

## УВЕЛИЧЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ДИАПАЗОНА АЦП В ИНФОРМАЦИОННО- ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ МЕТОДАМИ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

В статье рассматривается метод повышения динамического диапазона стандартного аналого-цифрового преобразователя. Метод базируется на интерполяции участков сигнала, которые были ограничены по амплитуде, по искаженным участкам. Интерполяция выполняется решением системы линейных уравнений. Произведена оценка погрешностей и факторов, лимитирующих применение метода. Приведены результаты моделирования. Сделан вывод о перспективности использования метода наименьших квадратов, так как в этом случае ошибка интерполяции является наименьшей в среднеквадратичном смысле.

**Ключевые слова:** аналого-цифровой преобразователь, динамический диапазон, интерполяция, погрешность интерполяции, система линейных уравнений, неравномерная дискретизация, интерполирующий ряд.

**Введение.** При разработке информационно-измерительных систем большое внимание уделяется динамическому диапазону, в котором проводятся измерения. В настоящее время достаточно часто устройства данного типа строятся на принципах цифровой обработки сигналов. Соответственно, основным фактором, лимитирующим динамический диапазон измерителя, является аналого-цифровой преобразователь (АЦП) [1–5]. Как известно, АЦП преобразует непрерывный во времени сигнал в последовательность квантованных по уровню чисел, которые далее обрабатываются на некоторой вычислительной платформе, например, в цифровом сигнальном процессоре. То есть, с точки зрения математики, функциональное пространство сигналов отображается на конечное поле целых чисел, если принять, что на выходе АЦП — целые числа в диапазоне от  $-2^{N-1}$  до  $2^{N-1}-1$ , где  $N$  — разрядность АЦП. Очевидно, что данное отображение не является биекцией. Так, если преобразуемый сигнал превышает динамический диапазон АЦП, то он «обрезается» по уровню и не может быть восстановлен. То же имеет место и в отношении малых сигналов. Если они не превышают половины младшего разряда АЦП, то восстановить их достаточно проблематично. При этом разработчик всегда находится перед дилеммой — если он делает упор на измерение малых сигналов, то перед АЦП обычно ставится усилитель, что приводит к ограничению

сигналов с большой амплитудой. При измерении больших сигналов, соответственно, увеличивается погрешность измерения малых сигналов. Наиболее наглядно данная проблема проявляется при измерении шумоподобных сигналов, когда мгновенные значения сигнала могут в разы превышать его среднеквадратическое значение.

Цель данной статьи — предложить метод, позволяющий повысить динамический диапазон стандартного АЦП за счет применения методов цифровой обработки сигналов.

**Постановка задачи.** Повышение динамического диапазона в рассматриваемом случае должно сводиться к восстановлению амплитуды отсчетов дискретизированного сигнала, амплитуда которых превысила динамический диапазон АЦП. Информация, необходимая для восстановления, должна находиться в отсчетах малой амплитуды, которые не подвергались искажениям. При работе с переменными сигналами такие отсчеты группируются в точках перехода через ноль. Их количество пропорционально частоте дискретизации. Следовательно, мы имеем дело с классической задачей интерполяции сигнала. Однако, в отличие от стандартных методов интерполяции, в данном случае придется иметь дело с неравномерной частотой дискретизации.

Теперь поставим задачу. Пусть имеется некоторая непрерывная функция  $x(t)$  с автокорреляционной функцией, отличной от дельта-функции

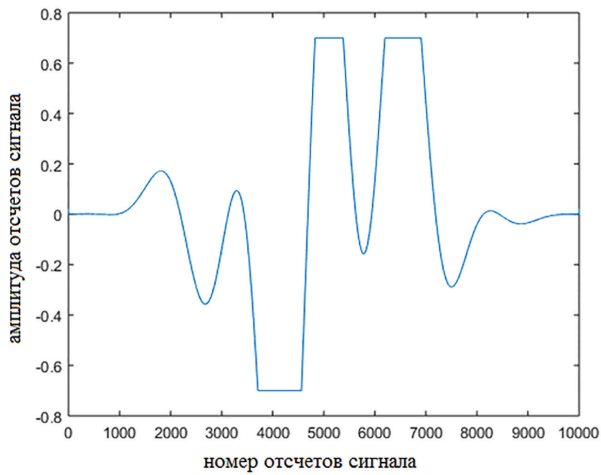


Рис. 1. Ограничение амплитуды отсчетов в результате превышения динамического диапазона АЦП

Дирака. После дискретизации данной функции получена последовательность  $x(n)$ . Далее все отсчеты этой последовательности подвергались квантованию и часть отсчетов была ограничена по амплитуде, как это показано на рис. 1. Задача состоит в том, чтобы восстановить амплитуды искаженных отсчетов и определить условия, при которых такое восстановление возможно.

**Теория.** Для решения этой задачи учтем, что отсчеты  $x(n)$  имеют некоторую зависимость из-за наличия корреляции [6, 7], что следует из условия задачи. Следовательно, имеется возможность с той или иной погрешностью выразить одни отсчеты через другие. Применительно к виду автокорреляционной функции и свойствам самого сигнала данная зависимость может быть записана разными формулами. Рассмотрим случай, когда исходный сигнал имеет спектр, ограниченный по Котельникову [8, 9]. В этом случае, если частота дискретизации будет превышать более чем в два раза ширину спектра сигнала, то между отсчетами возникнет линейная зависимость. Используем этот факт для решения поставленной задачи. Для этого представим исходную функцию на конечном интервале длиной  $T$  в виде какого-либо ряда. Например, в виде ряда Фурье [10, 11].

$$x(t) = C_0 e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot 0t} + C_1 e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot 1t} + C_2 e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot 2t} + \dots + C_k e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot kt} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot kt}, \quad (1)$$

где  $C_n$  — некоторые коэффициенты.

Формула (1) представляет бесконечный ряд и не может быть вычислена на реальной вычислительной платформе. Поэтому усекаем данный ряд до конечной суммы:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot kt} + \eta(t) = \tilde{x}(t) + \eta(t), \quad (2)$$

где  $\eta(t)$  — ошибка, вызванная усечением ряда.

Как следует из теории, при усечении ряда Фурье ошибка  $\eta(t)$  минимальна в среднеквадратичном смысле.

Теперь на основании формулы (1) составим систему уравнений. Для этого найдем значение исходного сигнала в точках  $x(t_n)$ , соответствующее отсчетам, которые имели достаточно малую амплитуду и не были ограничены АЦП.

$$\begin{cases} x(t_0) = C_0 e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot 0t_0} + C_1 e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot 1t_0} + C_2 e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot 2t_0} + \dots + \\ + C_k e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot kt_0} + \dots + C_{N-1} e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot (N-1)t_0} \\ x(t_1) = C_0 e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot 0t_1} + C_1 e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot 1t_1} + C_2 e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot 2t_1} + \dots + \\ + C_k e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot kt_1} + \dots + C_{N-1} e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot (N-1)t_1} \\ x(t_2) = C_0 e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot 0t_2} + C_1 e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot 1t_2} + C_2 e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot 2t_2} + \dots + \\ + C_k e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot kt_2} + \dots + C_{N-1} e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot (N-1)t_2} \\ \dots \\ x(t_{N-1}) = C_0 e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot 0t_{N-1}} + C_1 e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot 1t_{N-1}} + C_2 e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot 2t_{N-1}} + \dots + \\ + C_k e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot kt_{N-1}} + \dots + C_{N-1} e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot (N-1)t_{N-1}} \end{cases} \quad (3)$$

Величины  $x(t_n)$ , как уже говорилось выше, известны, так как являются конкретными отсчетами сигнала. Величины  $e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot kt_n}$  можно рассчитать заранее. Соответственно, решая систему уравнений, находим коэффициенты  $C_k$ . После этого вычисляется значение

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{j\frac{2\pi}{T} \cdot kt} \quad (4)$$

в требуемой точке  $t$ . Таким образом, поставленная в начале статьи задача решена в общем виде. Рассмотрим теперь некоторые прикладные вопросы, возникающие при подобном рода вычислениях.

**Результаты экспериментов.** Решение системы уравнений (3) не всегда существует. Для определенного набора значений отсчетов  $x(t_n)$  данная система может оказаться вырожденной. При моделировании в среде Matlab получена статистика, согласно которой вырожденными являются в среднем несколько процентов получаемых при подобной интерполяции систем уравнений. Данная проблема может быть решена следующим образом. Обычно точку интерполяции выбирают так, чтобы узлы интерполяции (отсчеты  $x(t_n)$ ) располагались справа и слева от этой точки. При этом число отсчетов справа и слева выбирается примерно одинаковым. Допустим, 7 отсчетов справа и 8 слева. Если полученная система уравнений оказывается вырожденной, можно взять, наоборот, 8 отсчетов справа и 7 слева. Если принять, что в среднем только каждая десятая система уравнений оказывается вырожденной, вероятность того, что система уравнений будет вырожденной и в первом, и во втором случае равна 0,01. Данный подход можно развивать. Допустим, использовать слева 9 узлов интерполяции, а справа 6, и так далее. Еще одним решением проблемы вырождения системы уравнений является выбор более подходящего базиса для конкретного вида интерполируемого сигнала.

При рассмотренном методе повышения динамического диапазона важным фактором является операция квантования отсчетов  $x(t_n)$ . Принято счи-

тать, что данная операция может быть представлена в виде суммы точного значения отсчета и так называемого шума квантования, который является результатом округления

$$x_q(t_n) = \text{round}(x(t_n)) + s(t_n), \quad (5)$$

где  $\text{round}$  — операция округления;  $s(t_n)$  — шум квантования.

При этом проблему представляет не столько сам шум квантования, сколько его рекурсивное накопление при решении системы уравнений. К сожалению, реальную погрешность решения (или, как говорят математики, невязку) априори определить достаточно сложно. В результате моделирования было установлено, что среднеквадратическая погрешность интерполированного сигнала относительно неискаженного эталона примерно равна среднеквадратической амплитуде шума квантования.

Еще одним важным свойством описываемого метода является коэффициент расширения динамического диапазона. При моделировании было установлено, что динамический диапазон может быть увеличен в 10 и более раз при погрешности восстановления 0,01 % и менее. Вообще, в данном методе происходит своего рода обмен. Малый динамический диапазон АЦП может быть компенсирован за счет повышения частоты дискретизации.

Следует сказать, что для построения системы необязательно раскладывать исходный сигнал именно в ряд комплексных экспонент. Возможно разложение в любой интерполирующий ряд, в том числе и не ортогональный. Например, хорошие результаты показала аппроксимация полиномом. Вообще, член интерполирующего ряда должен в максимальной степени походить на интерполируемый сигнал. То есть лучшие результаты получаются при «интерполяции подобного подобным». С одной стороны, это приводит к уменьшению количества членов ряда, необходимых для достижения заданной точности, с другой — к снижению риска получения вырожденной системы. Так, сигналы с ограниченным спектром по Котельникову хорошо интерполируются рядом Котельникова, то есть последовательностью смещенных синков:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) \frac{\sin \omega_c(t - n\Delta t)}{\omega_c(t - n\Delta t)}, \quad (6)$$

где  $\Delta t$  — период дискретизации;  $\omega_c$  — граничная частота в спектре сигнала.

Сигналы с узким спектром относительно частоты дискретизации хорошо интерполируются рядом Фурье вида

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \left( A_k \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) + B_k \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \right), \quad (7)$$

где  $A_k$  и  $B_k$  — коэффициенты, которые необходимо найти.

Если интерполирующий полином записать в общем виде

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) = & C_0\varphi_0(t) + C_1\varphi_1(t) + \\ & + C_2\varphi_2(t) + \dots + C_k\varphi_k(t) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k\varphi_k(t), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\varphi_k(t)$  — выбранные для интерполяции функции, то систему уравнений возможно записать в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \varphi_0(t_0) & \varphi_1(t_0) & \dots & \varphi_k(t_0) & \dots & \varphi_K(t_0) \\ \varphi_0(t_1) & \varphi_1(t_1) & \dots & \varphi_k(t_1) & \dots & \varphi_K(t_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(t_n) & \varphi_1(t_n) & \dots & \varphi_k(t_n) & \dots & \varphi_K(t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(t_{N-1}) & \varphi_1(t_{N-1}) & \dots & \varphi_k(t_{N-1}) & \dots & \varphi_K(t_{N-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \dots \\ C_k \\ \dots \\ C_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t_0) \\ x(t_1) \\ \dots \\ x(t_n) \\ \dots \\ x(t_{N-1}) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

**Обсуждение экспериментов.** Все рассмотренные варианты имеют следующую особенность. Исходный сигнал аппроксимируется набором базисных функций такого же размера, что и количество используемых для интерполяции отсчетов (узлов интерполяции). Другими словами, матрица  $[\varphi_k(t_n)]$  является квадратной. Как уже отмечалось выше, это имеет определенные преимущества, в основном связанные с количеством математических операций, необходимых для решения системы уравнений. В случае квадратной матрицы это количество минимально. Одним из следствий такого подхода является то, что, например, при интерполяции сигнала, ограниченного по Котельникову, количество отсчетов, необходимых для интерполяции, которые не были ограничены АЦП, должно в среднем соответствовать частоте дискретизации. Тогда возможно идеальное восстановление сигнала. Однако данное преимущество оборачивается тем, что матрица может оказаться вырожденной. При этом, с технической точки зрения, частоту дискретизации во многих случаях можно было бы повысить, получая дополнительные отсчеты, которые в случае квадратной матрицы не имеют смысла, так как они приведут только к тому, что некоторые уравнения в нашей системе уравнений станут линейно зависимы. Однако существует метод, позволяющий использовать при интерполяции большее число отсчетов интерполируемого сигнала для получения меньшего числа коэффициентов разложения, но с меньшей погрешностью. Это так называемый метод наименьших квадратов.

Метод наименьших квадратов позволяет в нашем случае найти набор коэффициентов для интерполяционного ряда с наименьшей погрешностью в среднеквадратичном смысле. Данный метод так же основан на решении системы уравнений, которая может быть достаточно просто построена, если в качестве интерполирующего ряда выбран обычный полином вида

$$\bar{x}(t) = b_0 + \sum_{k=1}^K b_k t^k. \quad (10)$$

Тогда система уравнений имеет вид

$$\begin{bmatrix} N & \sum_{n=1}^N t_n & \dots & \sum_{n=1}^N t_n^K \\ \sum_{n=1}^N t_n & \sum_{n=1}^N t_n^2 & \dots & \sum_{n=1}^N t_n^{K+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{n=1}^N t_n^K & \sum_{n=1}^N t_n^{K+1} & \dots & \sum_{n=1}^N t_n^{2K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^N x_n \\ \sum_{n=1}^N t_n x_n \\ \dots \\ \sum_{n=1}^N t_n^K x_n \end{bmatrix}, \quad (11)$$

где  $x_n$  — отсчет интерполируемого сигнала в момент времени  $t_n$ .

Увеличение динамического диапазона АЦП методом наименьших квадратов имеет два существенных преимущества. Во-первых, интерполяция получается тем точнее, чем больше отсчетов интерполируемого сигнала принимает участие в вычислениях. Во-вторых, система уравнений, полученная таким образом, всегда имеет решение. Из недостатков метода следует указать некоторое увеличение количества математических операций, по сравнению со случаями, рассмотренными выше.

**Выводы.** В статье рассмотрен метод расширения динамического диапазона стандартного АЦП. Метод базируется на идее восстановления амплитуды отсчетов, которые выходят за пределы динамического диапазона АЦП. Восстановление выполняется при помощи интерполяции по отсчетам, которые не подверглись искажению. Алгоритм интерполяции строится на выборе интерполирующего ряда, с последующим определением коэффициентов ряда через решение системы уравнений. В результате моделирования метода была оценена погрешность метода, которая примерно соответствует погрешности, обусловленной квантованием отсчетов интерполируемого сигнала. В конце статьи обоснована методика расширения динамического диапазона АЦП, базирующаяся на методе наименьших квадратов, позволяющая не только уменьшить погрешность интерполяции, но и строить системы уравнений, которые всегда имеют решение.

#### Библиографический список

1. Jungwirth P., Evans D. Analog-to-digital conversion and model based engineering // Open Architecture/Open Business Model Net-Centric Systems and Defense Transformation. 2019. Vol. 11015. 198 p. ISBN 9781510626959.
2. Tang X., Hu Q., Klipsh W. T. Analog to Digital Feature Converter based on Oversampling Modulators for ECG Delineation // 2019 IEEE 62nd International Midwest Symposium on Circuits and Systems (MWSCAS). 2019. DOI: 10.1109/MWSCAS.2019.8885145.
3. Wetherington G. R. Performance Assessment of Several Low-Cost Consumer-Grade Analog-to-Digital Conversion Devices // Sensors and Instrumentation, Aircraft/Aerospace and Energy Harvesting. 2019. Vol. 8. P. 15–22. DOI: 10.1007/978-3-319-74642-5\_2.
4. Чернышова Т. И., Курносов Р. Ю., Каменская М. А. Оценка метрологической надежности аналого-цифрового преобразователя в структуре информационно-измерительной системы на этапе проектирования // Вестник Тамбовского го-

сударственного технического университета. 2019. Т. 25, № 2. С. 180–189. DOI: 10.17277/vestnik.2019.02.pp.180-189.

5. Данилаев Д. П. О выборе АЦП для цифрового приемника // Системы синхронизации, формирования и обработки сигналов. 2019. Т. 10, № 3. С. 27–33.
6. Blandford D., Parr J. Introduction to Digital Signal Processing. 2019. 784 p. ISBN 0131394061; 978-0131394063.
7. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов / пер. с англ. С. Ф. Боева. 3-е изд., испр. М.: Техносфера, 2018. 1048 с.
8. Kramer H. P. A generalized sampling theorem // Journal of Mathematics and Physics. 1959. Vol. 38, Issue 1-4. P. 68–72. DOI: 10.1002/sapm195938168.
9. Jerri A. J. The Shannon sampling theorem — Its various extensions and applications: A tutorial review // Proceedings of the IEEE. 1977. Vol. 65, Issue 11. P. 1565–1596. DOI: 10.1109/PROC.1977.10771.
10. Гасанов М. И., Григорян, Л. А. Ряды Фурье и их практическое применение в электротехнике // Актуальные тренды и перспективы развития науки, техники, технологий: сб. науч. тр. / под общ. ред. Е. П. Ткачевой. Белгород, 2019. С. 6–9.
11. Лученкова Е. Б., Рыбакова Н. Н., Сакулин В. П. [и др.]. Ряды. Красноярск: Изд-во СФУ, 2019. 78 с.

**ЧУВЫКИН Борис Викторович**, доктор технических наук, профессор (Россия), профессор кафедры «Информационно-вычислительные системы» Пензенского государственного университета, г. Пенза.  
SPIN-код: 6721-0395

AuthorID (SCOPUS): 6506337395

**НИКИФОРОВ Михаил Михайлович**, кандидат технических наук, заместитель директора Научно-исследовательского института энергосбережения на железнодорожном транспорте Омского государственного университета путей сообщения, г. Омск.  
SPIN-код: 8509-4959

AuthorID (SCOPUS): 57191253000

Адрес для переписки: st256@mail.ru

#### Для цитирования

Чувыкин Б. В., Никифоров М. М. Увеличение динамического диапазона АЦП в информационно-измерительных системах методами цифровой обработки сигналов // Омский научный вестник. 2020. № 1 (169). С. 58–61. DOI: 10.25206/1813-8225-2020-169-58-61.

Статья поступила в редакцию 11.12.2019 г.

© Б. В. Чувыкин, М. М. Никифоров