

ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ КИНЕМАТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ЧЕТЫРЕХЗВЕННОГО РЫЧАЖНОГО МЕХАНИЗМА ПО ДВУМ ЗАДАНЫМ ПОЛОЖЕНИЯМ

Широкое применение плоских шарнирных четырехзвенных механизмов в различных автоматических устройствах и приспособлениях требует дальнейшего развития методов автоматизированного кинематического синтеза, которые на основе современных математических подходов позволят сократить требуемое количество априорной информации и получить точное решение. Используемый подход наилучшего квадратичного приближения функций позволил сформулировать как критерий оптимальности, так и условия его достижения на основе уравнения замыкания векторного контура. Проведенный анализ модели показал, что на ее основе можно оценить наличие сингулярных положений звеньев, при которых возможно самопроизвольное изменение закона движения выходного звена. Численный эксперимент в пакете MathCAD позволил верифицировать методику синтеза по результатам решения задачи кинематического анализа и графическому представлению шатунных кривых.

Ключевые слова: плоский шатунный механизм, кинематический синтез, квадратичное приближение функций, моделирование.

Введение. Плоские четырехзвенные рычажные механизмы используются как исполнительные в различных устройствах и приспособлениях. Например, в механизме поворота велосипеда, в системе открывания гаражных ворот, в механизме рулевого управления и в тормозной системе автомобиля, в устройствах для поворота солнечных панелей, в оборудовании для проведения лапароскопии, в протезах искусственного коленного сустава и так далее, четырехзвенники преобразуют вращение ведущего кривошипа в требуемый закон движения выходного звена.

Несмотря на большое количество методов исследования плоских четырехзвенных механизмов [1–3], вопросы кинематического синтеза, т.е. расчет геометрических размеров звеньев, обеспечивающих заданное непрерывное движение выходного звена при выполнении накладываемых ограничений на рабочую зону и динамических условий передачи движения, до настоящего момента решаются приближенными графоаналитическими методами [4–7]. Применение графических пакетов значительно упрощает процедуру синтеза, но требует достаточно большого времени на уточнение результатов проектирования по итогам решения задач кинематического анализа [4, 8]. В различных постановках задачи синтеза для нахождения неизвестных кинематических параметров механизма в качестве априорной информации требуется три известных положения входного и выходного звеньев, длина входного кривошипа или стойки [1, 2, 9, 10].

Н. И. Левитским [1] установлено, что для нахождения единственного (точного) решения задачи синтеза передаточного четырехзвенного механизма необходимо задать три положения входного и выходного звеньев, в случае известных только двух положений звеньев задача имеет бесчисленное количество возможных решений. Современные методы кинематического синтеза четырехзвенных механизмов [3, 8, 9, 11–16], основанные на аппроксимационном подходе и квадратичном приближении, сводятся к решению системы квадратных уравнений либо к итерационной процедуре решения нескольких систем линейных уравнений, в которых трудно выбрать начальные значения искомого параметров. На практике задача кинематического синтеза усложняется, если необходимо обеспечить требуемую траекторию движения характерной точки, как правило, вершины треугольного звена, основанием которого является шатун четырехзвенника.

В статье рассматривается оптимизационный метод кинематического синтеза плоского кривошипно-шатунного рычажного четырехзвенного механизма, позволяющий автоматизировать расчет геометрических размеров звеньев и сократить число априорной информации. Предлагаемый метод относится к категории методов «аналитического» синтеза, использующих условия наилучшего приближения по Чебышеву [1, 2, 8, 9]. Значения свободных параметров (двух заданных положений входного кривошипа и выходного коромысла, а также длину стойки) задаются произвольно, увеличение их количества приводит к повышению степени полу-

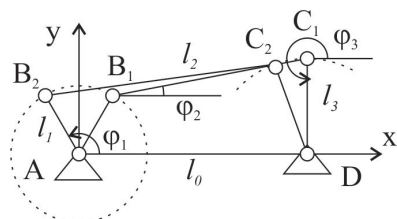


Рис. 1. Схема кривошипно-шатунного четырехзвенника

чаемой аппроксимации, но, как следствие, к усложнению математической модели и метода ее решения.

Постановка задачи. В общем случае при решении задачи кинематического синтеза плоского рычажного четырехзвенного механизма в соответствии с заданными положениями звеньев, конструктивными ограничениями и динамическими показателями качества передачи движения требуется рассчитать его кинематические параметры (длины подвижных звеньев). Следует отметить, что точное воспроизведение той или иной траектории звеньев удастся обеспечить только в некоторых частных случаях, поэтому ограничиваются указанием только нескольких позиций, что значительно упрощает задачу.

Ведущее звено проектируемого механизма — кривошип AB совершает равномерное вращательное движение с постоянной угловой скоростью ω :

$$\omega_1 = \omega t, \quad \omega = const,$$

а коромысло CD совершает колебательное движение между двумя крайними положениями.

Кинематическая схема четырехзвенника изображена на рис. 1. Введем декартовую систему координат xAy с центром, совпадающим с шарниром A и осью абсцисс Ax , направленной вдоль неподвижного звена AD . Координаты неподвижного шарнира $D(x_D, y_D)$ назначаются произвольно на основе требований к габаритам рабочей зоны механизма. Положения входного кривошипа AB и соответствующие положения выходного коромысла CD заданы угловыми координатами $(\varphi_1^1, \varphi_3^1)$ и $(\varphi_2^2, \varphi_3^2)$, откладываемыми относительно оси Ay против часовой стрелки, как показано на рис. 1. Требуется определить значения длин l_1, l_2, l_4 подвижных звеньев AB, BC и CD соответственно так, чтобы обеспечить позиционирование с точностью не менее $\varepsilon = 0,01$ в заданных положениях и полный поворот входного звена AB четырехзвенного механизма.

Основная часть. Расчетная схема синтезируемого плоского передаточного четырехзвенного шарнирного механизма $ABCD$ с учетом принятых в задаче обозначений длин и углов поворота звеньев, а также системы декартовых координат xAy приведена на рис. 1. Исходные данные задачи кинематического синтеза обозначим как l_0 — расстояние между опорными шарнирами A и D и $\varphi_3(\varphi_1)$ — закон движения, описывающий зависимость между значениями углов поворота коромысла CD и кривошипа AB , как $(\varphi_1^1, \varphi_3^1)$ и $(\varphi_2^2, \varphi_3^2)$.

Используя метод В. А. Зиновьева [1, 2], запишем уравнение замкнутого векторного контура $ABCD$:

$$\vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \vec{l}_3 - \vec{l}_0 = 0, \quad (1)$$

где $\vec{l}_0, \vec{l}_1, \vec{l}_2$ и \vec{l}_3 — векторы, направленные вдоль звеньев AD, AB, BC и CD , как показано на рис. 1, равные по модулю геометрическим параметрам проектируемого механизма.

Представим векторы $\vec{l}_0, \vec{l}_1, \vec{l}_2$ и \vec{l}_3 как результат произведения модуля $|\vec{l}_i|$ на единичный вектор $\vec{e}_i, i = 0, \dots, 3$, коллинеарный звеньям AD, BC, CD и AB соответственно, т.е. $\vec{l}_i = |\vec{l}_i| \cdot \vec{e}_i$. Координаты единичных векторов для заданных узлов интерполяции функции положения шарнирного четырехзвенника $ABCD$ с учетом принятых обозначений запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{e}_3^1 &= (\cos \varphi_3^1, \sin \varphi_3^1) \text{ и } \vec{e}_1^1 = (\cos \varphi_1^1, \sin \varphi_1^1); \\ \vec{e}_3^2 &= (\cos \varphi_3^2, \sin \varphi_3^2) \text{ и } \vec{e}_1^2 = (\cos \varphi_1^2, \sin \varphi_1^2). \end{aligned}$$

В терминах задачи для заданного среднего квадратичного приближения функции, уравнение замыкания векторного контура (1) будем использовать для вычисления отклонения от заданных положений:

$$I = (\vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \vec{l}_3 - \vec{l}_0)^2 \rightarrow \min. \quad (2)$$

Подставив в формулу (2) соответствующие выражения для векторов $\vec{l}_0, \vec{l}_1, \vec{l}_2$ и \vec{l}_3 и выполнив замену переменной $z_i = |\vec{l}_i| / |\vec{l}_0|$ с целью сокращения количества неизвестных в задаче, получим итоговую зависимость:

$$\begin{aligned} I = 1 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2z_1z_2\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + \\ + 2z_1z_3\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 + 2z_2z_3\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 - \\ - 2z_1\vec{e}_0 \cdot \vec{e}_1 - 2z_2\vec{e}_0 \cdot \vec{e}_2 - 2z_3\vec{e}_0 \cdot \vec{e}_3 \rightarrow \min, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ — это скалярное произведение единичных векторов, сонаправленных со звеньями проектируемого механизма, $i, j = 0-3$.

Функция I — неотрицательно определенная квадратичная функция переменных z_1, z_2, z_3 , следовательно, достигает своего минимума, необходимым условием существования которого является равенство нулю частных производных:

$$\frac{\partial I}{\partial z_i} = 0, \quad i = \overline{1, 3} \quad (4)$$

Результаты дифференцирования запишем в виде однородной линейной относительно неизвестных z_1, z_2, z_3 системы уравнений:

$$\begin{cases} z_1 + z_2\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + z_3\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 - \vec{e}_0 \cdot \vec{e}_1 = 0; \\ z_2 + z_1\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + z_3\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 - \vec{e}_0 \cdot \vec{e}_2 = 0; \\ z_3 + z_1\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 + z_2\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 - \vec{e}_0 \cdot \vec{e}_3 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Оценку линейной независимости системы (5) и, как следствие, существование единственного нетривиального решения задачи оптимизационного синтеза проверим, вычислив определитель, составленный из коэффициентов при z_1, z_2, z_3 :

$$\begin{aligned} \Delta = \begin{vmatrix} 1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 & 1 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & 1 \end{vmatrix} = \\ = 1 + 2(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) \cdot (\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2) \cdot (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3) - \\ - (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3)^2 - (\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2)^2 - (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2)^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Не нарушая общности рассуждений, предположим, что при некотором сочетании геометрических параметров механизма возможно положение, при котором все подвижные звенья лежат на одной прямой, совпадающей с осью абсцисс xAu , введенной на рис. 1 системы декартовых координат xAu , таким образом, угловые координаты примут следующие значения: $\varphi_3 = 0^\circ$, $\varphi_2 = 180^\circ$ и $\varphi_1 = 180^\circ$. Согласно теории сингулярных положений [3, 6], в процессе движения в рычажном механизме возможны ситуации, при которых происходит самопроизвольное изменение структуры кинематической схемы и, как следствие, закона движения выходного звена за счет наличия зазоров в шарнирах.

Для указанного сочетания значений угловых координат определитель матрицы (6) тождественно равен нулю, таким образом, параметры z_1 , z_2 , z_3 линейно зависимые и рассматриваемая задача кинематического синтеза имеет множество решений.

В качестве дополнительного ограничения на переменные z_1 , z_2 , z_3 можно использовать закон Грасгофа [17], согласно которому существование плоского кривошипно-шатунного четырехзвенного механизма определяется в зависимости от выполнения следующего неравенства:

$$p + q > l + s, \quad (7)$$

где s , l — это геометрические размеры наименьшего (кривошипа) и наибольшего звеньев, а p , q — длины двух других кинематических звеньев.

Сгруппируем уравнения системы (5) следующим образом:

$$\begin{cases} z_2 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + z_3 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_0 \cdot \vec{e}_1 - z_1; \\ z_2 + z_3 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_0 \cdot \vec{e}_2 - z_1 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2. \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} z_2 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + z_3 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_0 \cdot \vec{e}_1 - z_1; \\ z_3 + z_2 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_0 \cdot \vec{e}_3 - z_1 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3. \end{cases} \quad (9)$$

Неизвестными в системах (8) и (9) являются не только скалярные (безразмерные) величины z_1 , z_2 , z_3 , но угловая координата \vec{e}_2 . Разрешив систему (8) методом Крамера относительно неизвестных z_2 и z_3 , получим:

$$z_2 = \frac{(\vec{e}_0 \cdot \vec{e}_1 - z_1) \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 - \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 (\vec{e}_0 \cdot \vec{e}_2 - z_1 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_0)}{(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) \cdot (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3) - \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3}; \quad (10)$$

$$z_3 = \frac{(\vec{e}_0 \cdot \vec{e}_2 - z_1 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_0) \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 - (\vec{e}_0 \cdot \vec{e}_1 - z_1)}{(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) \cdot (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3) - \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3}. \quad (11)$$

Аналогично из системы уравнений (9) запишем выражения для переменных z_2 и z_3 :

$$z_2 = \frac{(\vec{e}_0 \cdot \vec{e}_1 - z_1) - (\vec{e}_0 \cdot \vec{e}_3 - z_1 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3) \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3}{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 - (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3) \cdot (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3)}; \quad (12)$$

$$z_3 = \frac{(\vec{e}_0 \cdot \vec{e}_3 - z_1 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3) \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 (\vec{e}_0 \cdot \vec{e}_1 - z_1)}{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 - (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3) \cdot (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3)}. \quad (13)$$

Попарно приравняв уравнения (10) и (12), (11) и (13), находим аналитические зависимости для расчета неизвестного скалярного параметра z_1 :

$$z_1 = \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 (B \vec{e}_0 \cdot \vec{e}_2 - A \vec{e}_0 \cdot \vec{e}_3) - B \vec{e}_0 \cdot \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3}{(\vec{e}_0 \cdot \vec{e}_1 - \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3) \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 + A}; \quad (14)$$

$$z_1 = \frac{(A - B) \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_0 - \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 (A \vec{e}_0 \cdot \vec{e}_3 - B \vec{e}_0 \cdot \vec{e}_2)}{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 (B \vec{e}_0 \cdot \vec{e}_1 - A \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3) + (A - B)}. \quad (15)$$

где $A = (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) \cdot (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3) - \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3$, $B = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 - (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3) \cdot (\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3)$.

На основе формул (14) и (15) сформируем уравнение относительно единичного вектора $\vec{e}_2 = (\cos \varphi_2, \sin \varphi_2)$:

$$\begin{aligned} & [\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 (B \vec{e}_0 \cdot \vec{e}_2 - A \vec{e}_0 \cdot \vec{e}_3) - B \vec{e}_0 \cdot \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3] \times \\ & \times [\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 (B \vec{e}_0 \cdot \vec{e}_1 - A \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3) + (A - B)] = \\ & = [(A - B) \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_0 - \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 (A \vec{e}_0 \cdot \vec{e}_3 - B \vec{e}_0 \cdot \vec{e}_2)] \times \\ & \times [(\vec{e}_0 \cdot \vec{e}_1 - \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3) \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 + A]. \end{aligned} \quad (16)$$

Для решения итогового тригонометрического уравнения используем заданные положения, для которых известным методом определяются координаты единичных векторов, а именно $\vec{e}_1^1 = (\cos \varphi_1^1, \sin \varphi_1^1)$; $\vec{e}_2^1 = (\cos \varphi_2^1, \sin \varphi_2^1)$ и $\vec{e}_3^1 = (\cos \varphi_3^1, \sin \varphi_3^1)$; $\vec{e}_0^2 = (1, 0)$.

Раскрыв скалярное произведение векторов и сгруппировав элементы уравнения (16), содержащие общий множитель $\sin \varphi_2$ и $\cos \varphi_2$, находим искомый угол $(\varphi_2^1, \varphi_2^2)$ для заданных положений звеньев синтезируемого шарнирного четырехзвенника $ABCD$. Результаты вычислений подставляем в любое из выражений (14) и (15) и вычисляем безразмерный параметр z_1 . Вычислительную процедуру повторяем до тех пор, пока не будет обеспечена требуемая точность аппроксимации, которая может быть оценена следующим образом:

$$|z_1^1 - z_1^2| \leq \varepsilon.$$

Далее рассчитываются остальные неизвестные z_2 и z_3 , и для принятого значения межопорного расстояния l_0 переходим из относительных единиц к абсолютным значениям длин звеньев проектируемого плоского четырехзвенного кривошипно-шатунного механизма.

Численный эксперимент. Эффективность предложенной в работе методики кинематического синтеза продемонстрируем на следующем примере. Предположим, что требуется спроектировать плоский шарнирный четырехзвенный механизм, входное звено которого совершает полный оборот за один цикл работы, длина неподвижного звена которого составляет в условных единицах измерения $l_0 = 50$ согласно обозначениям, принятым на рис. 1, а подвижные звенья AB и CD последовательно проходят два заданных значениями угловых координат положения (φ_1, φ_3) : $(60^\circ, 270^\circ)$ и $(120^\circ, 280^\circ)$.

Аналитические зависимости для расчета угла поворота φ_2 шатуна BC , соответствующего первому заданному положению, составлены и посчитаны в среде MathCAD (рис. 2).

Аналогично производится расчет для второго заданного положения (рис. 3). Далее итерационно уточняются значения, чтобы обеспечить требуемую точность.

Расчетная часть программы дополнена решением задачи кинематического анализа, результаты представлены в виде шатунных кривых для подвижных шарниров B , C и D , а также графического изображения звеньев кинематической схемы в одном из заданных положений (рис. 4).

Аналитические зависимости для расчета угла поворота fi2_1 шатуна BC соответствующего первому заданному положению

$$\begin{aligned} \text{Начальное значение параметра} \quad \text{fi2}_1 &:= \left(\frac{10 \cdot \pi}{180}\right) \\ \text{Единичный вектор } e2, \text{ сонаправленный со звеном BC синтезируемого механизма} \\ e2_1(\text{fi2}_1) &:= (\cos(\text{fi2}_1) \quad \sin(\text{fi2}_1)) \quad e2_1(\text{fi2}_1) = (0.985 \quad 0.174) \\ A1(\text{fi2}_1) &:= (e1_1 \cdot e2_1(\text{fi2}_1)^T) \cdot (e2_1(\text{fi2}_1) \cdot e3_1^T) - e1_1 \cdot e3_1^T \quad A1(\text{fi2}_1) = 0.754 \\ B1(\text{fi2}_1) &:= e2_1(\text{fi2}_1) \cdot e1_1^T - (e3_1 \cdot e1_1^T) \cdot (e3_1 \cdot e2_1(\text{fi2}_1)^T) \quad B1(\text{fi2}_1) = 0.492 \\ C2 &:= (e1_1 \cdot e3_1^T) \cdot [B1(\text{fi2}_1) \cdot (e2_1(\text{fi2}_1) \cdot e0^T) - A1(\text{fi2}_1) \cdot (e3_1 \cdot e0^T)] \\ C1(\text{fi2}_1) &:= C2 \cdot [(e2_1(\text{fi2}_1) \cdot e1_1^T) \cdot [B1(\text{fi2}_1) \cdot (e1_1 \cdot e0^T) - A1(\text{fi2}_1) \cdot (e3_1 \cdot e1_1^T)] + (A1(\text{fi2}_1) - B1(\text{fi2}_1))] \\ D2 &:= (A1(\text{fi2}_1) - B1(\text{fi2}_1)) \cdot (e1_1 \cdot e0^T) - (e2_1(\text{fi2}_1) \cdot e1_1^T) \cdot [A1(\text{fi2}_1) \cdot (e3_1 \cdot e0^T) - B1(\text{fi2}_1) \cdot (e2_1(\text{fi2}_1) \cdot e0^T)] \\ D1(\text{fi2}_1) &:= D2 \cdot [(e1_1 \cdot e0^T - e3_1 \cdot e1_1^T) \cdot (e1_1 \cdot e3_1^T) + A1(\text{fi2}_1)] \\ \text{Уравнение для расчета угла поворота шатуна BC} \\ F1(\text{fi2}_1) &:= C1(\text{fi2}_1) - D1(\text{fi2}_1) \quad F1(\text{fi2}_1) = -0.163 \\ \text{fi2}_1 &:= \text{root}(F1(\text{fi2}_1), \text{fi2}_1) \quad \text{fi2}_1_deg := \text{fi2}_1 \cdot \frac{180}{\pi} \\ \text{fi2}_1 &= 0.4 \quad \text{fi2}_1_deg = 22.934 \end{aligned}$$

Рис. 2. Аналитические зависимости для расчета угла поворота шатуна BC, соответствующего 1-му заданному положению

$$z1 := \frac{(A1(\text{fi2}_1) - B1(\text{fi2}_1)) \cdot (e1_1 \cdot e0^T) - (e2_1(\text{fi2}_1) \cdot e1_1^T) \cdot [A1(\text{fi2}_1) \cdot (e3_1 \cdot e0^T) - B1(\text{fi2}_1) \cdot (e2_1(\text{fi2}_1) \cdot e0^T)]}{(e2_1(\text{fi2}_1) \cdot e1_1^T) \cdot [B1(\text{fi2}_1) \cdot (e1_1 \cdot e0^T) - A1(\text{fi2}_1) \cdot (e3_1 \cdot e1_1^T)] + (A1(\text{fi2}_1) - B1(\text{fi2}_1))}$$

В качестве масштабного коэффициента примем размер стойки - неподвижного звена l0

$$\begin{aligned} l0 &:= 50 & z1 &= 0.231 \\ l1 &:= z1 \cdot l0 & l1 &= 11.551 \\ z2 &:= \frac{(e1_1 \cdot e0^T - z1) \cdot (e2_1(\text{fi2}_1) \cdot e3_1^T) - (e3_1 \cdot e1_1^T) \cdot [e2_1(\text{fi2}_1) \cdot e0^T - (e1_1 \cdot e0^T) \cdot z1]}{(e2_1(\text{fi2}_1) \cdot e1_1^T) \cdot (e3_1 \cdot e2_1(\text{fi2}_1)^T) - (e3_1 \cdot e1_1^T)} & z2 &= 1.068 \\ l2 &:= z2 \cdot l0 & l2 &= 53.391 \\ z3 &:= \frac{[e2_1(\text{fi2}_1) \cdot e0^T - (e1_1 \cdot e0^T) \cdot z1] \cdot (e2_1(\text{fi2}_1) \cdot e1_1^T) - (e1_1 \cdot e0^T - z1)}{(e2_1(\text{fi2}_1) \cdot e1_1^T) \cdot (e3_1 \cdot e2_1(\text{fi2}_1)^T) - e3_1 \cdot e1_1^T} & z3 &= 0.673 \\ l3 &:= z3 \cdot l0 & l3 &= 33.64 \end{aligned}$$

Рис. 3. Аналитические зависимости для расчета угла поворота шатуна BC, соответствующего 2-му заданному положению

Построение кинематической схемы механизма в заданном положении и траекторий точек

Координаты точки B	Диагональ BD	
$xB(\text{fi1}) := 11 \cdot \cos(\text{fi1})$	$l(\text{fi1}) := \sqrt{(l1^2 + l0^2) - 2 \cdot l1 \cdot l0 \cdot \cos(\text{fi1})}$	$\delta(\text{fi1}) := \text{atan}\left(\frac{l1 \cdot \sin(\text{fi1})}{l0 - l1 \cdot \cos(\text{fi1})}\right)$
$yB(\text{fi1}) := 11 \cdot \sin(\text{fi1})$	$\lambda(\text{fi1}) := \text{acos}\left(\frac{l(\text{fi1})^2 + l3^2 - l2^2}{2 \cdot l(\text{fi1}) \cdot l3}\right)$	$\gamma(\text{fi1}) := \pi - \delta(\text{fi1}) - \lambda(\text{fi1})$
Координаты точки C	Координаты средней точки шатуна BC	
$xC(\text{fi1}) := l0 + l3 \cdot \cos(\gamma(\text{fi1}))$	$xS(\text{fi1}) := 0.5 \cdot xC(\text{fi1}) + 0.5 \cdot xB(\text{fi1})$	
$yC(\text{fi1}) := l3 \cdot \sin(\gamma(\text{fi1}))$	$yS(\text{fi1}) := 0.5 \cdot yC(\text{fi1}) + 0.5 \cdot yB(\text{fi1})$	

Для некоторого наперед заданного значения угла поворота входного кривошипа определим положение всех точек механизма для того, чтобы изобразить их на диаграмме. Массивы X={xA, xB, xS, xC, xD} и Y={yA, yB, yS, yC, yD}

$$\begin{aligned} \text{fi} &:= 120 \cdot \text{deg} \\ X_0 &:= 0 & X_1 &:= xB(\text{fi}) & X_2 &:= xS(\text{fi}) & X_3 &:= xC(\text{fi}) & X_4 &:= l0 \\ Y_0 &:= 0 & Y_1 &:= yB(\text{fi}) & Y_2 &:= yS(\text{fi}) & Y_3 &:= yC(\text{fi}) & Y_4 &:= 0 \end{aligned}$$

Рис. 4. Аналитические зависимости для построения кинематической схемы механизма

Результаты расчетов, представленные на рис. 5, подтверждают, что синтезирован кривошипно-шатунный четырехзвенный механизм, который обеспечивает позиционирование выходного коромысла CD в двух заданных положениях.

Заключение. В статье рассматривается плоский четырехзвенный шарнирный механизм, широ-

ко используемый как исполнительный механизм в различных приспособлениях и устройствах. Задача кинематического синтеза таких механизмов заключается в определении геометрических параметров — длин кинематических звеньев, при заданных ограничениях на рабочую зону и показателях качества передачи движения. Проведенный анализ

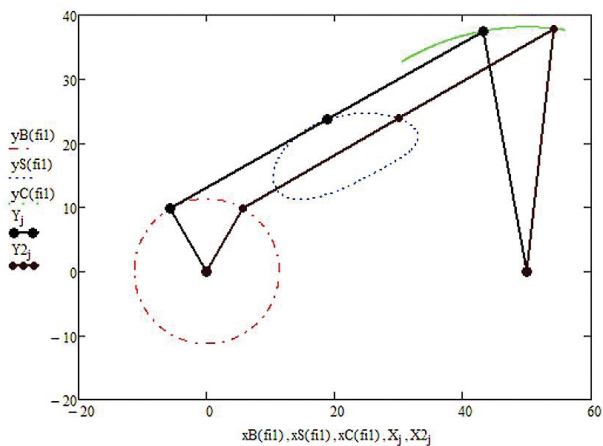


Рис. 5. Кинематическая схема синтезированного четырехзвенного механизма

научной литературы показал, что для решения проблемы расчета параметров четырехзвенных механизмов широко используются графические методы, в аппроксимационной постановке задача имеет множество возможных решений.

Предложенная методика оптимизационного синтеза плоских четырехзвенных рычажных механизмов использует известное уравнение замкнутого векторного контура, на основе которого в соответствии с методологией среднеквадратичного приближения функций сформирован критерий оптимальности. Исходя из условия существования минимума полученного критерия, сформирована система линейных уравнений относительно неизвестных геометрических размеров. Установлено, что определитель матрицы коэффициентов принимает нулевое значение при определенном сочетании угловых координат, описывающих положение подвижных звеньев механизма. Данное обстоятельство свидетельствует о наличии линейной зависимости между неизвестными, что подтверждается законом Грасгофа. Таким образом, задача кинематического синтеза многовариантна и решается итерационно до тех пор, пока не будет обеспечена заданная точность аппроксимации.

Численный пример синтеза, реализованный средствами MathCAD, показал эффективность процедуры и хорошую сходимость. Выполненный кинематический анализ плоского четырехзвенного кривошипно-шатунного механизма для рассчитанных значений длин звеньев доказал его работоспособность, т.е. существование в виде замкнутого контура на всем диапазоне изменения угла поворота входного кривошипа, а также выполнение заданных в процессе синтеза требований к передаче движения.

Библиографический список

1. Артоболевский И. И., Левитский Н. И., Черкудинов С. А. Синтез плоских механизмов. М.: Физматгиз, 1959. 1084 с.
2. Пейсах Э. Е. Кинематический синтез рычажных механизмов / Машиностроение: энцикл.: в 40 т. М., 1995. Т. I-3, кн. 2. С. 395–430. ISBN 5-217-01952-2.
3. McCarthy J. M., Soh G. S. Geometric design of linkages. Springer Science & Business Media, 2011. 448 p.
4. Burmester L. [et al.]. Über die Geradföhrung durch das Kurbelgetriebe // Der Civilingenieur. 1876. Т. 22. S. 597–606.
5. Schoenflies A. Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung. BG Teubner, 1886. 194 S.

6. Бейер Р. Кинематический синтез механизмов. Основы теории метрического синтеза механизмов / пер. с нем. Я. Л. Геронимуса. М.: Машгиз, 1959. 318 с.

7. Зиялиев К. Ж., Чинбаев О. К., Дюшембаев Ж. Ж. Структурный анализ и синтез шарнирно-рычажных механизмов методами аналитической геометрии // Известия вузов Кыргызстана. 2016. № 5. С. 103–106.

8. Gassmann V. Synthese von Geradföhrungen mit ebenen Viereckgetrieben. Hamburg: Universität der Bundeswehr Diss, 2000. 102 p.

9. Sarkissyan Y. L. Approximations in Synthesis of Mechanisms // State Engineering University of Armenia Proceedings. Series Mechanics, Machine Science, Machine-building. 2012. Issue 15, no. 2. P. 9–21.

10. Верховод В. П. Использование программы Mathcad при синтезе передаточных рычажных механизмов // Теория механизмов и машин. 2011. № 1 (9). С. 69–76.

11. Williams II R. L., Reinholtz C. F. Proof of Grashof's Law Using Polynomial Discriminant // Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation Design. 1986. Vol. 108. P. 562–564.

12. Гебель Е. С., Джомартов А. А., Синчев Б. Синтез четырехзвенных рычажных механизмов на основе метода оптимизации // Омский научный вестник. 2011. № 2 (100). С. 58–60.

13. Зиновьев В. А. Аналитические методы определения положения механизмов высоких классов // Труды семинара по теории машин и механизмов. М., Л., 1949. Вып. 22. С. 61–74.

14. Соболев А. Н., Некрасов А. Я., Арбузов М. О. [и др.]. Совершенствование средств расчёта и моделирования кулачковых механизмов станков в cad-системах // Современные исследования в области технических и естественных наук: сб. тр. конф. Белгород: Агентство перспективных научных исследований, 2017. С. 234–238. ISBN 978-5-9500092-7-3

15. Мацюк И. Н., Шляхов Э. М. Исследование плоских стержневых механизмов сложной структуры методами векторной алгебры // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2015. Т. 3, № 7 (75). С. 34–38.

16. Гебель Е. С., Абдираимов А. А., Солонин Е. В. Кинематика четырехзвенных пространственных ползуновых механизмов // Омский научный вестник. 2015. № 2 (140). С. 49–54.

17. Erdman A. G., Sandor G. N. Mechanism Design. Analysis and Synthesis. 3rd Ed. Prentice Hall, 2001. Vol. 1. 666 p.

ГЕБЕЛЬ Елена Сергеевна, кандидат технических наук, заведующая кафедрой «Автоматизация и робототехника».

SPIN-код: 1256-0879

ORCID: 0000-0003-1811-8755

AuthorID (SCOPUS): 55574609100

ResearcherID: O-4211-2014

Адрес для переписки: gebel_es@mail.ru

ЧИГРИНОВА Екатерина Александровна, ассистент кафедры «Автоматизация и робототехника».

SPIN-код: 8266-8770

ORCID: 0000-0001-6913-9324

ResearcherID: W-1992-2017

Адрес для переписки: k_ea23@mail.ru

Для цитирования

Гебель Е. С., Чигринова Е. А. Оптимизационный кинематический синтез четырехзвенного рычажного механизма по двум заданным положениям // Омский научный вестник. 2020. № 3 (171). С. 21–25. DOI: 10.25206/1813-8225-2020-171-21-25.

Статья поступила в редакцию 13.04.2020 г.

© Е. С. Гебель, Е. А. Чигринова