

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАЦЕПЛЕНИЯ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОФИЛЯ ЗУБЬЕВ ВОЛНОВОГО ТОРЦЕВОГО КИНЕМАТИЧЕСКОГО РЕДУКТОРА

Проблема создания волнового торцевого кинематического редуктора с многопарным зацеплением выдвигает на первый план круг вопросов в области геометро-кинематической теории зацепления, которые рассматриваются в данной работе. Синтез многопарного зацепления для волнового торцевого кинематического редуктора, обеспечивающего постоянство их передаточной функции, предусматривает: разработку математической модели зацепления с учетом особенностей взаимодействия зубьев при пространственно-сферическом движении; описание профиля зубьев системой уравнений на сферическую поверхность и на нормальное сечение зубьев для внутреннего зацепления; выявление с помощью программы MathCAD 2010 Professional математического эксперимента и определение области существования 100 %-го многопарного сопряжения зубьев путем сравнения формы их профиля с характером аналитической функции многопарного зацепления.

Ключевые слова: многопарное зацепление, пространственно-сферическое движение, волновой торцевой кинематический редуктор, профиль зуба, передаточное отношение.

Введение. Повышение долговечности и надежности, нагрузочной способности, КПД, кинематической точности и виброакустических показателей при одновременном снижении их массы и габаритов являются одним из наиболее важных требований, которые необходимо учитывать при проектировании редукторов [1, 2].

Проблема создания новых видов редукторов и систем зацеплений является особо актуальной в настоящее время. При решении этой задачи существенный эффект может быть достигнут за счет применения вместе обычных зубчатых передач с неподвижными осями планетарных зубчатых механизмов с разветвлением потока мощности или новых систем многопарных зацеплений с использованием принципа равномерного распределения нагрузки между сопряженными зубьями [1, 3].

Вследствие компактности и малой массы представляют интерес кривошипно-конические передачи, в которых шестерня совершает сложное пространственно-сферическое движение. Однако эти передачи не нашли широкого применения из-за непостоянства передаточной функции, связанного с особенностями пространственно-сферического движения шестерни и технологическими трудностями, в частности, с нарезанием зубьев конических колес с внутренним зацеплением. Кроме того, наличие трения скольжения в зацеплении, приводящее к

скачкообразности вращения, а также ограничение многопарного сопряжения зубьев обуславливают их низкую кинематическую точность и надежность [4, 5].

Очевидно, что большинство недостатков, присущих кривошипно-коническим передачам, обусловлено применением внутреннего конического зацепления, не учитывающего многогранность особенностей взаимодействия зубьев с пространственно-сферическим движением [6, 7].

Анализ современных тенденций совершенствования систем зацеплений, числовой характеристики и требований потребителей к техническому уровню выпускаемых редукторов показал целесообразность исследования и разработки планетарно-прецессионных передач с новым видом многопарного зацепления [8].

Многопарное зацепление обеспечивает повышение несущей способности, улучшение энергетических показателей, повышение кинематической точности, снижение уровня напряжений в контакте и улучшение геометро-гидродинамических условий смазки взаимодействующих зубьев и др., поэтому применение волнового торцевого кинематического редуктора с многопарным зацеплением в силовых приводах машин является весьма эффективным [9].

Высокая кинематическая точность волнового торцевого кинематического редуктора с выпуск-

ло-вогнутым профилем зубьев, их компактность и широкий диапазон передаточных функций, а также возможность полного устранения зазоров в зацеплении и даже создание некоторого преднатяга делают выгодным их применение в исполнительных приводах промышленных роботов и манипуляторов, в металлорежущих станках и других изделиях, требующих высокой точности позиционирования рабочих органов [10].

Специфика пространственно-сферического движения шестерни волнового торцевого кинематического редуктора позволяет решать одну из основных проблем герметизации — передавать движение в абсолютно герметизированное пространство через сплошную непроницаемую стенку, что открывает широкие перспективы их применения в вакуумной технике, химической и атомной промышленности, космическом и авиационном аппаратостроении [11].

Постановка задачи. Цель исследования — разработка волнового торцевого кинематического редуктора с выпукло-вогнутым контактом зубьев, учитывая кинематику взаимодействия зубьев и особенности преобразования движения. Излагаются требования и условия существования многопарного зацепления.

Для достижения цели необходимо решить следующие задачи:

- разработку математической модели зацепления с учетом особенностей взаимодействия зубьев при пространственно-сферическом движении шестерни редуктора;

- описание профиля зубьев системой уравнений на сферическую поверхность и на нормальное сечение зубьев для внутреннего зацепления.

Теория. Постоянно растущие потребности потребителей механических трансмиссий по увеличению мощности трансмиссии, уменьшению массы и габаритов и т. д. могут быть удовлетворены по двум направлениям развития, а именно путем создания новых типов механических трансмиссий, основанных на новых принципах работы, и/или путем увеличения несущей способности контакта зубьев шестерни, например, выпукло-вогнутого контакта [1, 12].

На рис. 1 представлена принципиальная схема волнового торцевого кинематического редуктора, состоящего из четырех элементов: генератора (входного вала) 1, выполненного в виде кривошипного валика; шестерни в виде двухвенечного блока 3, состоящей из двух конических колес внутреннего зацепления и свободно вращающихся на кривошипном валике; неподвижного конического колеса 2 с наружным зацеплением и подвижного конического колеса 4, жестко связанного с выходным валиком 5. Левый зубчатый конический венец 2 блока 3 находится в зацеплении с неподвижным коническим колесом 2, а правый зубчатый венец 3 этого блока — с подвижным коническим колесом 4 [13].

Разница в количестве зубьев зубчатых колес и сопряженных зубьев шестерни составляет ± 1 . В рассматриваемом волновом торцевом кинематическом редукторе делительные конусы зубчатых колес 2, 3 и 4 имеют общую вершину, расположенную в точке O и лежащую на оси передачи [14, 15].

При вращении генератора 1 шестерня 3 совершает сферическое движение относительно точки O посредством обкатывания зубьев венца 2 по зубьям неподвижного колеса 2. Зацепляясь одновременно зубьями венца 3 с зубьями колеса 4, шестерня 3

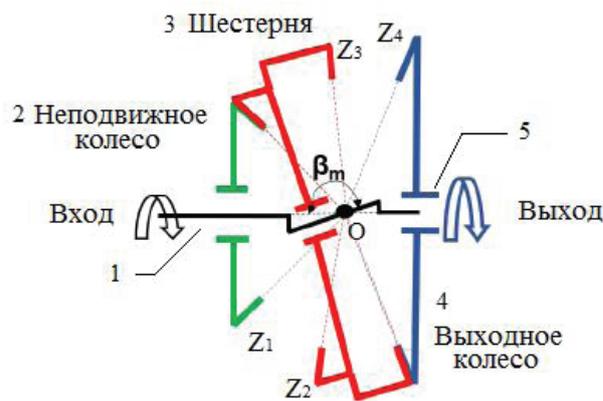


Рис. 1. Структурная схема волнового торцевого кинематического редуктора

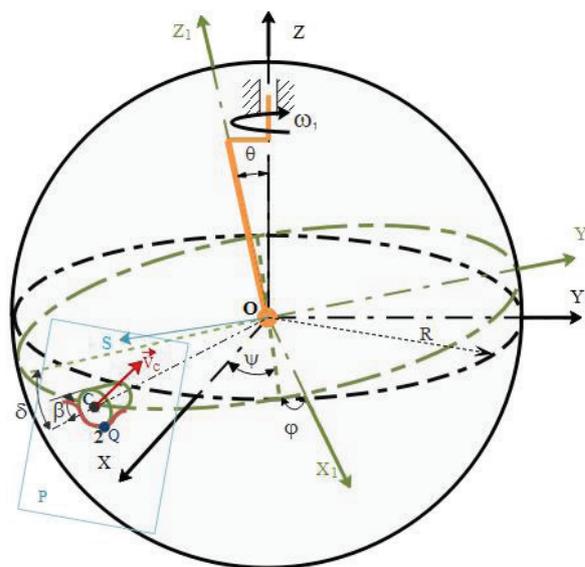


Рис. 2. Описание сферического движения шестерни волнового торцевого кинематического редуктора

передает вращение зубчатому колесу 4, жестко соединенному ведомым валиком 5.

Как известно [7], тело, совершающее сферическое движение, имеет три степени свободы. Следовательно, положение такого тела относительно неподвижной системы координат $OXYZ$ может быть определено тремя параметрами. В теоретической механике [7], как правило, положение тела, совершающего сферическое движение, определяют при помощи углов Эйлера. Для этого свяжем жестко систему координат $OX_1Y_1Z_1$ с шестерней (рис. 2)

Применительно к волновому торцевому кинематическому редуктору угол ψ — это угол прецессии (угол поворота ведущего вала), угол θ — угол нута́ции (угол наклона кривошипного участка ведущего вала к оси ведомого вала), ϕ — угол собственного вращения шестерни вокруг собственной геометрической оси.

Осуществляем переход от координат точек шестерни X_1, Y_1, Z_1 , заданных в подвижной системе координат $OX_1Y_1Z_1$, к координатам X, Y, Z тех же точек в неподвижной системе $OXYZ$ по формулам [16, 17]

$$X = \alpha_{11}X_1 + \alpha_{12}Y_1 + \alpha_{13}Z_1; \quad Y = \alpha_{21}X_1 + \alpha_{22}Y_1 + \alpha_{23}Z_1;$$

$$Z = \alpha_{31}X_1 + \alpha_{32}Y_1 + \alpha_{33}Z_1, \quad (1)$$

где X, Y, Z — координаты произвольной точки шестерни относительно неподвижной системы координат $OXYZ$;

X_1, Y_1, Z_1 — координаты той же точки шестерни относительно системы координат $OX_1Y_1Z_1$;

$\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}$ — косинусы углов между осью OX и соответственно осями OX_1, OY_1, OZ_1 ;

$\alpha_{21}, \alpha_{22}, \alpha_{23}$ — косинусы углов между осью OY и соответственно осями OX_1, OY_1, OZ_1 ;

$\alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{33}$ — косинусы углов между осью OZ и соответственно осями OX_1, OY_1, OZ_1 .

Тогда

$$\alpha_{11} = (\vec{i} \vec{i}_1); \alpha_{12} = (\vec{i} \vec{j}_1); \alpha_{13} = (\vec{i} \vec{k}_1);$$

$$\alpha_{21} = (\vec{j} \vec{i}_1); \alpha_{22} = (\vec{j} \vec{j}_1); \alpha_{23} = (\vec{j} \vec{k}_1);$$

$$\alpha_{31} = (\vec{k} \vec{i}_1); \alpha_{32} = (\vec{k} \vec{j}_1); \alpha_{33} = (\vec{k} \vec{k}_1),$$

где $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ — единичные векторы вдоль осей OX, OY, OZ соответственно; $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ — единичные векторы вдоль осей OX_1, OY_1, OZ_1 соответственно.

Используя формулы (1), а также учитывая, что

$$\begin{aligned} (\vec{i} \vec{i}) &= (\vec{j} \vec{j}) = (\vec{k} \vec{k}) = 1; (\vec{i} \vec{j}) = \\ (\vec{i} \vec{k}) &= (\vec{j} \vec{i}) = (\vec{j} \vec{k}) = (\vec{k} \vec{i}) = (\vec{k} \vec{j}) = 0. \end{aligned}$$

Находим

$$X = X_1(\cos\psi \cos\varphi - \sin\psi \cos\theta \sin\varphi) + Y_1(\cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\theta \cos\varphi) + Z_1(\sin\psi \sin\theta);$$

$$Y = X_1(\sin\psi \cos\varphi - \cos\psi \cos\theta \sin\varphi) - Y_1(\sin\psi \sin\varphi - \cos\psi \cos\theta \cos\varphi) - Z_1(\cos\psi \sin\theta);$$

$$Z = X_1 \sin\theta \sin\varphi + Y_1 \sin\theta \cos\varphi + Z_1 \cos\theta. \quad (2)$$

В пространственно-сферическом движении шестерни волнового торцевого кинематического редуктора между углом прецессии ψ и углом собственного вращения φ имеется определенная связь. Для нахождения этой связи пусть в некоторый момент времени шестерня занимает такое положение, чтобы зуб шестерни контактировал с впадиной зуба в точке Q (рис. 2).

Подвижная система $OX_1Y_1Z_1$ выбрана так, что ось зуба шестерни OC лежит в плоскости OY_1Z_1 и составляет угол δ с осью OY_1 . Так как зуб шестерни должен перемещаться без скольжения по рабочей профилю зубьев неподвижного входного колеса 1, то скорость точки Q зуба, находящегося в соприкосновении с неподвижным входным колесом 1, должна быть равной нулю, т.е. $\vec{v}_Q = 0$.

Но точка Q принадлежит зубу 2, который совершает пространственно-сферическое движение, поэтому $\vec{v}_Q = \vec{\omega} \cdot \vec{OQ}$,

где $\vec{\omega}$ — мгновенная угловая скорость сферического движения шестерни,

\vec{OQ} — радиус-вектор точки Q .

Следовательно, связь между углами φ и δ находим, используя условие

$$\vec{v}_Q = \vec{\omega} \cdot \vec{OQ} = 0. \quad (3)$$

Поскольку сферическое движение шестерни может быть представлено как результат сложений трёх вращений вокруг пересекающихся осей [18], а именно вращение вокруг оси OZ с угловой скоростью $\psi' \cdot \vec{k}$, вращение вокруг линии узлов ON с угловой скоростью $\theta' \cdot \vec{i}_1$, вращение вокруг оси OZ_1 с угловой скоростью $\varphi' \cdot \vec{k}_1$, то

$$\vec{\omega} = \psi' \cdot \vec{k} + \theta' \cdot \vec{i}_1 + \varphi' \cdot \vec{k}_1,$$

где ψ', θ', φ' — производные по времени от углов Эйлера.

Так как для рассматриваемого редуктора

$$\varphi = \text{const}, \text{ то } \theta' = 0 \text{ и } \vec{\omega} = \psi' \cdot \vec{k} + \varphi' \cdot \vec{k}_1. \quad (4)$$

Подставим (4) в (3), найдем

$$\psi'(\vec{k} \cdot \vec{OQ}) + \varphi'(\vec{k}_1 \cdot \vec{OQ}) = 0. \quad (5)$$

Векторные произведения $(\vec{k} \cdot \vec{OQ})$ и $(\vec{k}_1 \cdot \vec{OQ})$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} (\vec{k} \cdot \vec{OQ}) &= \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ k_{x_1} & k_{y_1} & k_{z_1} \\ (\vec{OQ})_{x_1} & (\vec{OQ})_{y_1} & (\vec{OQ})_{z_1} \end{vmatrix}, \\ (\vec{k}_1 \cdot \vec{OQ}) &= \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ k_{1x_1} & k_{1y_1} & k_{1z_1} \\ (\vec{OQ})_{x_1} & (\vec{OQ})_{y_1} & (\vec{OQ})_{z_1} \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $k_{x_1}, k_{1x_1}, k_{y_1}, k_{1y_1}, k_{z_1}, k_{1z_1}, (\vec{OQ})_{x_1}, (\vec{OQ})_{y_1}, (\vec{OQ})_{z_1}$ — соответственно проекции векторов $\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{OQ}$ на осях OX_1, OY_1, OZ_1 .

В нашем случае

$$\begin{aligned} k_{x_1} &= 0; \quad k_{y_1} = \sin\theta; \quad k_{z_1} = \cos\theta; \\ k_{1x_1} &= 0; \quad k_{1y_1} = \sin\theta; \quad k_{1z_1} = \cos\theta; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} (\vec{OQ})_{x_1} &= 0; \quad (\vec{OQ})_{y_1} = -OQ \cos(\beta + \delta); \\ (\vec{OQ})_{z_1} &= -OQ \sin(\beta + \delta). \end{aligned}$$

Подставив (7) в (6), после раскрытия определителей получим

$$\begin{aligned} k \cdot \vec{OQ} &= \vec{i}_1 \cdot \vec{OQ} \cos(\beta + \delta) = \vec{i}_1 \cdot R_1; \\ k_1 \cdot \vec{OQ} &= \vec{i}_1 \cdot \vec{OQ} \cos(\beta + \delta) = \vec{i}_1 \cdot R_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Затем, подставив (8) в (5), найдем

$$\begin{aligned} \psi'(\vec{i}_1 \cdot R_1) + \varphi'(\vec{i}_1 \cdot R_2) &= 0 \Rightarrow \vec{i}_1(\psi' \cdot R_1 + \varphi' \cdot R_2) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \psi' \cdot R_1 + \varphi' \cdot R_2 &= 0 \Rightarrow \varphi' = -\frac{R_1}{R_2} \psi'. \end{aligned}$$

Так как $\frac{R_1}{R_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$, где R_1, R_2, Z_1, Z_2 — соответственно радиусы сопряженных колес и число их зубьев, то $\varphi' = -\frac{Z_1}{Z_2} \psi'$ и, следовательно,

$$\varphi = -\frac{Z_1}{Z_2} \psi. \quad (9)$$

Положение точки C оси зуба (рис. 3) в подвижной системе координат $OX_1Y_1Z_1$ определяется координатами

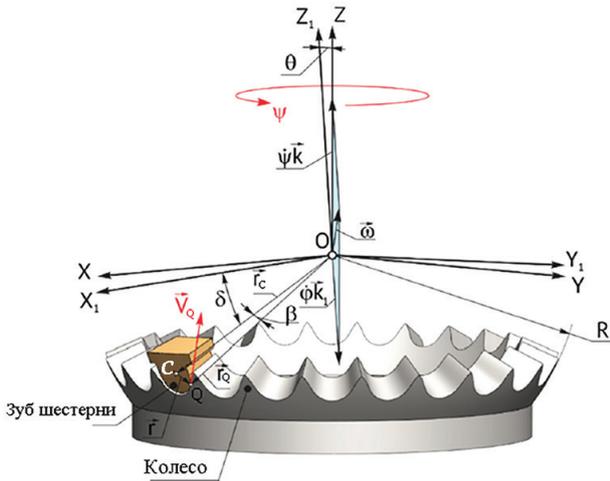


Рис. 3. Векторная диаграмма векторного расположения точек контакта скоростей на профиле зуба колеса и шестерни

$$X_{1c} = 0; Y_{1c} = -R \cos \delta; Z_{1c} = -R \sin \delta, \quad (10)$$

где R — расстояние от точки C до центра прецессии O ; δ — угол между осью зуба шестерни и плоскостью, проходящей через центр O перпендикулярно оси шестерни.

Подставляя (10) в (2) и учитывая (9), получаем координаты точки C в зависимости от угла поворота ведущего вала ψ

$$\begin{aligned} v_{Cx} &= R\psi' \cos \delta \left[\begin{aligned} &\left(\sin \psi \sin \left(\frac{Z_1}{Z_2} \psi \right) - \left(\frac{Z_1}{Z_2} \right) \cos \psi \cos \left(\frac{Z_1}{Z_2} \psi \right) \right) + \\ &\left(+ \cos \psi \cos \left(\frac{Z_1}{Z_2} \psi \right) \cos \theta - \left(\frac{Z_1}{Z_2} \right) \sin \psi \sin \left(\frac{Z_1}{Z_2} \psi \right) \cos \theta \right) \end{aligned} \right] - R\psi' \sin \delta \cdot \cos \psi \cdot \sin \theta; \\ v_{Cy} &= -R\psi' \cos \delta \left[\begin{aligned} &\left(\cos \psi \sin \left(\frac{Z_1}{Z_2} \psi \right) + \left(\frac{Z_1}{Z_2} \right) \sin \psi \cos \left(\frac{Z_1}{Z_2} \psi \right) \right) - \\ &\left(- \sin \psi \cos \left(\frac{Z_1}{Z_2} \psi \right) \cos \theta - \left(\frac{Z_1}{Z_2} \right) \cos \psi \sin \left(\frac{Z_1}{Z_2} \psi \right) \cos \theta \right) \end{aligned} \right] - R\psi' \sin \delta \cdot \sin \psi \cdot \sin \theta; \\ v_{Cz} &= R\psi' \left(\frac{Z_1}{Z_2} \right) \cos \delta \cdot \sin \left(\frac{Z_1}{Z_2} \psi \right) \cdot \sin \theta, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\psi' = \omega_1$ — угловая скорость ведущего вала.

Для определения положения точки контакта зубьев на сферической поверхности найдем уравнение плоскости P , перпендикулярной скорости \vec{v}_C и проходящей через точки S и O . Уравнение искомой плоскости запишем в виде

$$[\overline{OC} \cdot \overline{OS}] \cdot \vec{v}_C = 0, \quad (13)$$

где \overline{OC} и \overline{OS} — векторы, определяющие соответственно положение точек C центра зуба и произвольной точки S плоскости относительно начала системы координат $OXYZ$ (рис. 2).

Представим векторное произведение $[\overline{OC} \cdot \overline{OS}]$ в виде определителя третьего порядка и раскроем его по элементам первой строки. Тогда получим

$$\begin{aligned} X_C &= R \cos \delta \left[\begin{aligned} &\left(- \cos \psi \sin \left(\frac{Z_1}{Z_2} \psi \right) + \right. \\ &\left. + \sin \psi \cos \left(\frac{Z_1}{Z_2} \psi \right) \cos \theta \right) \end{aligned} \right] - \\ &- R \sin \delta \cdot \sin \psi \cdot \sin \theta; \\ Y_C &= -R \cos \delta \left[\begin{aligned} &\left(\sin \psi \sin \left(\frac{Z_1}{Z_2} \psi \right) + \right. \\ &\left. + \cos \psi \cos \left(\frac{Z_1}{Z_2} \psi \right) \cos \theta \right) \end{aligned} \right] + \\ &+ R \sin \delta \cdot \cos \psi \cdot \sin \theta; \\ Z_C &= -R \cos \delta \cdot \cos \left(\frac{Z_1}{Z_2} \psi \right) \sin \theta - \\ &- R \sin \delta \cdot \cos \theta. \end{aligned} \quad (11)$$

Точка C движется по сферической поверхности радиуса R с центром прецессии в точке O (рис. 3). Зная траекторию движения центра зуба, находим положение точки его контакта с зубом входного колеса, совокупность семейства которых за цикл прецессии представляет собой профиль зубьев этого колеса.

Точка контакта зубьев при любом угловом положении ведущего вала расположена на расстоянии радиуса ролика r по нормали к вектору скорости центра зуба шестерни \vec{v}_C (рис. 3). Поэтому для описания профиля зубьев колеса находим проекции вектора скорости центра ролика \vec{v}_C на подвижные оси координат. С этой целью про дифференцируем по времени уравнения (11) и найдем

$$\begin{aligned} [\overline{OC} \cdot \overline{OS}] &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_C & Y_C & Z_C \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i}(Y_C Z - Z_C Y) + \vec{j}(Z_C X - X_C Z) + \vec{k}(X_C Y - Y_C X), \end{aligned} \quad (14)$$

где X_C, Y_C, Z_C — координаты точки C зуба; X, Y, Z — координаты точки S плоскости P . Используя (14), аналогично расписываем векторное уравнение (13)

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ Y_C Z - Z_C Y & Z_C X - X_C Z & X_C Y - Y_C X \\ v_{Cx} & v_{Cy} & v_{Cz} \end{vmatrix} = 0. \quad (15)$$

Или

$$v_{c_z}(Z_c X - X_c Z) - v_{c_y}(X_c Y - Y_c X) = 0;$$

$$v_{c_x}(X_c Y - Y_c X) - v_{c_z}(Y_c Z - Z_c Y) = 0;$$

$$v_{c_y}(Y_c Z - Z_c Y) - v_{c_x}(Z_c X - X_c Z) = 0.$$

Последнее уравнение из (15) есть следствие двух предыдущих, поэтому принимаем его за уравнение искомой плоскости.

Теперь найдем координаты точки контакта зубьев шестерни с зубьями колеса, т.е. точки Q , принадлежащей одновременно плоскости P и сфере радиуса R с центром в начале системы координат $OXYZ$ (рис. 3). Так как точка T принадлежит плоскости, то ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости P , т.е.

$$(Z_c X_Q - X_c Z_Q)v_{c_x} - (Y_c Z_Q - Z_c Y_T)v_{c_y} = 0. \quad (16)$$

Поскольку точка Q принадлежит и сфере, то ее координаты удовлетворяют уравнению сферы, т.е.

$$X_Q^2 + Y_Q^2 + Z_Q^2 - R^2 = 0. \quad (17)$$

Кроме того, угол между \overline{OC} и \overline{OQ} является углом раствора конических зуба, следовательно, $\overline{OQ} \times \overline{OC} = R^2 \cos \beta$, или

$$X_Q X_C + Y_Q Y_C + Z_Q Z_C - R^2 \cos \beta = 0 \quad (18)$$

Из (17) находим

$$X_Q = \frac{R^2 \cos \beta - Y_Q Y_C - Z_Q Z_C}{X_C}. \quad (19)$$

Подставим (19) в (16), найдем

$$Y_Q = \frac{[X_C(X_C \cdot v_{c_x} + Y_C \cdot v_{c_y}) + Z_C^2 \cdot v_{c_x}]}{(X_C \cdot v_{c_y} - Y_C \cdot v_{c_x}) Z_C} Z_Q - \frac{R^2 \cos \beta \cdot v_{c_x}}{(X_C \cdot v_{c_y} - Y_C \cdot v_{c_x})} \Rightarrow Y_Q = k_1 Z_Q - d_1, \quad (20)$$

где введены обозначения

$$k_1 = \frac{[X_C(X_C \cdot v_{c_x} + Y_C \cdot v_{c_y}) + Z_C^2 \cdot v_{c_x}]}{(X_C \cdot v_{c_y} - Y_C \cdot v_{c_x}) Z_C};$$

$$d_1 = \frac{R^2 \cos \beta \cdot v_{c_x}}{(X_C \cdot v_{c_y} - Y_C \cdot v_{c_x})}.$$

Подставив (20) в (19), получим

$$X_Q = \frac{R^2 \cos \beta - (k_1 Z_Q - d_1) Y_C - Z_Q Z_C}{X_C} = \frac{(k_1 Y_C + Z_C) Z_Q + (R^2 \cos \beta + d_1 Y_C)}{X_C} \Rightarrow X_Q = k_2 Z_Q - d_2. \quad (21)$$

Где введены обозначения

$$k_2 = \frac{(k_1 Y_C + Z_C)}{X_C}; \quad d_2 = \frac{(R^2 \cos \beta + d_1 Y_C)}{X_C}.$$

Подставив (20) и (21) в (17) и решив полученное уравнение относительно Z_Q , найдем

$$Z_Q = \frac{(k_1 d_1 - k_2 d_2)}{k_1^2 + k_2^2 + 1} - \frac{\sqrt{(k_1 d_1 - k_2 d_2)^2 + (k_1^2 + k_2^2 + 1)(R^2 - d_1^2 - d_2^2)}}{k_1^2 + k_2^2 + 1}. \quad (22)$$

Итак, определяем по формулам (20), (21) и (22) координаты точки контакта зубьев Q , совокупность которых представляет собой профиль зубьев входного колеса на сфере.

Чтобы представить профиль зубьев колес в нормальном сечении, мы спроектируем со сферы на плоскость P_1 , перпендикулярную зубу (рис. 2).

Для этого сначала определяем координаты точек Q_1 и Q_2 (рис. 2), соответствующие двум последовательным минимумам кривой профиля на сфере.

Выберем в плоскости P_1 систему координат $Q_1 \tau \lambda$, ось $Q_1 \tau$ которой проходит через точку Q_2 .

Проекцию профиля зубьев со сферы на плоскости P_1 находим путем определения координат точек Q_N пересечения с этой плоскостью семейства прямых, проходящих через центр прецессии O , и соответствующих точек профиля зубьев на сфере.

И после ряда преобразований получаем проекцию на плоскость профиля зубьев колеса, определяемую декартовыми координатами, через которые перейдем от координат $X_{N'} Y_{N'} Z_{N'}$ к координатам τ, λ :

$$\tau = \frac{[(Q_1 Q_2)^2 + (Q_1 Q_N)^2 - (Q_2 Q_N)^2]}{2(Q_1 Q_1)};$$

$$\lambda = \sqrt{(Q_1 Q_N)^2 - \tau^2}, \quad (23)$$

где

$$(Q_1 Q_2)^2 = (X_{Q_2} - X_{Q_1})^2 + (Y_{Q_2} - Y_{Q_1})^2 + (Z_{Q_2} - Z_{Q_1})^2;$$

$$(Q_1 Q_N)^2 = (X_N - X_{Q_1})^2 + (Y_N - Y_{Q_1})^2 + (Z_N - Z_{Q_1})^2;$$

$$(Q_2 Q_N)^2 = (X_N - X_{Q_2})^2 + (Y_N - Y_{Q_2})^2 + (Z_N - Z_{Q_2})^2.$$

Теперь находим параметрические уравнения кривой, которую описывает ось зуба шестерни на плоскости P_1 . Обозначим через $X_{G'}$, $Y_{G'}$, $Z_{G'}$ координаты точки пересечения оси, проходящей через центр зуба с плоскостью P_1 . Легко заметить, что координаты $X_{G'}$, $Y_{G'}$, $Z_{G'}$ определяются по тем же формулам, что и $X_{N'}$, $Y_{N'}$, $Z_{N'}$, только следует $X_{Q'}$, $Y_{Q'}$, $Z_{Q'}$ заменить соответственно на $X_{G'}$, $Y_{G'}$, $Z_{G'}$ т.е. переход от координат $X_{G'}$, $Y_{G'}$, $Z_{G'}$ к координатам осуществляем согласно формулам

$$\tau_1 = \frac{[(Q_1 Q_2)^2 + (Q_1 Q_G)^2 - (Q_2 Q_G)^2]}{2(Q_1 Q_1)};$$

$$\lambda_1 = \sqrt{(Q_1 Q_G)^2 - \tau_1^2}, \quad (24)$$

где

$$(Q_1 Q_2)^2 = (X_{Q_2} - X_{Q_1})^2 + (Y_{Q_2} - Y_{Q_1})^2 + (Z_{Q_2} - Z_{Q_1})^2;$$

$$(Q_1 Q_G)^2 = (X_G - X_{Q_1})^2 + (Y_G - Y_{Q_1})^2 + (Z_G - Z_{Q_1})^2;$$

$$(Q_2 Q_G)^2 = (X_G - X_{Q_2})^2 + (Y_G - Y_{Q_2})^2 + (Z_G - Z_{Q_2})^2.$$

Зависимость λ_1 от τ_1 представляет собой траекторию движения центра зуба шестерни на плоскости P_1 .

Зависимость $\lambda = f(\tau)$ представляет собой огибающую кривую множества дуг окружностей радиусом R , центры которых расположены на траектории движения точки C , описываемой уравнением $\lambda_1 = f(\tau_1)$.

Анализ зависимостей (19), (20) и (22) показывает, что на форму профиля зубьев существенно влияют: угол конического аксоида зубьев δ , угол при вращении конуса роликов β , число зубьев Z и угол нутации θ . Выявление степени направленности влияния этих параметров на профиль зубьев осуществляется графоаналитически, для этого по полученным формулам (23) и (24) разработан алгоритм на программе «MathCAD 2010 Professional».

Первоначально описаны на сфере траектория движения произвольной точки оси зуба шестерни

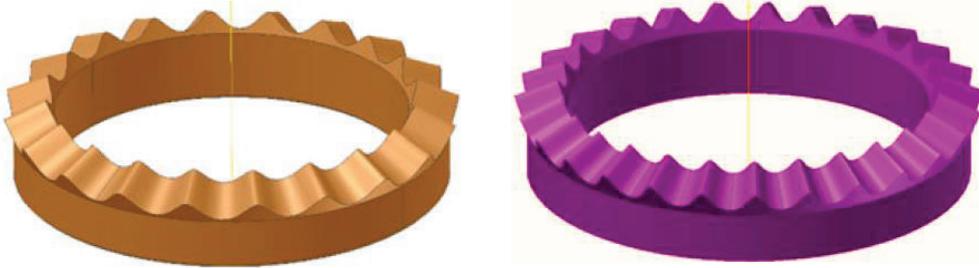


Рис. 4. Твёрдотельная модель центрального колеса

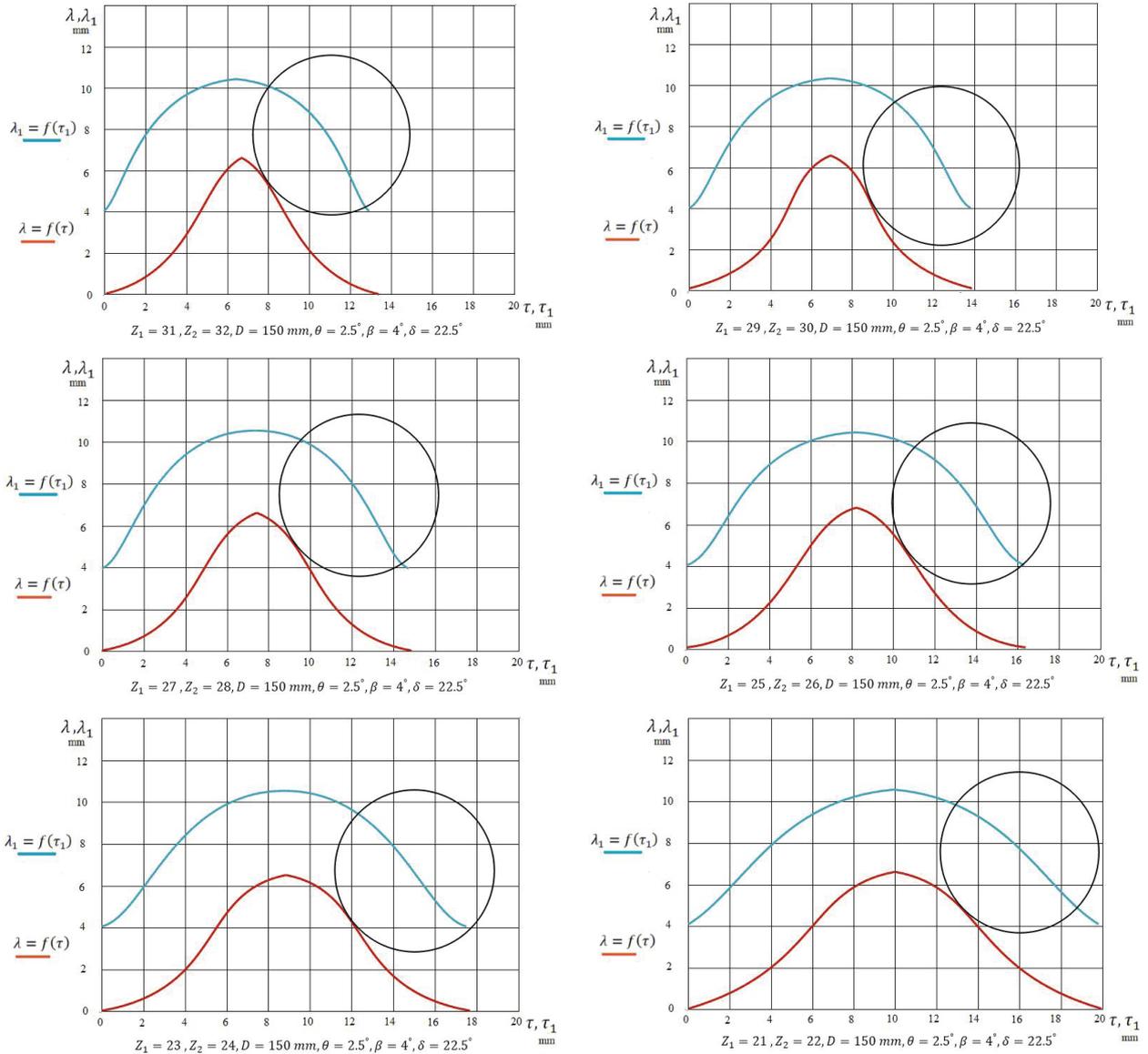
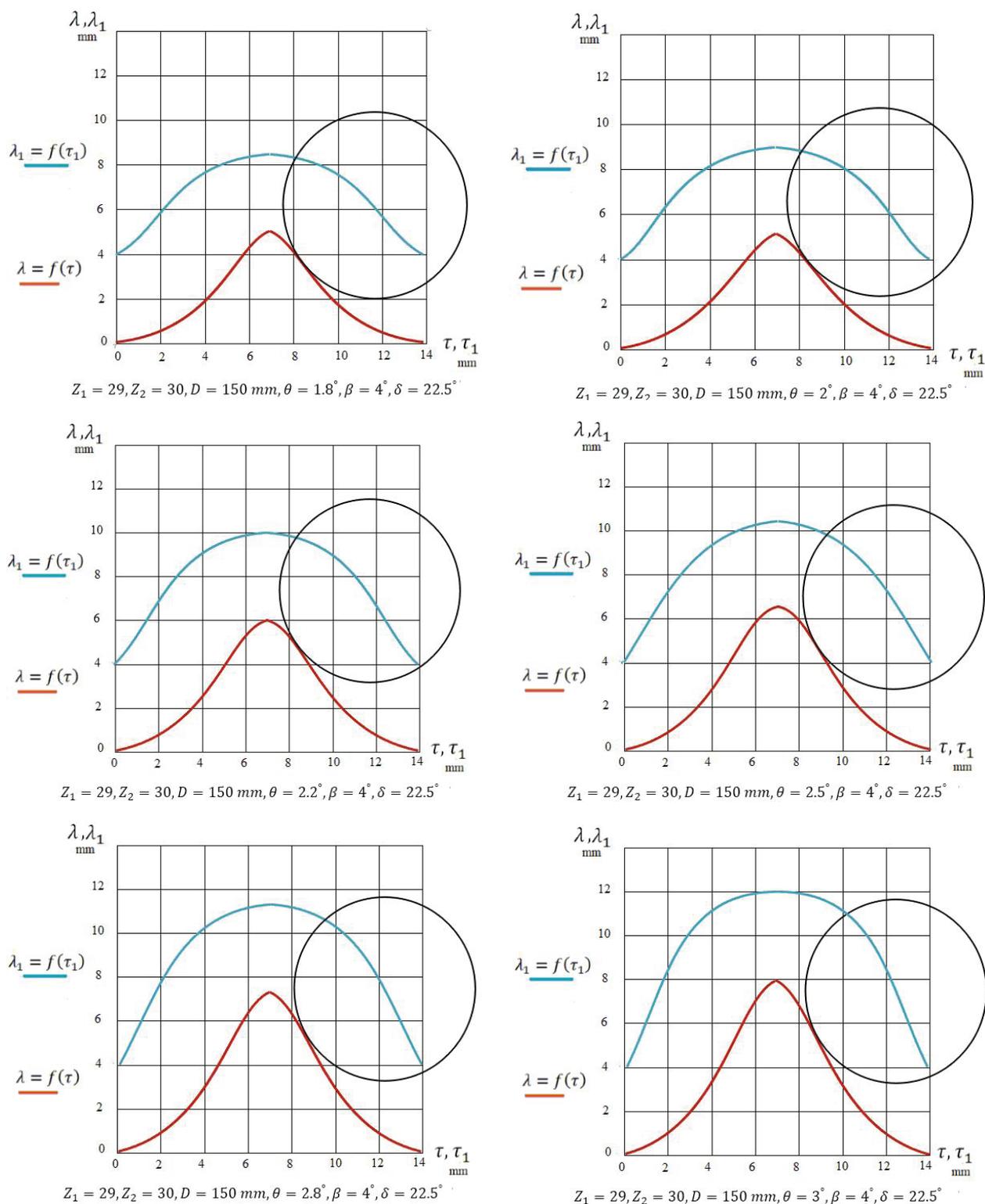


Рис. 5. Влияние числа зубьев на их профиль

Рис. 6. Влияние угла нутации θ на профиль зубьев

С (рис. 3) и профиль зуба колеса параметрическими уравнениями (см. уравнения (2), (19), (20) и (22)).

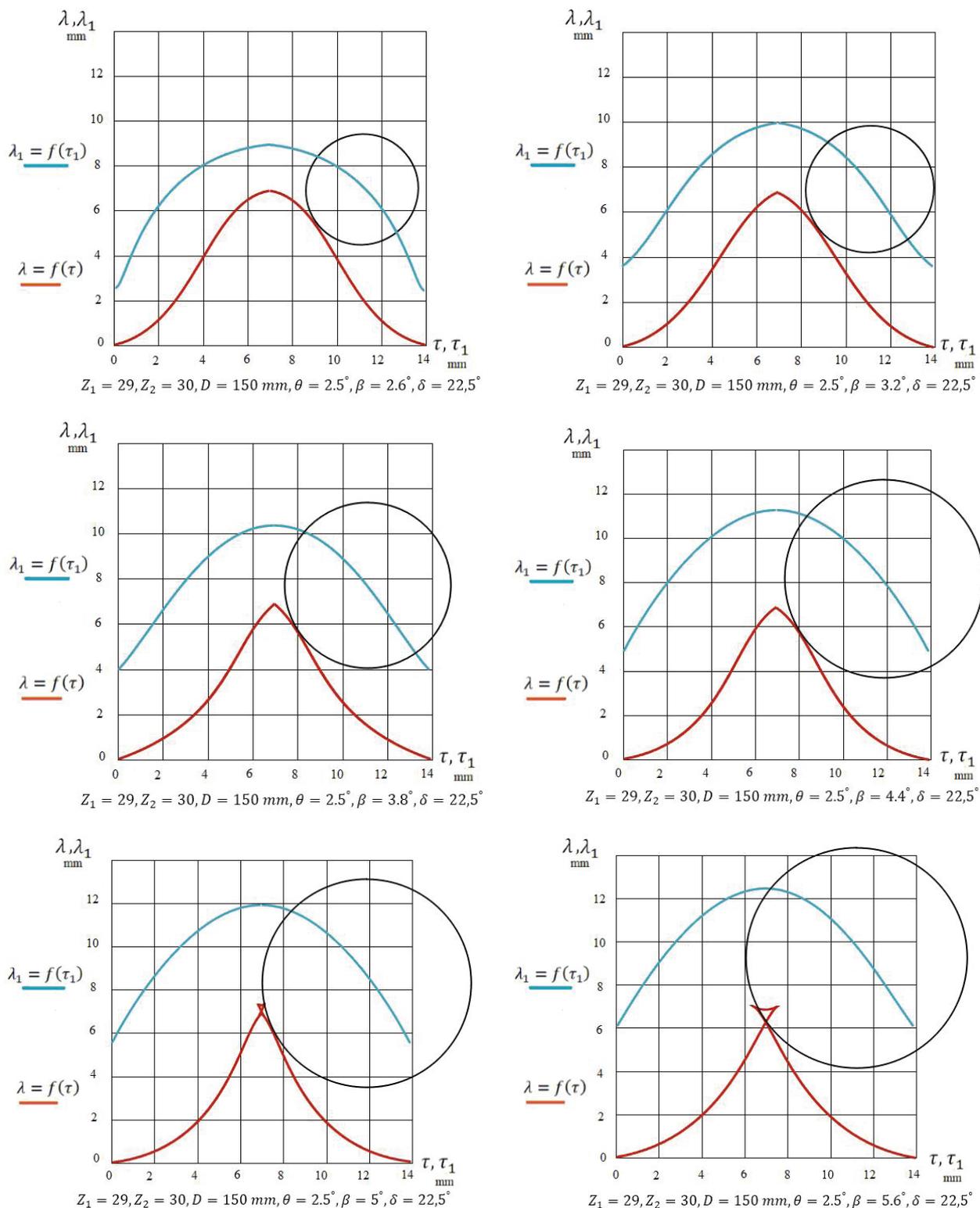
Результаты экспериментов. Графическое построение функций $\lambda = f(\tau)$ и $\lambda_1 = f(\tau_1)$ осуществлялось в совмещенных координатах $\lambda_1 \lambda - \tau_1 \tau$ при значениях угла прецессии $0 \leq \psi \leq 2\pi$, т.е. при одном обороте ведущего вала. При этих значениях ψ уравнениями (24) описывается профиль одного зуба колеса.

В программе MathCAD 2010 Professional был создан широкий спектр модифицированных профилей зубьев с различными геометрическими параметрами

(рис. 5–8). Твёрдотельная модель шестерни показана на рис. 4.

Обсуждение результатов. Результаты расчетов по уравнениям, описывающим профиль зуба на сфере, дает определенную погрешность, так как в этом случае профиль зуба представляет его развертку со сферы на плоскость. Профиль зуба в развертке не дает полного представления о его форме, а тем более о характере влияния на его геометрических параметров зацепления [19].

Анализ профилей, показанных на рис. 5, свидетельствует о том, что при β, θ, δ и $Z_2 = \text{const}$ диа-

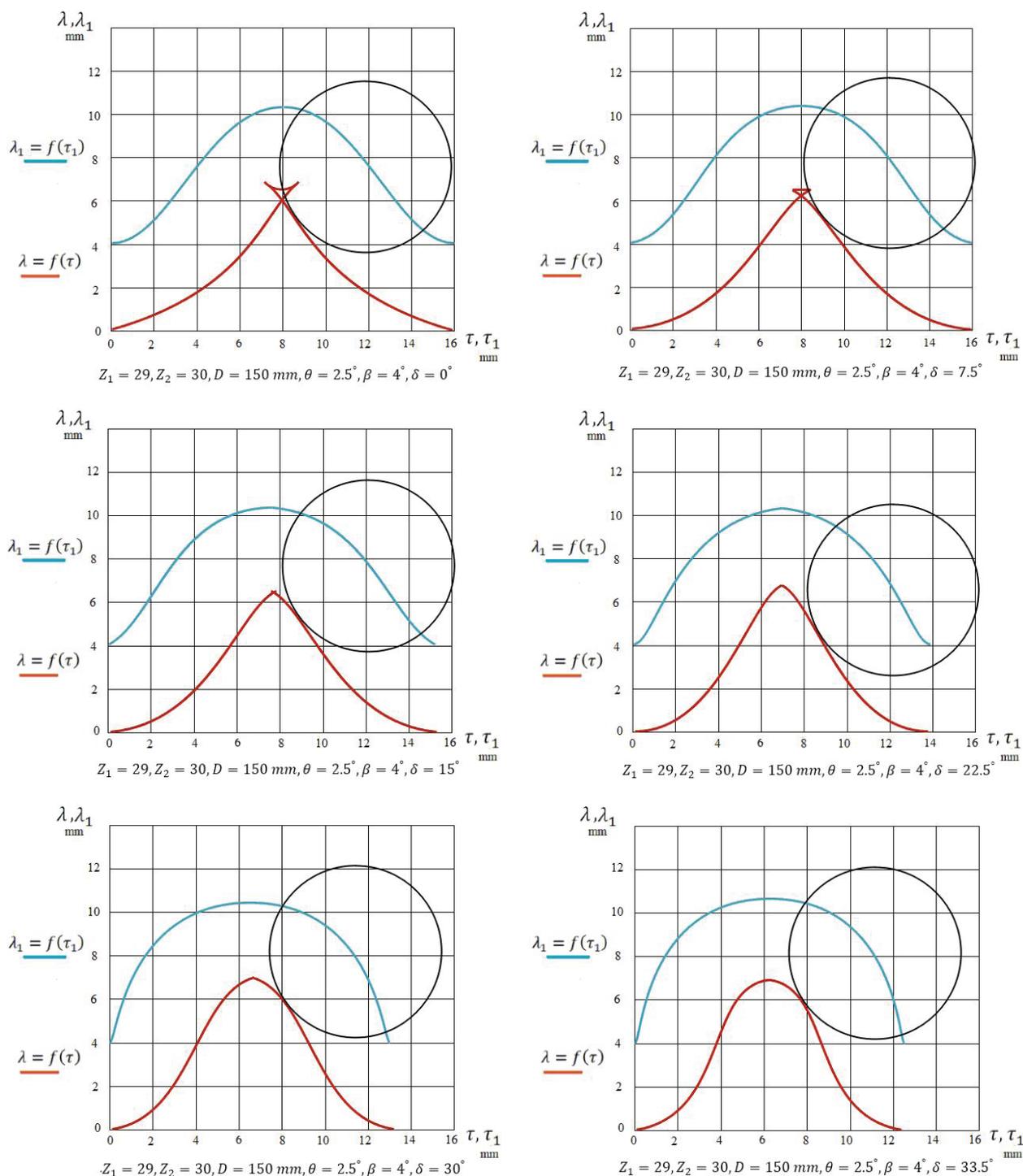
Рис. 7. Влияние угла раствора конических зуба шестерни β на профиль зубьев

метр колес не оказывает влияния на форму профиля зубьев, т.е. форма зубьев не зависит от диаметра колес, а только от числа зубьев Z_2 в этом диаметре. Таким образом, диаметр колес d не оказывает влияния на форму профиля зубьев, а только на размеры их поперечных сечений. Видно, что число зубьев и их соотношение оказывают существенно влияние на форму их профиля.

Например, профиль при $Z_2 = 32$ обеспечивает малые осевые силы в зацеплении, следовательно, малые нагрузки на подшипниковые опоры, профиль при $Z_2 = 22$ способствует высокой многопарности

зацепления. Этот профиль ввиду большего угла зацепления. При β, δ и $Z_2 = \text{const}$, угол нутации θ оказывает определенное влияние на профиль зубьев. При известном диаметре d угол нутации θ предопределяет высоту зубьев, т.е. отношение толщины зуба к его высоте. Влияние угла нутации θ на профиль зубьев при соотношении $Z_1 = Z_2 - 1$ показано на рис. 6. Из анализа профилограмм следует, что угол нутации θ должен выбираться с учетом его влияния на геометрию зуба.

Известно, что контактные напряжения в зацеплении обратно пропорциональны приведенному

Рис. 8. Влияние угла конического аксоида δ на профиль зубьев

радиусу кривизны в точках контакта профилей сопряженных зубьев [20]. Следовательно, для повышения контактной прочности зацепления необходимо увеличить радиус каждого из сопряженных профилей. Однако, как установлено, увеличение радиуса зуба приводит, с одной стороны, к уменьшению многопарного зацепления, а с другой — к изменению кривизны профиля сопряженных с ними зубьев.

В связи с этим определение степени влияния радиуса зуба шестерни на профиль зубьев колес представляет особый интерес. Установлено, что изучение влияния на профиль зубьев колес не радиуса зуба шестерни, а угла его конуса β [21] позволит по одной профилограмме определить пропорцию

кривизны сопряженных профилей или оценить их размеры при любом диаметре колес. На рис. 7 показано влияние угла конуса зуба шестерни β на профиль зубьев.

Для выявления степени и направленности влияния угла конического аксоида δ на форму профиля зубьев колеса на рис. 8 приведены профилограммы зубьев при различных значениях угла δ . Анализ профилограмм показывает, что с увеличением угла аксоида δ и при равных прочих параметрах форма профиля зубьев значительно меняется, а многопарного зацепления — возрастает.

Заключение. Таким образом, для обеспечения постоянства передаточной функции — основное требование зацепления — необходимо учитывать

влияние каждого из параметров δ , β , θ и Z на форму профиля зубьев. Установлено, что профиль зубьев меняется при изменении хотя бы одного из этих параметров, что обуславливает целый ряд технологических трудностей [22].

Кроме того, знание степени и направленности влияния на форму профиля зубьев параметров δ , β , θ и Z позволит на стадии проектирования выбирать их рациональное соотношение, обеспечивающее постоянство передаточной функции и многопарное зацепление, следовательно, выбирая правильное соотношение параметров δ , β , θ и Z устраняем основные недостатки волнового торцевого кинематического редуктора и расширяем область их применения [23].

Библиографический список

- Litvin F. L., Fuentes A. Gear geometry and applied theory. 2nd ed. New York: Cambridge University Press, 2004. ISBN 9780511547126. DOI: 10.1017/CBO9780511547126.
- Cervantes-Sánchez J., Rico Martínez J. M., Panduro Calvario C. A general and systematic framework for the kinematic analysis of complex gear systems // *Meccanica*. 2012. Vol. 47, no. 1. P. 3–21. DOI: 10.1007/S11012-010-9401-1.
- Dooner D. B., Seireg A. The Kinematic Geometry of Gearing: A Concurrent Engineering Approach. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1995. 472 p.
- Baer G., Iotchev V. Accurate Tooth Contact Determination and Optimization for Hypoid Bevel Gears Using Automatic Differentiation // *Proc. of 4th World Congress on Gearing and Power Transmission*. 1999. Vol. 1. P. 519–529.
- Nelson C. A., Cipra R. J. Similarity and Equivalence of Nutating Mechanisms to Bevel Epicyclic Gear Trains for Modeling and Analysis // *Journal of Mechanical Design*. 2005. Vol. 127, no. 2. P. 269–277. DOI: 10.1115/1.1829068.
- Yao L., Gu B., Huang S. [et al.]. Mathematical modeling and simulation of the external and internal double circular-arc spiral bevel gears for the nutation drive // *Journal of Mechanical Design*. 2010. Vol. 132 (2). P. 021008.1–021008.10. DOI: 10.1115/1.4001003.
- Журавлев В. Ф. Основы теоретической механики. 2-е изд., перераб. Москва: Физматлит, 2001. С. 23.
- Zhang J, Yao L., Huang S. [et al.]. Accurate modeling of tooth profile of internal meshing double arc spiral bevel gear // *Modern Manufacturing Engineering*. 2015. Vol. 1. P. 119–124. DOI: 10.16731/j.cnki.1671-3133.2015.01.013.
- Cai Y. W., Yao L. G., Xie Z. Y. [et al.]. Influence analysis of system parameters on characteristics of the nutation drive with double circular arc spiral bevel gears // *Forsch. Ingenieurwes.* 2017. Vol. 81 (2–3). P. 125–133. DOI: 10.1007/s10010-017-0245-x.
- Huang Ch., Li R., Qin D. [et al.]. Experimental investigation on the loaded behaviors of spiral bevel and hypoid gears with different contact path strategy // *Proceedings of the International Conference on Mechanical Transmissions, ICMT 2001, Chongqing, China*. 2001. P. 62–66.
- Saribay Z. B., Bill R. C. Design analysis of Pericyclic Mechanical Transmission system // *Mechanism and Machine Theory*. 2013. Vol. 61. P. 102–122. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2012.10.007.
- Айрапетов Э. Л. Совершенствование методов расчета нагруженности и прочности передач зацеплением // *Техника машиностроения*. 2001. № 2. С. 8–33.
- Jasem M., Krauinsh P. Y. Analysis of the Stress-strain State (SSS) Under Static Load of Nutation Speed Reducer // *Journal of Advanced Research in Dynamical and Control Systems*. 2019. Vol. 11, Issue 10. P. 137–141. DOI: 10.5373/JARDCS/V11110/20193016.
- Jasem M. A., Krauinsh P. Y. Kinematical analysis of the nutation speed reducer // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. IOP Publishing, 2019. 012022. DOI: 10.1088/1757-899X/510/1/012022.
- Джасем М. А., Крауиньш П. Я. Анализ напряженно-деформированного состояния под статической нагрузкой волнового торцевого кинематического редуктора // *Вестник ИрГТУ*. 2019. № 5 (148). С. 854–862. DOI: 10.21285/1814-3520-2019-5-854-862.
- Гольдфарб В. И., Исакова Н. В. Варианты спиральных передач с точки зрения реализации винтового параметра // *Передачи и трансмиссии*. 1995. № 1. С. 25–34.
- Лагутин С. А. Синтез пространственных зацеплений методом винтов // *Передачи и трансмиссии*. 1999. № 2. С. 59–70.
- Колесников В. К., Котликова В. Я. О технологическом синтезе пространственных зубчатых передач с локализованным контактом // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 1993. № 1. С. 86–91.
- Бабичев Д. Т. О базовых геометрических примитивах теории зубчатых зацеплений // *Теория и практика зубчатых передач: тр. междунар. конф. Ижевск, 1996*. С. 469–474.
- Журавлев Г. А. Оценка применимости решения Герца в задачах о контакте зубьев колес // *Техника машиностроения*. 2001. № 2. С. 82–90.
- Волков А. Э., Шевелева Г. И. Компьютерный анализ работы конических и гипоидных зубчатых передач // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2001. № 5. С. 96–103.
- Шевелева Г. И., Волков А. Э., Медведев В. И. Программное обеспечение производства конических и гипоидных зубчатых передач с круговыми зубьями // *Техника машиностроения*. 2001. № 2 (30). С. 40–51.
- Мазуру С. Г. Оценка точности обработки зубьев зубчатых колес с нестандартным профилем // *Машиностроение и техносфера XXI века: сб. тр. XV Междунар. науч.-техн. конф. В 4 т. 15–20 сентября 2008 г., Донецк, Украина. Донецк: ДонНТУ, 2008*. Т. 2. С. 236–243.

ДЖАСЕМ Мохаммад Али, аспирант по направлению «Машиностроение, проектирование машин» Национального исследовательского Томского политехнического университета; младший научный сотрудник факультета механики и электротехники университета Аль-Фурат, Сирия.

ORCID: 0000-0001-7006-6257

Адрес для переписки: eng.mjase85@gmail.com

КРАУИНЬШ Петр Янович, доктор технических наук, профессор (Россия), научный руководитель отделения материаловедения инженерной школы новых производственных технологий Национального исследовательского Томского политехнического университета.

SPIN-код: 9847-4913

AuthorID (РИНЦ): 356165

Адрес для переписки: peterkrau@tpu.ru

Для цитирования

Джасем М. А., Крауиньш П. Я. Математическая модель зацепления и аналитическое описание профиля зубьев волнового торцевого кинематического редуктора // *Омский научный вестник*. 2021. № 1 (175). С. 22–31. DOI: 10.25206/1813-8225-2021-175-22-31.

Статья поступила в редакцию 11.01.2021 г.

© М. А. Джасем, П. Я. Крауиньш