

ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, МЕТРОЛОГИЯ И ИНФОРМАЦИОННО- ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ ПРИБОРЫ И СИСТЕМЫ

УДК 535.8

DOI: 10.25206/1813-8225-2021-175-55-58

В. И. ГУЖОВ
И. О. МАРЧЕНКО
Е. Е. ТРУБИЛИНА
А. А. ТРУБИЛИН

Новосибирский государственный
технический университет,
г. Новосибирск

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ СИГНАЛОВ С ПОМОЩЬЮ КОНЕЧНОГО НАБОРА АПЕРТУР

В статье рассмотрен вопрос дискретизации непрерывных сигналов с помощью конечного набора апертур. С помощью аппарата обобщенных функций получен аналитический вид спектра функции для дискретизации с помощью решетки Дирака для бесконечного и ограниченного сигнала и с помощью ограниченного набора апертур. Показано, что спектр сигнала является произведением спектра сигнала при идеальной дискретизации на некоторый известный множитель, влияние которого можно устранить. Вид этого множителя можно получить, если известен вид апертуры. Полученное аналитическое выражение отличается от известных в литературе.

Аналитическое выражение спектра функции при дискретизации может быть использовано для восстановления исходного изображения с помощью различных наборов апертур. Для этого необходимо разделить Фурье-спектр дискретизированного изображения на множитель, зависящий от выбранной апертуры. Получив от него обратное Фурье-преобразование, можно получить исходное.

Ключевые слова: идеальная дискретизация, решетка Дирака, дискретизация в реальных системах, обобщенные функции, преобразование Фурье, спектр.

Введение. Непрерывный аналоговый сигнал можно представить дискретной последовательностью его значений (отсчетов). Эти отсчеты берутся в точках, отделенных друг от друга некоторым интервалом Δx , который называется интервалом дискретизации. Теорема Уиттекера – Котельни-

кова – Шеннона (Whittaker – Kotelnikov – Shannon) определяет условия, при которых спектр одиночного сигнала можно выделить без искажений и затем по ним восстановить исходный сигнал [1–4]. Однако интерполяция с помощью ряда подразумевает бесконечное число отсчетов.

Дискретизацию сигналов удобно описывать с помощью обобщенных функций. В конце XIX века Хэвисайд ввёл систему символических правил для анализа процессов в электрических цепях. Ему пришлось ввести так называемую функцию включения — функцию Хэвисайда. Позднее, в конце 20-х годов XX в., физик Дирак в исследованиях по квантовой механике ввёл ещё одну новую функцию, названную его именем. Были определены также правила дифференцирования дельта-функции Дирака и функции Хэвисайда. Основы математической теории обобщённых функций были заложены С. Л. Соболевым при решении задачи Коши для гиперболических уравнений (1937 г.). В 50-х годах Л. Шварц дал систематическое изложение теории обобщённых функций и построил теорию их преобразования Фурье [5–9]. Понятие обобщённой функции удается ввести благодаря тому, что обобщённые функции никогда не входят непосредственно в результаты измерений. Они всегда фигурируют под знаком интеграла, описывающего стадию наблюдения или регистрации. Поэтому достаточно знать только результат действия данной обобщённой функции на интегральное преобразование.

После выхода «Теории распределений» Л. Шварца обобщенные функции приобрели широкую популярность. Однако особенности их использования в инженерной деятельности, в частности в оптике, являются до сих пор недостаточно понятными.

Будем обозначать действие обобщенной функции на основную функцию следующим образом [7]:

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)dx. \quad (1)$$

Выражение (1) можно рассматривать как скалярное произведение двух функций «хорошей» функции $f(x)$ и обобщенной $\phi(x)$.

С помощью обобщенных функций удобно рассматривать процесс дискретизации аналоговых сигналов.

Дискретизация — это замена непрерывного аналогового сигнала последовательностью чисел, представляющих разложение этого сигнала по какому-либо конечномерному базису. Дискретизация заключается в получении отсчетов (*sampling*) сигнала. Наиболее удобным способом дискретизации является представление сигнала в виде выборки значений (отсчетов) в отдельных, регулярно расположенных точках, отделенных друг от друга интервалом, который называется интервалом дискретизации.

Разработка математического аппарата представления дискретных сигналов является важной проблемой при восстановлении исходных аналоговых изображений [10–14].

Целью этой статьи является получение аналитического выражения для спектра непрерывной функции при реальной дискретизации, т.е. при дискретизации сигналов при усреднении на конечном наборе апертур.

Дискретизация бесконечной функции с помощью решетки Дирака. Идеальную дискретизацию можно представить как воздействие на функцию гребенки Дирака, которая определяется как последовательность смещённых с шагом Δx дельта-функций. Гребёнка Дирака определяется как

$$\text{comb}_{\Delta x}(x) = \begin{cases} \infty, & \text{в точках } (n\Delta x), \quad n = (-\infty, \infty) \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}. \quad (2)$$

Как видно, гребенка Дирака — периодическая функция, где Δx — период. Кроме этого, гребенка Дирака определена на всем интервале от $-\infty$ до ∞ . Она, так же как и дельта-функция, на всей оси x равна нулю, кроме точек $n\Delta x$, в которых гребенка Дирака устремляется в бесконечность.

Действие гребенки Дирака на функцию $f(x)$ можно описать как

$$\begin{aligned} \langle f(x), \text{comb}_{\Delta x}(x) \rangle &= \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - n\Delta x)dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta x). \end{aligned} \quad (3)$$

Спектр дискретной функции будет являться периодическим повторением спектра непрерывной функции [15]. Периодическую функцию можно описать как свертку гребенки Дирака с функцией одного периода. Поэтому спектр дискретной функции можно записать как [16]

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) &= \mathfrak{Z}(f(n\Delta x)) = \mathfrak{Z}(f(x)) \otimes \mathfrak{Z}(\text{comb}_{\Delta x}(x)) = \\ &= \mathfrak{Z}(f(x)) \otimes \text{comb}_{\frac{2\pi}{\Delta x}}(\omega). \end{aligned} \quad (4)$$

Спектр дискретных значений сигнала образует периодически повторяющиеся одиночные спектры с шагом $\frac{2\pi}{\Delta x}$, которые в общем случае перекрываются между собой. В [17] предложена процедура восстановления исходного сигнала по ограниченному числу дискретных значений, при которой возможно значительное уменьшение погрешности интерполяции.

Дискретизация ограниченной функции. Поскольку функция в общем случае не является бесконечной, ограниченную функцию можно представить в виде

$$f_N(x) = f(x) \cdot \text{rect}_N(x), \quad (5)$$

где $\text{rect}_N(x)$ — прямоугольный импульс.

В спектральной области это приведет к свертке сигнала с функцией $\text{sinc}\left(\frac{\omega N}{2}\right)$, которая является фурье-образом прямоугольного импульса

$$\mathfrak{Z}(f_N(x)) = \mathfrak{Z}(f(x)) \otimes \text{sinc}\left(\frac{\omega N}{2}\right). \quad (6)$$

Учитывая (4), в результате дискретизации ограниченного сигнала с помощью гребенки Дирака возникает периодическое повторение спектров

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}(f_N(n\Delta x)) &= \\ &= \left(F(\omega) \otimes \text{sinc}\left(\frac{\omega N}{2}\right) \right) \otimes \text{comb}_{\frac{2\pi}{\Delta x}}(\omega). \end{aligned} \quad (7)$$

Однако дискретизация функций с помощью дельта функций является математической абстракцией.

Рассмотрим вопрос дискретизации с помощью конечного набора некоторых апертур.

Дискретизация с помощью набора апертур. В этом случае дискретизация осуществляется измерением сигнала с помощью датчика с некоторой конечной апертурой (площадкой, по которой происходит усреднение). Числовые значения отсчетов

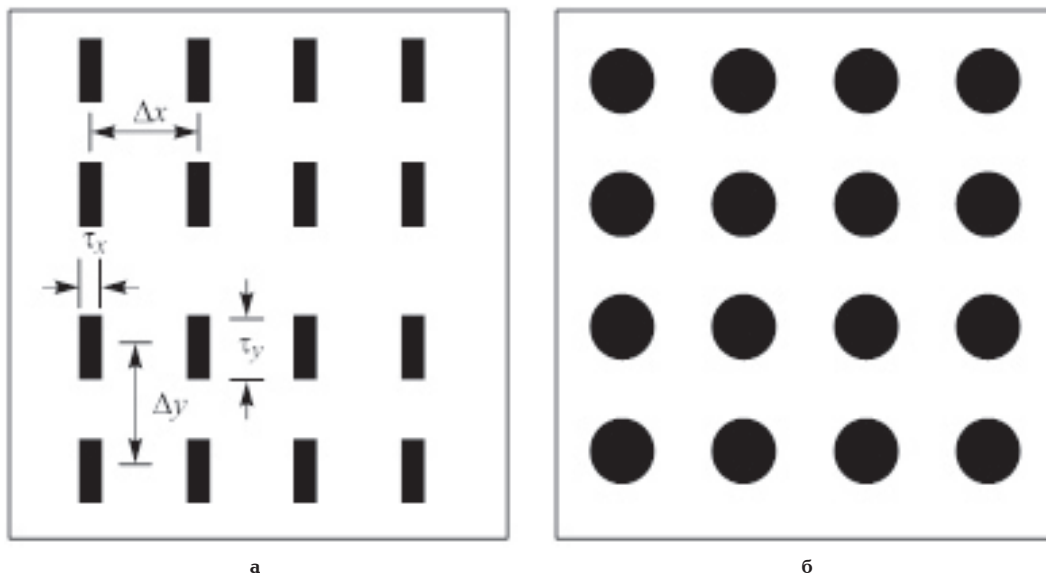


Рис. 1. Примеры растров: а — регулярный растр с прямоугольной апертурой; б — с круглой апертурой

изображения получаются путем пространственного интегрирования по некоторой конечной площадке (апертуре). Используются апертуры различных форм (например, эллиптические, ромбовидные, гексагональные), но наиболее часто используются апертуры прямоугольной и круглой формы (рис. 1).

Определим действие нормированного прямоугольного импульса $P_\tau(x) = \text{rect}_\tau(x)$ на функцию $f(x)$

$$f_p(x) = \langle f(x), \text{rect}_\tau(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \text{rect}_\tau(x) dx = \int_{x=x-\tau/2}^{x+\tau/2} f(x) dx. \quad (8)$$

Выражение (7) описывает усреднение значения функции на одном элементе апертуры. Действие смещенного прямоугольного импульса $\text{rect}_\tau(x - k\Delta x)$ на функцию $f(x)$

$$f_p(k\Delta x) = \langle f(x), P_{\tau, \Delta x}^N(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \text{rect}_\tau(x - k\Delta x) dx = \int_{x=k\Delta x - \tau/2}^{k\Delta x + \tau/2} f(x) dx. \quad (9)$$

Для каждой точки — ($\Delta x=1$), это выражение представляет дискретную свертку.

$$f_s(k) = \sum_{m=-\tau/2}^{\tau/2} f(k) \cdot \text{rect}_\tau(k - m) = f(k) \otimes \text{rect}_\tau(k). \quad (10)$$

Таким образом, в результате дискретизации с помощью конечного набора прямоугольных апертур произойдет усреднение значений интенсивности на прямоугольных апертурах, и результаты усреднения на каждой апертуре будут задаваться в массиве чисел.

В области Фурье выражение для дискретизации примет следующий вид:

$$F_{\tau, \Delta x}(\omega) = \left[F(\omega) \otimes \text{sinc}\left(\frac{\omega N}{2}\right) \right] \times \text{comb}_{\frac{2\pi}{\Delta x}}(\omega). \quad (11)$$

В отличие от идеальной дискретизации (7) спектр функции дополняется множителем $\mathfrak{Z}(\text{rect}_\tau(x))$, который несложно определить аналитически.

Вид этого множителя зависит только от формы апертуры. В нашем случае рассмотрение велось для прямоугольной апертуры, но при замене на $\mathfrak{Z}(\text{circ}_\tau(x))$ выражение будет верно и для регулярных круговых растров.

Обсуждение результатов. В литературе [18, 19] часто используется следующее выражение для спектра функции при реальной дискретизации:

$$F_{\tau, \Delta x}(\omega_x) = \frac{1}{2\pi} \mathfrak{Z}(f(x)) \otimes \left[\mathfrak{Z}(\text{rect}_\tau(x)) \cdot \text{comb}_{\frac{2\pi}{\Delta x}}(\omega) \right]. \quad (12)$$

Это выражение было получено из описания дискретизированного сигнала в виде.

$$f_p(k\Delta x) = f(x) \cdot P_{\tau, \Delta x}^N, \quad (13)$$

где $P_{\tau, \Delta x}^N = \text{rect}_\tau(x) \otimes \text{comb}_{\Delta x} = \sum_{k=0}^N \text{rect}_\tau(x - k\Delta x)$ дискретизирующая функция.

Однако выражение (13) не учитывает интегрирование по площади апертуры. Поэтому и выражение (12) неадекватно описывает поведение спектра в случае реальной дискретизации функции.

Нами эта проблема рассматривалась в [6], но аналитического выражения для дискретизации ограниченной функции с помощью конечного набора апертур получить не удалось. В [7] приведено правильное аналитическое выражение, но вывод этого выражения был не совсем корректен.

Заключение. В статье получено аналитическое выражение (11) для спектра ограниченного аналогового сигнала при дискретизации с помощью набора апертур. Показано, что, в отличие от идеальной дискретизации, сигнал умножается на Фурье-образ используемой апертуры.

Выражение (11) может быть использовано для восстановления исходного изображения по дискретному изображению, полученному с помощью различных наборов апертур. Для этого необходимо разделить Фурье-спектр дискретного изображения на Фурье-спектр выбранной апертуры. Получив

от него обратное Фурье-преобразование, можно получить исходное.

Библиографический список

1. Котельников В. А. О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи // Успехи физических наук. 2006. Т. 176, № 7. С. 762–770. DOI: 10.3367/UFNr.0176.200607h.0762. Репр. воспроизведение изд. [Москва]: [ред. упр. связи РККА], [1933] (Центр. тип. им. К. Ворошилова). 19 с. (Материалы к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности. По Радиосекции / Всесоюз. энергетич. ком.).
2. Nyquist H. Certain topics in telegraph transmission theory // Transactions of AIEE. 1928. Vol. 47. P. 617–644.
3. Wittaker E. T. On the function which are represented by the expansion of interpolating theory // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1915. Vol. 35. P. 181–194.
4. Shannon C. E. Communication in the presence of noise // Proc. Institute of Radio Engineers. 1949. Vol. 37, no. 1. P. 10–21. DOI: 10.1109/JRPROC.1949.232969.
5. Schwartz L. Theorie des distributions. 1997. 432 p. ISBN 9782705655518, 2705655514.
6. Шварц Л. Математические методы для физических наук. Москва: Мир, 2005. 230 с.
7. Гельфанд И. М., Шилев Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959. 470 с.
8. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. 2-е изд., испр. и доп. Москва: Наука, 1979. 318 с.
9. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Москва: Наука, 1988. 333 с.
10. Поршнев С. В., Кусайкин Д. В. О точности восстановления периодических дискретных сигналов конечной длительности с помощью ряда Котельникова // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2016. Т. 10, № 11. С. 4–8.
11. Поршнев С. В., Кусайкин Д. В. Исследование алгоритмов восстановления дискретных сигналов, заданных на неравномерной временной сетке с неизвестными значениями координат узлов: моногр. Ульяновск: Зебра, 2016. 211 с. ISBN 978-5-9907771-1-8.
12. Зиятдинов С. И. Восстановление сигнала по его выборкам на основе теоремы отсчетов Котельникова // Известия вузов. Приборостроение. 2010. № 5. С. 44–47.
13. Троценков А. И. Теорема Котельникова – Шеннона и практическое использование целых функций для представления сигнала на приемной стороне // Ракетно-космическое приборостроение и информационные системы. 2018. Т. 5, вып. 1. С. 81–85. DOI: 10.30894/issn2409-0239.2018.5.1.81.85.
14. Vaswani N., Zhan J. Recursive recovery of sparse signal sequences from compressive measurements: A review // IEEE Trans. Signal Process. 2016. Vol. 64, no. 13. P. 3523–3549. DOI: 10.1109/TSP.2016.2539138.
15. Гужов В. И., Марченко И. О., Хайдуков Д. С., Ильиных С. П. Дискретизация изображений в реальных системах с помощью обобщенных функций // Автоматика и программная инженерия. 2016. № 4 (18). С. 45–52.
16. Гужов В. И., Марченко И. О., Хайдуков Д. С., Ильиных С. П. Использование обобщенных функций для дискретизации изображений // Инженерный вестник Дона: электрон. науч. журн. 2017. № 2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/pl4u2017/4127 (дата обращения: 10.08.2020).
17. Гужов В. И., Трубилина Е. Е., Марченко И. О. Восстановление сигналов по дискретным значениям с ограниченным числом идеальных отсчетов // Научный вестник Новосибирского государственного технического университета. 2020. № 1 (78). С. 147–156. DOI: 10.17212/1814-1196-2020-1-147-156.
18. Pratt W. K. Digital Image Processing: PIKS Inside. 3rd Ed. New York: John Wiley & Sons Inc., 2001. 758 p. ISBN 978-0-471-37407-2001.
19. Прэнт У. Цифровая обработка изображений. В 2 кн. / пер. с англ. под ред. Д. С. Лебедева. Москва: Мир, 1982. Кн. 1. 312 с.

ГУЖОВ Владимир Иванович, доктор технических наук, профессор (Россия), профессор кафедры «Системы сбора и обработки данных».

SPIN-код: 6116-7131

AuthorID (РИНЦ): 111678

AuthorID (SCOPUS): 6603882920

Адрес для переписки: vigguzhov@gmail.com

МАРЧЕНКО Илья Олегович, кандидат технических наук, доцент (Россия), доцент кафедры «Системы сбора и обработки данных».

SPIN-код: 7744-1591

AuthorID (РИНЦ): 583134

AuthorID (SCOPUS): 57193877973

Адрес для переписки: i.o.marchenko@gmail.com

ТРУБИЛИНА Екатерина Евгеньевна, ассистент кафедры «Системы сбора и обработки данных».

Адрес для переписки: silver-kate94@mail.ru

ТРУБИЛИН Александр Александрович, аспирант кафедры «Системы сбора и обработки данных».

Адрес для переписки: aatrubilin@gmail.com

Для цитирования

Гужов В. И., Марченко И. О., Трубилина Е. Е., Трубилин А. А. Дискретизация сигналов с помощью конечного набора апертур // Омский научный вестник. 2021. № 1 (175). 2021. С. 55–58. DOI: 10.25206/1813-8225-2021-175-55-58.

Статья поступила в редакцию 17.10.2020 г.

© В. И. Гужов, И. О. Марченко, Е. Е. Трубилина,

А. А. Трубилин