

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ЦИКЛОГРАФИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВОЙ

Целью работы является обоснование возможности конструктивно-аналитического решения обратной задачи циклографического моделирования кривой пространства R^3 и разработка алгоритма этого решения. Ортогональная проекция и две составляющие циклографической проекции кривой линии пространства образуют триаду элементов в плоскости $z=0$, возникающих в решении прямой задачи циклографического моделирования кривой и составляющих основу для решения обратной задачи моделирования. К прямой задаче относится построение на плоскости $z=0$ циклографической проекции (модели) исходной кривой, а к обратной — определение кривой пространства по ее циклографической проекции. Недостаточная изученность обратной задачи наряду с ее востребованностью в решении практических вопросов, например, при расчете траектории инструмента для обработки карманных поверхностей изделий машиностроения на станках с ЧПУ, делают постановку и решение обратной задачи актуальными. В работе в качестве заданной циклографической проекции рассмотрена выпуклая простая замкнутая кривая линия. Доказано существование и единственность кривой пространства, для которой эта проекция является циклографической. На приведенных примерах продемонстрирован алгоритм решения обратной задачи.

Ключевые слова: циклографическое отображение, медиальная ось, медиальная ось преобразований, обратная задача, α -оболочка, вершинные точки кривой.

Введение. Циклографическое моделирование геометрических объектов основано на биекции, устанавливаемой в простейшем случае между множеством точек пространством R^3 и множеством циклов в плоскости $z=0$ [1, 2]. В настоящее время, благодаря высокому уровню развития компьютерной графики и САПР, циклографический метод, будучи достаточно сложным и приближенным в ручной конструктивной реализации, всё успешнее применяется как в теоретико-геометрических исследованиях [1–3], так и в решении практических задач геометрической оптики [1, 3, 4–6], в проектировании поверхностных форм автомобильных дорог [4, 7], обработки поверхностей изделий машиностроения [4, 8] и в других практических областях.

В теории циклографического моделирования кривой пространства известны прямая и обратная задачи моделирования. В прямой задаче по заданной кривой определяется её циклографическая проекция [1, 2, 4], в обратной — кривая подлежит восстановлению в пространстве по заданной её циклографической проекции [2, 6]. Кривая пространства R^3 , её ортогональная и циклографическая проекции на плоскости $z=0$ образуют триаду геометрических элементов, в которой задание двух элементов

из трех необходимо и достаточно для определения неизвестного третьего элемента [6]. Элементы триады имеют общую параметризацию, что позволяет устанавливать точечную биекцию между элементами и выполнять решения прямой и обратной задач.

Обратная задача часто используется для формирования рабочих линий в виде эквидистант, используемых при расчетах в качестве траектории движения режущего инструмента для обработки карманных поверхностей на станках с ЧПУ [4, 8, 9]. Существующие её решения выполняются непосредственно в плоскости $z=0$ при помощи методов, основанных на приближенных вычислениях [10–13].

Постановка задачи. Для полноты понимания обратной задачи циклографического моделирования кривой пространства рассмотрим геометрическую схему построения циклографической проекции этой кривой (рис. 1). Кривой линии $\bar{p}(t) = (x(t), y(t))$, где t — параметр, соответствует на плоскости $z=0$ триада линий: $\bar{p}_1(t)$ — ортогональная проекция, $\bar{p}_{c1}(t)$ и $\bar{p}_{c2}(t)$ — циклографическая проекция. При этом $\bar{p}(t)$ — прообраз, а пара элементов триады $\bar{p}_1(t)$ и $\bar{p}_{c2}(t)$ — образ кривой линии $\bar{p}(t)$ в циклографическом отображении. Прямая задача циклографического моделирования, то есть $\bar{p}(t) \rightarrow (\bar{p}_{c1}(t), \bar{p}_{c2}(t))$, в научных публикациях иссле-

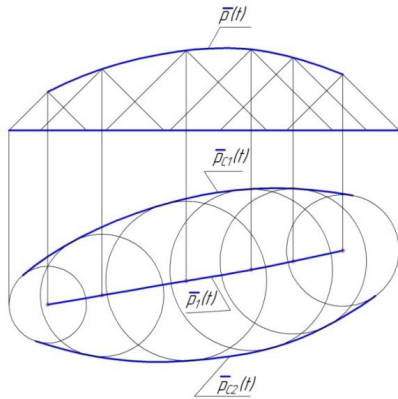


Рис. 1. Схема образования циклографической проекции кривой $\bar{p}(t)$

дована в значительно большей степени, чем обратная задача $(\bar{p}_{c_1}(t), \bar{p}_{c_2}(t)) \rightarrow \bar{p}(t)$. В частности, если $(\bar{p}_{c_1}(t) \cup \bar{p}_{c_2}(t)) = \bar{p}_c(t)$ — замкнутая линия, что имеет место в решении актуальной задачи проектирования траектории режущего инструмента для обработки карманных поверхностей, то важным для этого случая является вопрос о возможности вычисления линии $\bar{p}(t)$ — ключевого геометрического объекта в расчете указанной траектории. Обоснование этой возможности заключается в выборе подходящего варианта разбиения замкнутого контура $\bar{p}_c(t)$ на составляющие $\bar{p}_{c_1}(t)$ и $\bar{p}_{c_2}(t)$. Очевидно, в этой разбивке должны быть задействованы вершинные точки контура $\bar{p}_c(t)$, влияющие на его геометрию.

Целью работы является получение на основе циклографического отображения кривой пространства отличающихся от известных, но более простых и доступных в вычислительном плане алгоритмов решения обратной задачи.

Теория. Рассмотрим теоретические аспекты решения обратной задачи циклографического моделирования кривой линии пространства. Они основаны на нескольких утверждениях.

Утверждение 1. Для плоской простой замкнутой выпуклой кривой существует единственная линия пространства, для которой эта кривая служит циклографической проекцией.

Доказательство. Пусть в плоскости $z=0$ задана простая замкнутая выпуклая кривая $\bar{p}_c(t) = (x_c(t), y_c(t))$, $T_0 \leq t \leq T$. Разделим эту кривую на две составляющие $\bar{p}_{c_1}(t_1) = (x_{c_1}(t_1), y_{c_1}(t_1))$, $T_{01} \leq t_1 \leq T_1$ и $\bar{p}_{c_2}(t_2) = (x_{c_2}(t_2), y_{c_2}(t_2))$, $T_{02} \leq t_2 \leq T_2$. Очевидно, возможен не единственный способ такого деления. Вопросы выбора способа оптимального деления на составляющие будут рассмотрены ниже. Для каждой из полученных составляющих построим их эволюты $\bar{p}_{e_1}(t_1) = (x_{e_1}(t_1), y_{e_1}(t_1))$ и $\bar{p}_{e_2}(t_2) = (x_{e_2}(t_2), y_{e_2}(t_2))$ по известным в дифференциальной геометрии уравнениям

$$\bar{p}_{e_1}(t_1) = \bar{p}_{c_1}(t_1) + \frac{1}{k_{c_1}(t_1)} \bar{n}_{c_1}(t_1),$$

$$\bar{p}_{e_2}(t_2) = \bar{p}_{c_2}(t_2) + \frac{1}{k_{c_2}(t_2)} \bar{n}_{c_2}(t_2),$$

где k_{c_i} — кривизна, \bar{n}_{c_i} — нормаль, $i = 1, 2$.

Для каждой из эволют построим их пространственные образы:

$$\bar{p}_{E_1}(t_1) = \left(\begin{array}{l} x_{e_1}(t_1), y_{e_1}(t_1), z_{e_1}(t_1) = \\ = \pm \sqrt{(x_{c_1}(t_1) - x_{e_1}(t_1))^2 + (y_{c_1}(t_1) - y_{e_1}(t_1))^2} \end{array} \right),$$

$$\bar{p}_{E_2}(t_2) = \left(\begin{array}{l} x_{e_2}(t_2), y_{e_2}(t_2), z_{e_2}(t_2) = \\ = \pm \sqrt{(x_{c_2}(t_2) - x_{e_2}(t_2))^2 + (y_{c_2}(t_2) - y_{e_2}(t_2))^2} \end{array} \right). \quad (1)$$

Затем построим соответствующие α -поверхности [1]:

$$\bar{P}_{\alpha_1}(t_1, l_1) = \bar{p}_{E_1}(t_1) + l_1(\bar{p}_{c_1}(t_1) - \bar{p}_{E_1}(t_1)),$$

$$\bar{P}_{\alpha_2}(t_2, l_2) = \bar{p}_{E_2}(t_2) + l_2(\bar{p}_{c_2}(t_2) - \bar{p}_{E_2}(t_2)). \quad (2)$$

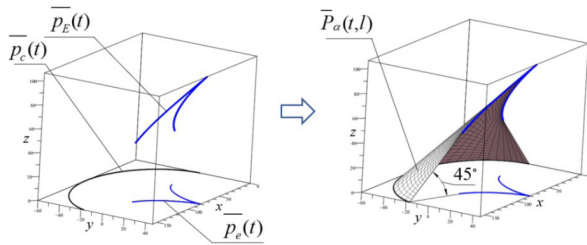
Совместное рассмотрение уравнений α -поверхностей \bar{P}_{α_1} и \bar{P}_{α_2} приводит к получению линии пересечения $\bar{P}_{\alpha_1} \cap \bar{P}_{\alpha_2}$, представляющей собой линию МАТ. Действительно, циклографической проекцией линии пересечения $\bar{P}_{\alpha_1} \cap \bar{P}_{\alpha_2}$, принадлежащей поверхности \bar{P}_{α_1} , является линия \bar{p}_{c_1} в плоскости $z=0$, а циклографической проекцией этой же линии пересечения, но принадлежащей поверхности \bar{P}_{α_2} , является по построению линия \bar{p}_{c_2} в той же плоскости. Ортогональной проекцией линии пересечения $\bar{P}_{\alpha_1} \cap \bar{P}_{\alpha_2}$ служит линия \bar{p}_1 , являющаяся в геометрической схеме формирования циклографической проекции, множеством точек — центров всевозможных циклов, касающихся одновременно как линии \bar{p}_{c_1} , так и \bar{p}_{c_2} . Следовательно, множество циклов, вписанных в область плоскости $z=0$, ограниченную линиями \bar{p}_{c_1} и \bar{p}_{c_2} , представляет собой циклографический образ множества точек линии пересечения $\bar{P}_{\alpha_1} \cap \bar{P}_{\alpha_2}$ на плоскости $z=0$. Поскольку каждая из α -поверхностей, в соответствии с геометрической схемой циклографического отображения $\bar{p}_{c_1} \rightarrow \bar{P}_{\alpha_1}$, $\bar{p}_{c_2} \rightarrow \bar{P}_{\alpha_2}$, является единственной, следовательно, единственной является и пара \bar{P}_{α_1} и \bar{P}_{α_2} , из чего и следует единственность линии пересечения $\bar{P}_{\alpha_1} \cap \bar{P}_{\alpha_2}$.

Таким образом, линия $\bar{P}_{\alpha_1} \cap \bar{P}_{\alpha_2}$ является линией пространства R^3 , для которой заданная линия $\bar{p}_c(t)$ служит циклографической проекцией.

Заметим, что в общем случае решение системы уравнений для определения линии пересечения α -поверхностей $\bar{P}_{\alpha_1}(t_1, l_1)$ и $\bar{P}_{\alpha_2}(t_2, l_2)$ не является аналитическим. Но аналитическим является решение задачи точечного построения линии пересечения $\bar{P}_{\alpha_1} \cap \bar{P}_{\alpha_2}$, определяемой как дискретное множество точек пересечения образующих прямых линий одной α -поверхности с другой [2].

При разделении линии $\bar{p}_c(t)$, представляющей собой простой замкнутый выпуклый контур $\partial(\Omega)$ области на плоскости $z=0$, на составляющие \bar{p}_{c_1} и \bar{p}_{c_2} , целесообразно использовать вершинные точки линий $\bar{p}_c(t)$.

В основу деления замкнутого контура на составляющие положена теорема о четырех вершинах плоской простой кривой [14], а именно: всякая гладкая замкнутая простая кривая на евклидовой плоскости имеет не менее четырех вершин. Эта теорема справедлива как для выпуклых, так и для невыпуклых замкнутых контуров. Вершинами гладкой кривой на плоскости называются точки экстремумов ее кривизны. В общем случае, когда у функции кривизны отсутствуют вырожденные точки кривизны, т.е. точки, в которых вторая производная равна нулю, замкнутая кривая имеет четное число вершин с чередующимися максимумами и минимумами.

Рис. 2. Формообразование α -поверхности

Утверждение 2. Для плоской незамкнутой простой линии существует множество линий пространства, для которых исходная линия служит циклографической проекцией.

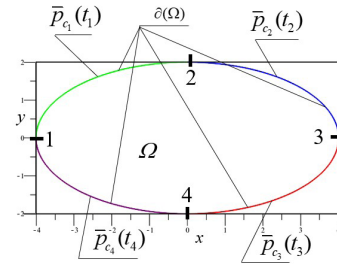
Пусть $\bar{p}_c(t)$ — незамкнутая простая линия в плоскости $z=0$ (рис. 2, слева). Построим для нее эволюту $\bar{p}_E(t)$, а затем пространственный образ $\bar{p}_E(t)$ эволюты с параметрическими уравнениями (1). Затем на линиях $\bar{p}_c(t)$ и $\bar{p}_E(t)$ построим α -поверхность с параметрическими уравнениями, например, уравнения (2) (рис. 2, справа). Очевидно, для любой из всевозможных линий на α -поверхности её циклографическим образом на плоскости $z=0$ будет одна и та же линия.

Выводы:

1. Введение в уравнение (2) функциональной зависимости $l = f(t)$, в которой $f(t)$ — функция гомотопного отображения $I \leftrightarrow L$, где $I: [T_0 \leq t \leq T]$, $L: [l_0 \leq l \leq l_n]$, выделяет на α -поверхности (2) единственную кривую, для которой заданная кривая $\bar{p}_c(t)$ служит циклографической проекцией. Очевидно, функция $f(t)$ является не единственной.

2. Введение дополнительно на плоскости $z=0$ любой простой незамкнутой линии $\bar{p}_1(\omega)$ и принятие ее в качестве ортогональной проекции некоторой кривой на α -поверхности (2) определяет единственную кривую пространства, для которой служит циклографической проекцией. Это следует из отмеченных выше свойств триады линий $\bar{p}_1(t)$, \bar{p}_{c_1} и \bar{p}_{c_2} . Следовательно, при этих условиях обратная задача циклографического отображения для случая незамкнутой линии может быть сформулирована так: на плоскость $z=0$ и заданы незамкнутая (неполная) циклографическая и ортогональная проекции пространственной кривой. Требуется построить пространственную кривую. В этой задаче кривая пространства будет образом, а пара линий в плоскости $z=0$ — прообразом в обратном циклографическом отображении.

Если обратиться к параметрическим уравнениям $x_c = x_c(t)$, $y_c = y_c(t)$ циклографической проекции [2, 10] пространственной кривой линии $\bar{p}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $T_0 \leq t \leq T$, то можно заметить, что при условии, $D > 0$, где $D = (x'(t))^2 + (y'(t))^2 - (z'(t))^2$, циклографическая проекция $\bar{p}_c(t) = (x_c(t), y_c(t))$ включает в себя две действительные составляющие $\bar{p}_{c_1}(t)$ и $\bar{p}_{c_2}(t)$, которые могут стыковаться, образуя замкнутую линию в плоскости $z=0$, либо могут не стыковаться, оставаясь взаимно связанными по параметру t линиями. При этом важно, что ортогональная проекция $\bar{p}_1(t) = (x(t), y(t))$ линии $\bar{p}(t)$ представляет собой однопараметрическое множество центров циклов, огибающей которых является линия $\bar{p}_c(t)$. Линии $\bar{p}_1(t)$, $\bar{p}_{c_1}(t)$, $\bar{p}_{c_2}(t)$ образуют в плоскости $z=0$ триаду, в которой, как было отмечено выше, любая из линий однозначно определяется по двум другим заданным [6]. Особенности геометрической

Рис. 3. Граничный контур $\partial(\Omega)$ — эллипс из четырех элементарных сегментов $\bar{p}_{c_1}(t_1) \cup \bar{p}_{c_2}(t_2) \cup \bar{p}_{c_3}(t_3) \cup \bar{p}_{c_4}(t_4)$

конструкции формообразования линии $\bar{p}_c(t)$ и взаимную параметрическую зависимость указанных линий триады необходимо учитывать как при решении прямой задачи циклографического моделирования $\bar{p}(t) \rightarrow \bar{p}_c(t)$, так и обратной $\bar{p}_c(t) \rightarrow \bar{p}(t)$. Исходя из этих общих особенностей и свойств геометрической конструкции циклографического моделирования пространственной кривой, рассмотрим возможность решения обратной задачи для случая, когда $\bar{p}_c(t)$ представляет собой простую выпуклую замкнутую кривую. В теории обратной задачи $\bar{p}_c(t) \rightarrow \bar{p}(t)$ линию $\bar{p}(t)$ принято обозначать как МАТ (*Medial Axis Transformation*), а ее ортогональную проекцию $\bar{p}_1(t)$ — как МА (*Medial Axis*) [9–11]. В современных исследованиях решение прямой и обратной задач выполняется на плоскости $z=0$ с использованием различных аппаратов и технологий геометрического и математического моделирования [8, 10–13]. При этом существующие решения, как правило, выполняются по схеме $\bar{p}_c(t) \rightarrow \text{МА} \rightarrow \text{МАТ}$ и основаны на приближенных вычислениях.

В настоящей работе предлагается иной подход к решению рассматриваемой обратной задачи, основанный на максимально простых для данной задачи вычислениях с выходом в пространство R^3 . Рассмотрим примеры.

Результаты эксперимента.

Пример 1. Граничный контур области $\partial(\Omega)$ задан эллипсом (рис. 3). Требуется определить линию МАТ.

Представим контурный эллипс в виде двух сегментов $\bar{p}_1(t_{p_1})$ и $\bar{p}_2(t_{p_2})$ и запишем их параметрические уравнения $\bar{p}_1(x_{p_1}(t_{p_1}), y_{p_1}(t_{p_1}))$ и $\bar{p}_2(x_{p_2}(t_{p_2}), y_{p_2}(t_{p_2}))$. Они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} x_{p_1} &= a_1 \frac{2t_{p_1}}{1+t_{p_1}^2}, \\ y_{p_1} &= b_1 \frac{1-t_{p_1}^2}{1+t_{p_1}^2}, -1 \leq t_{p_1} \leq 1, a_1 = 4, b_1 = 2; \\ x_{p_2} &= a_2 \frac{2t_{p_2}}{1+t_{p_2}^2}, \\ y_{p_2} &= -b_2 \frac{1-t_{p_2}^2}{1+t_{p_2}^2}, -1 \leq t_{p_2} \leq 1, a_2 = 4, b_2 = 2. \end{aligned}$$

Так как эллипс имеет четыре вершины, то разделим по параметрам t_{p_1} и t_{p_2} каждый сегмент эллипса $\bar{p}_1(t_{p_1})$ и $\bar{p}_2(t_{p_2})$ на два элементарных сегмента (рис. 2):

$$\begin{aligned} \bar{p}_1(t_{p_1}) &= \bar{p}_{c_1}(t_1) \cup \bar{p}_{c_2}(t_2), \\ -1 \leq t_1 \leq 0, 0 \leq t_2 \leq -1 \\ \bar{p}_2(t_{p_2}) &= \bar{p}_{c_3}(t_3) \cup \bar{p}_{c_4}(t_4), \\ -1 \leq t_3 \leq 0, 0 \leq t_4 \leq -1. \end{aligned}$$

Затем определим уравнения элементарных сегментов $\bar{p}_c(t_i)$ между точками T_i и T_{i+1} , где T_i — вершина кривой — начальная точка элементарного сегмента эллипса, T_{i+1} — следующая вершина кривой — конечная точка элементарного сегмента. Элементарные сегменты формируются следующим образом: $\bar{p}_{c_1}(t_{p_1}), -1 \leq t_{p_1} \leq 0$ и $\bar{p}_{c_2}(t_{p_2}), 0 \leq t_{p_2} \leq 1$; $\bar{p}_{c_3}(t_{p_3}), -1 \leq t_{p_3} \leq 0$ и $\bar{p}_{c_4}(t_{p_4}), 0 \leq t_{p_4} \leq 1$, где $t_{T_i} \leq t_{p_i} \leq t_{T_{i+1}}$; t_i — это текущий параметр на отрезке $T_i T_{i+1}$; $t_i = (1 - \lambda) \cdot t_{T_i} + \lambda t_{T_{i+1}}$; $0 \leq \lambda \leq 1$. Уравнения четырех элементарных сегментов эллипса имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{p}_{c_1}(t_1): x_{c_1} &= \frac{8t_1}{1+t_1^2}, y_{c_1} = \frac{1-t_1^2}{1+t_1^2}, 0 \leq t_1 \leq 1; \\ \bar{p}_{c_2}(t_2): x_{c_2} &= \frac{8(1-t_2)}{(1-t_2)^2+1}, y_{c_2} = \frac{2((1-t_2)^2+1)}{(1-t_2)^2+1}, 0 \leq t_2 \leq 1; \\ \bar{p}_{c_3}(t_3): x_{c_3} &= \frac{8(1-t_3)}{(1-t_3)^2+1}, y_{c_3} = -\frac{2(1-(1-t_3)^2)}{(1-t_3)^2+1}, 0 \leq t_3 \leq 1; \\ \bar{p}_{c_4}(t_4): x_{c_4} &= \frac{8t_4}{1+t_4^2}, y_{c_4} = -\frac{2(1-t_4^2)}{1-t_4^2}, 0 \leq t_4 \leq 1. \end{aligned}$$

Затем запишем параметрические уравнения пространственных образов эволют $\bar{p}_{E_1}(t_1), \bar{p}_{E_2}(t_2), \bar{p}_{E_3}(t_3)$, и $\bar{p}_{E_4}(t_4)$ элементарных сегментов $\bar{p}_{c_i}(t_i), i=1,2,3,4$ (рис. 4), исходя из уравнений $x_E = x_e, y_E = y_e, z_E = \sqrt{(x_c - x_e)^2 + (y_c - y_e)^2}$, где $x_e(t), y_e(t)$ — параметрические уравнения эволюты элементарного сегмента. После этого переходим к формообразованию α -поверхностей $\bar{P}_{\alpha_1}(t_1, l_1), \bar{P}_{\alpha_2}(t_2, l_2), \bar{P}_{\alpha_3}(t_3, l_3)$, и $\bar{P}_{\alpha_4}(t_4, l_4)$, которое выполняется по основе общего уравнения α -поверхности $\bar{P}_{\alpha_i}(l, t) = p_c(t) + l(p_E(t) - p_c(t))$, имеющем для каждой из α -поверхностей конкретные параметрические выражения координат.

Формально линия пересечения двух α -поверхностей, заданных параметрически, находится решением системы трех уравнений с четырьмя неизвестными. В рассматриваемом случае пересекаются α -поверхности $\bar{P}_{\alpha_i} = (x_{\alpha_i}(t_i, l_i), y_{\alpha_i}(t_i, l_i), z_{\alpha_i}(t_i, l_i))$ и $\bar{P}_{\alpha_j} = (x_{\alpha_j}(t_j, l_j), y_{\alpha_j}(t_j, l_j), z_{\alpha_j}(t_j, l_j))$. Для нахождения их линии пересечения необходимо из четырех неизвестных параметров t_1, l_1, t_4 и l_4 выразить один из двух неизвестных параметров l_1 или l_4 :

$$\begin{cases} x_{\alpha_i}(t_1, l_1) = x_{\alpha_j}(t_4, l_4), \\ y_{\alpha_i}(t_1, l_1) = y_{\alpha_j}(t_4, l_4), \\ z_{\alpha_i}(t_1, l_1) = z_{\alpha_j}(t_4, l_4). \end{cases}$$

Поскольку рассматривается пересечение двух линейчатых поверхностей, то решение системы уравнений можно получить путем нахождения функциональных зависимостей параметров в указанной системе уравнений. Например, вначале находим функцию параметра l_1 , а именно $l_1(t_1, t_4, l_4)$ из уравнения $z_1(t_1, l_1) = z_4(t_4, l_4)$, используя возможности символьных вычислений программы *Maple*. Затем, также используя программу *Maple*, найдем функциональную зависимость параметра l_4 , а именно $l_4(t_1, t_4)$ из уравнения $y_1(t_1, l_1(t_1, t_4, l_4)) = y_4(t_4, l_4)$. После этого выразим функцию параметра t_4 , решая систему уравнений $x_1(t_1, l_1) = x_4(t_4, l_4)$, где $l_1(t_1, t_4, l_4)$ и $l_4(t_1, t_4)$ — функции параметров. Таким образом, мы получаем функции параметров $l_4(t_1, l_1), t_4(t_1, l_1)$, и $l_1(t_1, t_4, l_4)$. Подставив функцию $l_1(t_1, t_4, l_4)$ в уравнение α -поверхности $\bar{P}_{\alpha_i} = (x_{\alpha_i}(t_i, l_i), y_{\alpha_i}(t_i, l_i), z_{\alpha_i}(t_i, l_i))$, найдем параметрические уравнения линии $\overline{MAT}_1(t_1)$ пересечения поверхностей $\bar{P}_{\alpha_i}(t_1, l_1)$ и $\bar{P}_{\alpha_j}(t_4, l_4)$ (рис. 5 и 6):

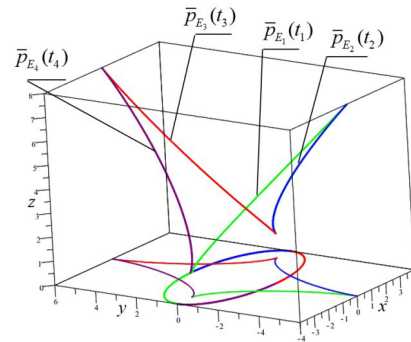


Рис. 4. Пространственный образ эволюты эллипса

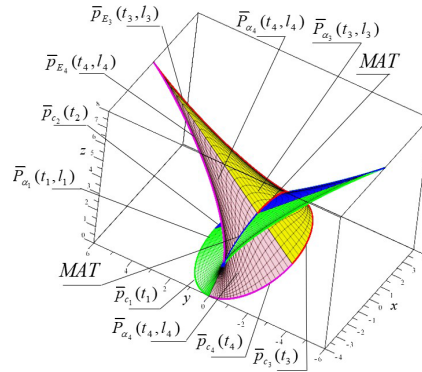


Рис. 5. Визуализация формообразования MAT

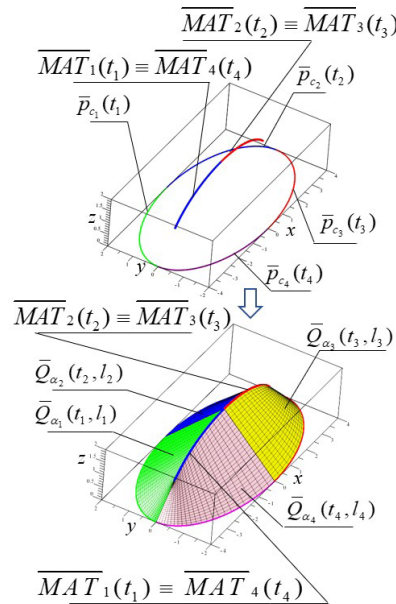


Рис. 6. Визуализация формообразования составной α -оболочки

$$\begin{aligned} \overline{MAT}_1 &= (x_{MAT_1}(t_1), y_{MAT_1}(t_1), z_{MAT_1}(t_1)) = \\ &= \bar{P}_{\alpha_i}(t_1, l_1) \cap \bar{P}_{\alpha_j}(t_4, l_4), \\ t_1 &\in [0,1], t_4 \in [0,1], l_1 \in [0,1], l_4 \in [0,1]. \end{aligned}$$

Через функциональную зависимость параметров выразим функцию параметра $t_4(t_1, l_1)$, а затем найдем функции параметров: $l_1(t_4, l_4), t_4(t_1, l_1)$ и $l_4(t_4, t_1, l_1)$. Подставив функцию $l_4(t_4, t_1, l_1)$ вместо параметра l_4 в уравнение α -поверхности

$\bar{P}_{\alpha_4} = (x_{\alpha_4}(t_4, I_4), y_{\alpha_4}(t_4, I_4), z_{\alpha_4}(t_4, I_4))$, найдем параметрические уравнения линии $\overline{MAT}_4(t_4)$ пересечения поверхностей $\bar{P}_{\alpha_1}(t_1, I_1)$ и $\bar{P}_{\alpha_4}(t_4, I_4)$ (рис. 5 и 6):

$$\begin{aligned}\overline{MAT}_4 &= \bar{P}_{\alpha_1}(t_1, I_1) \cap \bar{P}_{\alpha_4}(t_4, I_4), \\ \overline{MAT}_4 &= (x_{MAT_4}(t_4), y_{MAT_4}(t_4), z_{MAT_4}(t_4)), \\ t_1 &\in [0,1], t_4 \in [0,1], I_1 \in [0,1], I_4 \in [0,1].\end{aligned}$$

Аналогичным образом, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} x_{\alpha_2}(t_2, I_2) = x_{\alpha_3}(t_3, I_3), \\ y_{\alpha_2}(t_2, I_2) = y_{\alpha_3}(t_3, I_3), \\ z_{\alpha_2}(t_2, I_2) = z_{\alpha_3}(t_3, I_3), \end{cases}$$

получим линии $\overline{MAT}_2(t_2)$ и $\overline{MAT}_3(t_3)$ (рис. 5 и 6):

$$\begin{aligned}\overline{MAT}_2 &= \bar{P}_{\alpha_2}(t_2, I_2) \cap \bar{P}_{\alpha_3}(t_3, I_3), \\ \overline{MAT}_2 &= (x_{MAT_2}(t_2), y_{MAT_2}(t_2), z_{MAT_2}(t_2)), \\ t_2 &\in [0,1], t_3 \in [0,1], I_2 \in [0,1], I_3 \in [0,1]; \\ \overline{MAT}_3 &= (\bar{P}_{\alpha_2}(t_2, I_2) \cap \bar{P}_{\alpha_3}(t_3, I_3), \\ \overline{MAT}_3 &= (x_{MAT_3}(t_3), y_{MAT_3}(t_3), z_{MAT_3}(t_3)), \\ t_2 &\in [0,1], t_3 \in [0,1], I_2 \in [0,1], I_3 \in [0,1].\end{aligned}$$

Параметрические уравнения линий \overline{MAT}_1 , \overline{MAT}_2 , \overline{MAT}_3 и \overline{MAT}_4 получены на основании функциональной зависимости параметров t_1, I_1, t_4 и I_4 и ввиду громоздкости полученных выражений в данной работе не приводятся. Maple-программа соответствующих расчетов приведена на ресурсе: <https://www.mapleprimes.com/posts/213421-Spline-Curves-Formation-Given-Extreme-Derivatives?sp=213421>.

В итоге вычислений получаем линию MAT для контура области, ограниченной эллипсом, представляющую собой составную линию:

$$\begin{aligned}MAT &= \overline{MAT}_1 \cup \overline{MAT}_3 = \overline{MAT}_4 \cup \overline{MAT}_2 = \\ &= \overline{MAT}_1 \cup \overline{MAT}_2 = \overline{MAT}_4 \cup \overline{MAT}_3.\end{aligned}$$

Пример 2. Рассмотрим построение граничного выпуклого контура области $\partial(\Omega)$ на основе циклического однородного кубического \mathbf{B} -сплайна третьей степени по заданным узлам $(-3, 5)$; $(0, 8)$; $(6, 10)$; $(7, 5)$; $(3, 3)$; $(-3, 5)$ и определение линии MAT для этого контура.

Как известно, \mathbf{B} -сплайн-кривая определяется выражением [14, 15]:

$$\bar{p}(t) = \sum_{i=0}^n \bar{T}_i N_{i,k}(t), \quad u_{\min} \leq t \leq u_{\max},$$

где i -ая нормализованная функция базиса $N_{i,k}(t)$ порядка k определяется рекуррентными соотношениями на основе формулы Кокса – де Бура:

$$N_{i,k}(t) = \frac{(t - u_i)N_{i,k-1}(t)}{u_{i+k-1} - u_i} + \frac{(u_{i+k} - t)N_{i+1,k-1}(t)}{u_{i+k} - u_{i+1}},$$

$$N_{i,k}(t) = \begin{cases} 1 & u_i \leq t \leq u_{i+1} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $u_i \leq u_{i+1}$ — узловые параметры, ограничивающие значения параметра t , внутри которых функции сопряжения $N_{i,k}(t)$ имеют ненулевые значения;

k — порядок базисной функции, $k-1$ — степень элементарного \mathbf{B} -сплайн, $n+1$ — количество узлов; $[u_0, u_1, \dots, u_{n-1}]$ — узловой вектор. Узловой вектор является базовым объектом в построении \mathbf{B} -сплайн-кривой. Отдельные узловые значения количеством $m = n + k + 1$ равномерного узлового вектора распределены на одинаковом расстоянии. Для построения циклической (замкнутой) \mathbf{B} -сплайн-кривой необходимо повторить $k-2$ вершин в начале или в конце замкнутого многоугольника, определяемого заданными узлами. В нашем примере $n=5$, $k=4$. Для построения замкнутой \mathbf{B} -сплайн-кривой повторим два узла. Для выполнения последующих расчетов получим следующий ряд узлов: $(-3, 5)$; $(0, 8)$; $(6, 10)$; $(7, 5)$; $(3, 3)$; $(-3, 5)$; $(0, 8)$; $(6, 10)$, тогда $n=7$, $m=7+4+1=12$. Таким образом, для узлового вектора можно записать:

$$\begin{aligned}[1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12] \\ [u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6 \quad u_7 \quad u_8 \quad u_9 \quad u_{10} \quad u_{11}].\end{aligned}$$

Число элементарных \mathbf{B} -сплайнов, участвующих в построении \mathbf{B} -сплайн-кривой, не совпадают с числом интервалов узлового вектора. Расчет кривой происходит только на эффективных интервалах. Фиктивные интервалы не влияют на результирующую аппроксимирующую кривую. Они позволяют построить и использовать при расчете \mathbf{B} -сплайн-кривой полный набор элементарных \mathbf{B} -сплайнов. Для равномерного, начинающегося с 0, узлового вектора с целыми приращениями параметра эффективные интервалы удовлетворяют условию $k-1 \leq t \leq n+1$ [14]. В нашем примере узловой вектор начинается с 1, тогда эффективные интервалы определяются интервалом $k-1+1 \leq t \leq n+1+1$, следовательно, $4 \leq t \leq 9$. Параметрические уравнения сегментов $p_i = (x_{p_i}(t), y_{p_i}(t))$ граничного контура $\partial(\Omega)$, заполняющих эффективные интервалы ($4 \leq t \leq 5$, $5 \leq t \leq 6, \dots, 8 \leq t \leq 9$) сопряжения \mathbf{B} -сплайн-кривой, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\overline{p_5} \quad x_{p_5} &= -\frac{35}{2} + \frac{9}{2}t + \frac{3}{2}(t-4)^2 - \frac{4}{3}(t-4)^3, \\ y_{p_5} &= -\frac{13}{6} + \frac{5}{2}t - \frac{1}{2}(t-4)^2 - (t-4)^3, \quad 4 \leq t \leq 5; \\ \overline{p_6} \quad x_{p_6} &= -\frac{37}{3} - \frac{5}{2}(t-5)^2 + \frac{7}{2}t, \\ y_{p_6} &= \frac{49}{3} - \frac{3}{2}t - \frac{7}{2}(t-5)^2 + \frac{5}{3}(t-5)^3, \quad 5 \leq t \leq 6; \\ \overline{p_7} \quad x_{p_7} &= \frac{91}{6} - \frac{3}{2}t - \frac{5}{2}(t-6)^2 + \frac{1}{2}(t-6)^3, \\ y_{p_7} &= \frac{53}{2} - \frac{7}{2}t + \frac{1}{6}(t-6)^3 + \frac{3}{2}(t-6)^2, \quad 6 \leq t \leq 7; \\ \overline{p_8} \quad x_{p_8} &= \frac{113}{3} - 5t - (t-7)^2 + \frac{11}{6}(t-7)^3, \\ y_{p_8} &= \frac{11}{3} + 2(t-7)^2 - \frac{1}{2}(t-7)^3, \quad 7 \leq t \leq 8; \\ \overline{p_9} \quad x_{p_9} &= \frac{21}{2} - \frac{3}{2}t + \frac{9}{2}(t-8)^2 - (t-8)^3, \\ y_{p_9} &= -\frac{89}{6} + \frac{5}{2}t + \frac{1}{2}(t-8)^2 - \frac{1}{3}(t-8)^3, \quad 8 \leq t \leq 9.\end{aligned}$$

Полученная в результате вычислений замкнутая выпуклая \mathbf{B} -сплайн-кривая (рис. 7) имеет шесть вер-

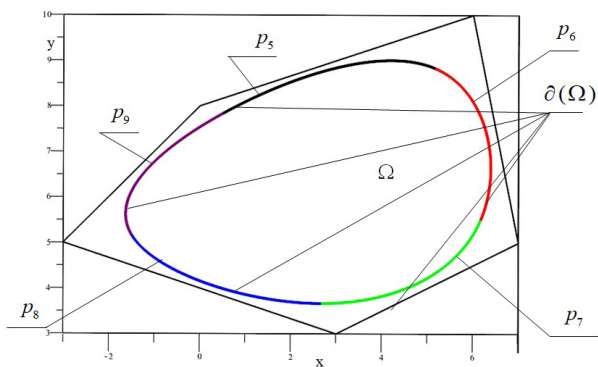
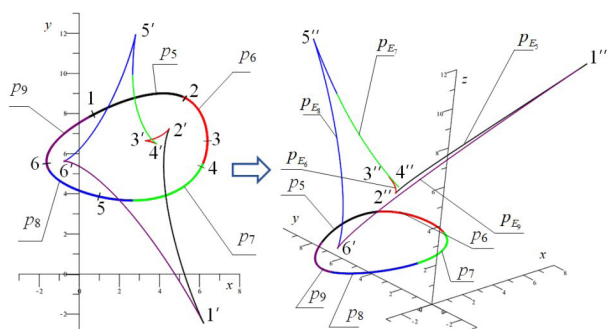
Рис. 7. Граничный контур $\partial(\Omega)$ в форме В-сплайн-кривой

Рис. 8. Граничный контур и пространственный образ его эволюты

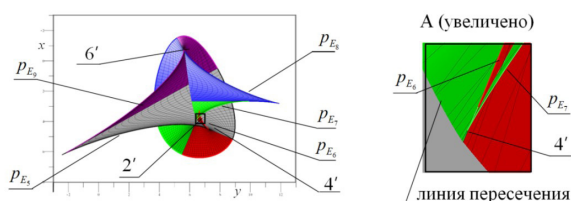
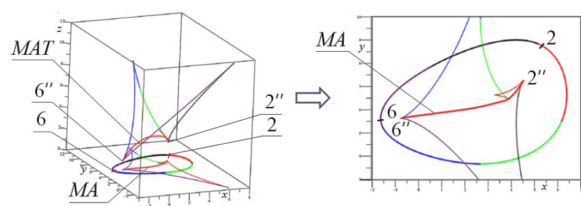
Рис. 9. Визуализация пересечения α -поверхностей

Рис. 10. Визуализация линии MAT по результатам вычисления

шин с чередующимися максимумами и минимумами кривизны (рис. 8).

Вычисленные вершинные точки на кривой $\partial(\Omega)$ позволяют разделить её на три участка 6-1-2, 2-3-4, 4-5-6, границы которых — три вершинные точки 2, 4, 6 с максимальной кривизной. Эти участки принимаются за первые направляющие трех α -поверхностей (по числу пар вершинных точек 6-2, 2-4, 4-6 с максимальной кривизной), у которых вторыми направляющими служат пространственные образы эволюты этих участков. Разбивка полученной В-сплайн-кривой на новые сегменты, гра-

ницами которых теперь будут только вершинные точки, потребует произвести перепараметризацию этой кривой. Отметим, что эта разбивка не влияет на геометрию формируемой МАТ.

Рассмотрение пар вторых направляющих линий построенных трех α -поверхностей: $6''-1''-2''$, $2''-3''-4''$, $4''-5''-6''$ позволяет выявить их общие точки $2''$, $4''$, $6''$, которые, будучи соответственными точкам В-сплайн-кривой $\partial(\Omega)$ с максимальной кривизной, могут принадлежать искомой линии МАТ, при этом ортогональные проекции точек заострения $1''$, $3''$, $5''$ (точки с z_{\max}) на каждой из этих направляющих линий представляют собой на плоскости $z=0$ вершинные точки с наименьшей кривизной. Из трех точек $2''$, $4''$, $6''$ две точки $2''$ и $6''$ соответствуют вершинным точкам 2 и 6 с кривизной, большей, чем у точки 4 контура $\partial(\Omega)$. Кроме того, точки $2''$ и $6''$ являются, как следует из эволюты $1'-2'-3'-4'-5'-6'$, граничными точками искомой линии МАТ для заданного выпуклого контура $\partial(\Omega)$. Точка же $4''$, как следует из результатов вычислений и визуализации (рис. 9), не принадлежит линии МАТ. Результаты выполненных вычислений визуализированы на рис. 10.

Рассмотренный пример подтверждает существование линии МАТ для выпуклого контура $\partial(\Omega)$ в форме В-сплайн-кривой, поскольку существуют точки $2'$ и $6'$, принадлежащие этой линии. Линию МАТ получаем как множество точек пересечения образующих прямых линий α -поверхностей. Для этого по общему уравнению $\bar{P}_{\alpha_i}(t, I_i) = p_i(t) + I_i(p_{E_i}(t) - p_i(t))$ предварительно выполняется аналитическое формообразование α -поверхностей $\bar{P}_{\alpha_5}(t, I_5)$, $\bar{P}_{\alpha_6}(t, I_6)$, $\bar{P}_{\alpha_7}(t, I_7)$, $\bar{P}_{\alpha_8}(t, I_8)$ и $\bar{P}_{\alpha_9}(t, I_9)$, где $p_i(t)$ и $p_{E_i}(t)$ — параметрические уравнения сегментов и пространственных образов эволюты этих сегментов, определяемых по формулам $x_{E_i} = x_{e_i}(t)$, $y_{E_i} = y_{e_i}(t)$, $z_{E_i}(t) = \sqrt{(x_{p_i} - x_{E_i})^2 + (y_{p_i} - y_{E_i})^2}$.

Обсуждение результатов. Анализ результатов вычислений в примерах 1 и 2 позволяет сделать следующие выводы:

1. Для граничного контура $\partial(\Omega)$ в форме отдельных кривых второго порядка либо обводов из их сегментов может быть получено аналитическое решение обратной задачи циклографического моделирования кривой линии.

2. Оптимальная разбивка заданной циклографической проекции $\bar{p}_c(t)$ на составляющие для построения линии МАТ достигается, если граничными точками составляющих являются вершинные точки кривой $\bar{p}_c(t)$.

3. Для выпуклого контура $\partial(\Omega)$ две его точки с наибольшей кривизной определяют границы линии МАТ.

4. Не каждая точка выпуклого контура $\partial(\Omega)$ с максимальной кривизной определяет точку линии МАТ, т.е. могут существовать линии пересечения α -поверхностей, которые не входят в состав определяемой линии МАТ.

Заключение. Результаты работы доказывают, что принятие контура области на плоскости в качестве циклографической проекции кривой линии пространства позволяет однозначно построить эту кривую. Предложенная геометрическая модель решения этой задачи отличается от известных её решений простотой и точностью вычислительного алгоритма, который для контура области в форме кривых второго порядка приводит к аналитическому решению рассматриваемой задачи. Для более сложных контуров области предложен алго-

ритм аналитического определения искомой кривой в виде дискретного ряда таких точек.

Библиографический список

- Pottmann H., Wallner J. Computational line geometry. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 2010. 572 p. ISBN 9783540420583.
- Панчук К. Л., Кайгородцева Н. В. Циклографическая начертательная геометрия. Омск: Изд-во ОмГТУ, 2017. 232 с.
- Panchuk K. L., Lyubchinov E. V. Spatial cyclographic modeling on Naumovich hyperdrawing // Journal Biuletyn of Polish Society for Geometry and Engineering Graphics. 2018. Vol. 31. P. 69–78.
- Panchuk K. L., Lyubchinov E. V., Myasoedova T. M. Computer aided geometric modeling of solutions to the tasks of applied cyclography // CEUR Workshop Proceedings (GraphiCon 2019, Computer Graphics and Vision). 2020. Vol. 2485. P. 185–188. DOI: 10.30987/graphicon-2019-2-185-188.
- Lyubchinov E.V., Panchuk K. L. Solution of the task of planar geometric optics with a nonstationary source // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1260: Mechanical Science and Technology Update (MSTU-2019). P. 072012. DOI: 10.1088/1742-6596/1260/7/072012.
- Lyubchinov E. V., Panchuk K. L. Geometric modeling of solutions of the direct and inverse tasks of geometric optics on a plane // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2019. Vol. 1210. P. 012087. DOI: 10.1088/1742-6596/1210/1/012087.
- Panchuk K. L., Lyubchinov E. V., Myasoedova T. M. Cyclographic Model of Automotive Road Surface Form Design // Advances in Intelligent Systems and Computing. 2021. Vol. 1296. P. 164–174. DOI: 10.1007/978-3-030-63403-2_15.
- Zezhong C., Qiang F. An efficient, accurate approach to medial axis transforms of pockets with closed free-form boundaries // Engineering with Computers. 2014. 30. P. 111–123. DOI: 10.1007/s00366-012-0295-5.
- Held M. On the computational geometry of pocket machining. Lecture notes in computer science. Springer Verlag. Berlin. 1991. Vol. 500. 184 p. ISBN 978-3-540-54103-5. DOI: 10.1007/3-540-54103-9.
- Choi H. I., Chang Y. H., Hwan P. M. [et al.]. Medial axis transform and offset curves by Minkowski Pythagorean hodograph curves // CAD Computer Aided Design. 1999. Vol. 31 (1). P. 59–72. DOI: 10.1016/S0010-4485(98)00080-3.
- Muthuganapathy R., Gurumoorthy B. Constructing Medial Axis Transform of Planar Domains // Computer-Aided Design. 2003. Vol. 35 (7). P. 619–632. DOI: 10.1016/S0010-4485(02)00085-4.
- Degen W. L. F. Exploiting curvatures to compute the medial axis for domains with smooth boundary // Computer-Aided Design. 2004. Vol. 21 (7). P. 641–660. DOI: 10.1016/j.cagd.2004.03.005.
- Peethambaran J., Parakkat A. D., Muthuganapathy R. A Voronoi based Labeling Approach to Curve Reconstruction and Medial Axis Approximation // Conference: Pacific Graphics. 2015. P. 77–82.
- Berg G., Julian W., Mines R. [et al.]. The constructive Jordan curve theorem // Rocky Mountain Journal of Mathematics. 1975. Vol. 5, № 2. P. 225–236.
- Голованов Н. Н. Геометрическое моделирование. Москва: Физматлит, 2002. С. 472.

МЯСОЕДОВА Татьяна Михайловна, старший преподаватель кафедры «Инженерная геометрия и САПР» Омского государственного технического университета (ОмГТУ), г. Омск.

SPIN-код: 6056-6455

AuthorID (РИНЦ): 686836

ORCID: 0000-0002-9641-9417

AuthorID (SCOPUS): 57201776004

ResearcherID: E-7505-2014

Адрес для переписки: mtm44mtm44@mail.ru

ПАНЧУК Константин Леонидович, доктор технических наук, доцент (Россия), профессор кафедры «Инженерная геометрия и САПР» ОмГТУ, г. Омск.

SPIN-код: 5623-0008

AuthorID (РИНЦ): 501163

ORCID: 0000-0001-9302-8560

AuthorID (SCOPUS): 55857766100

ResearcherID: S-2788-2017

Адрес для переписки: Panchuk_KL@mail.ru

ЛЮБЧИНОВ Евгений Владимирович, старший преподаватель кафедры «Инженерная геометрия и САПР» ОмГТУ, г. Омск.

SPIN-код: 8144-6370

AuthorID (РИНЦ): 917932

ORCID: 0000-0003-2499-4866

AuthorID (SCOPUS): 57199399265

ResearcherID: D-1882-2019

Адрес для переписки: Lubchinov.E.V@yandex.ru

Для цитирования

Мясоедова Т. М., Панчук К. Л., Любчинов Е. В. Обратная задача циклографического моделирования пространственной кривой // Омский научный вестник. 2022. № 2 (182). С. 21–27. DOI: 10.25206/1813-8225-2022-182-21-27.

Статья поступила в редакцию 10.02.2022 г.

© Т. М. Мясоедова, К. Л. Панчук, Е. В. Любчинов