170 с. ISBN 5-8149-0017-2.
15. Andreeva E. G. «Regular element» global SLAE of the finite element method when simulating electromagnetic processes of electric devices // IOP Conf. Series: Journal of Physics. 2018. Vol. 1050. 012003. DOI: 10.1088/1742-6596/1050/1/012003.

**ТАТЕВОСЯН Андрей Александрович**, кандидат технических наук, доцент (Россия), доцент кафедры «Электрическая техника», декан энергетического факультета.

SPIN-код: 6456-8370

AuthorID (РИНЦ): 163175

AuthorID (SCOPUS): 56503745000

ResearcherID: M-3175-2015

Адрес для переписки: karo1@mail.ru

**АНДРЕЕВА Елена Григорьевна**, доктор технических наук, профессор (Россия), профессор кафедры «Электрическая техника».

SPIN-код: 8247-7262

AuthorID (РИНЦ): 259826

ORCID: 0000-0002-1303-669X

AuthorID (SCOPUS): 56825338600

ResearcherID: Q-1479-2015

Адрес для переписки: lenandr02@yandex.ru

#### Для цитирования

Татевосян А. А., Андреева Е. Г. Методика формирования численного проекционно-сеточного алгоритма на основе «трехмерного регулярного элемента» для расчета 3D-моделей магнитного поля в цилиндрической системе координат для синхронных магнитоэлектрических машин в составе высокотехнологических электротехнических комплексов // Омский научный вестник. 2019. № 6 (168). С. 40–45. DOI: 10.25206/1813-8225-2019-168-40-45.

Статья поступила в редакцию 28.10.2019 г.

© А. А. Татевосян, Е. Г. Андреева