УДК 514.76+519.17
DOI: 10.25206/1813-8225-2022-182-17-20

В. Ю. ЮРКОВ

Омский государственный
технический университет,
г. Омск

СЕМЕЙСТВА ИЗОЛИНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ С ПРЯМОУГОЛЬНОЙ МЕТРИКОЙ

В статье рассматриваются плоские неточечные множества, порождаемые линейными условиями, которые реализуются в ортогональной метрике (метрике городских кварталов или манхэттенской метрике). Линейными условиями названы условия, выражающиеся конечной суммой произведений расстояний на числовые коэффициенты. В качестве фигур, определяющих линейные условия, рассматриваются линейные множества. Рассматриваются конструктивные решения следующей общей геометрической задачи: для заданного на плоскости с прямоугольной метрикой конечного множества фигур (отрезков, многоугольников, ...), находящихся в общем положении, построить множества, удовлетворяющие какому-либо заданному линейному условию. Множества ломаных, удовлетворяющих данным условиям, образуют семейства изолиний данного условия для заданных множеств. Алгоритм основан на построении решетки Ханана и поведения изолиний в каждом узле и каждой ячейке решетки.

Ключевые слова: прямоугольная метрика, расстояние, линейные условия, решетка Ханана, семейства изолиний, многоугольники.

Введение. Структурированные системы и их геометрические модели, играющие значительную роль в различных областях знаний, строятся в пространствах с определенной метрикой. Чаще всего они реализуются в пространствах с евклидовой метрикой. Однако существует целый ряд задач геометрического характера, описанных в пространстве с прямоугольной метрикой. Например, задачи оптимального размещения, задачи трассировки и др.

Класс прикладных задач, решаемых в прямоугольной метрике, достаточно широк и привлекает все большее внимание в связи с развитием процесса цифровой поддержки. Например, к такому классу относятся задачи проектирования систем управления, задачи размещения пунктов экстренной помощи, задачи размещения систем слежения, задачи компоновки, задачи размещения элементов при проектировании электронных изделий и т. п. [1–3].

Все эти задачи и подходы к их геометрическому моделированию и решению характеризуются тем, что, во-первых, они рассматриваются в пространствах с евклидовой метрикой, во-вторых, объекты пространства рассматриваются как точечные, в-третьих, в основном рассматриваются подходы к решению минимаксных задач размещения и проектирования (построение кратчайших деревьев Штейнера) [4–8].

Это дает основание утверждать, что разработка геометрических моделей структурированных систем и процессов в пространствах с неевклидовой или с неоднородной метрикой является актуальной, а инженерная геометрия может получить новое направление прикладных исследований, тесно связанное с современными цифровыми системами поддержки принятия решений.

Настоящая статья является продолжением статьи автора, опубликованной в журнале «Геометрия и графика» [9].

Предварительные сведения. Линейными условиями назовем условия, записанные в виде линейной формы расстояний между множествами. Пусть A, B, C, ..., A_1, A_2, ... — различные точечные множества в пространстве, X, Y, ... — точечные множества, получающиеся в результате выполнения каких-либо условий. К линейным условиям отнесем следующие условия.

1. $d(AX) = \mathrm{const}$ — множество X точек пространства, удаленных от данного множества A на данное расстояние.

2. $d(AX) = d(BX) = ... = \mathrm{const}$ — множество X точек пространства, удаленных от данных множеств на данное расстояние (условие равной удаленности).

3. $a \cdot d(AX) = b \cdot d(BX) = ... = \mathrm{const}$ — условие пропорциональной удаленности от данных множеств.

4. $a \cdot d(AX) \pm b \cdot d(BX) \pm ... = ... = \mathrm{const}$ — общее линейное условие.

Если результатом выполнения условий является пустое множество ($X = \varnothing$), то такие условия называются несовместными.

Для заданных одноточечных множеств A_1, A_2, ..., A_k решение задач построения множества X основывается на порождаемой данными точками решетке Ханана [10]. На рис. 1 показана решетка Ханана для $n = 2$, $k = 5$.

Прямоугольник A_1BCD называется прямоугольным координатным замыканием множества A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Если среди точек заданного множества нет точек с совпадающими значениями координат, то возможны два случая:

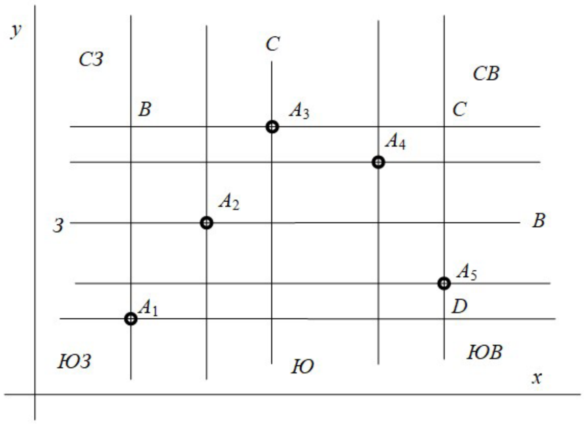

Рис. 1. Решетка Ханана для пяти точек в плоскости

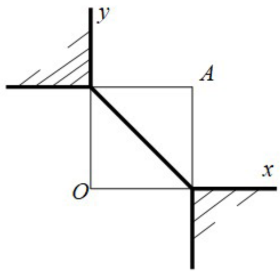

Рис. 2. Множество точек, равноудаленных от точек O и A

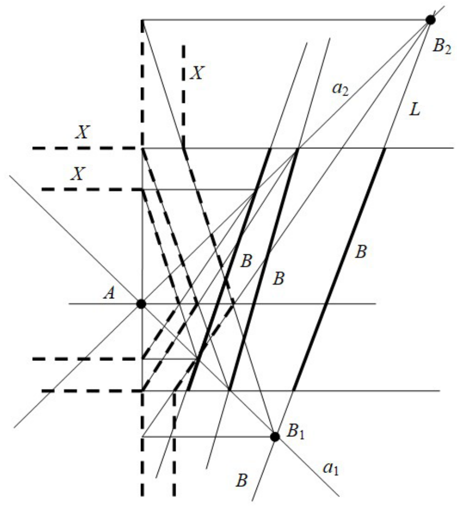

Рис. 3. Множества *X*, определенные условием *d*(*AX*) = *d*(*XB*)

1) одна из точек находится в вершине прямоугольного замыкания, две другие — на сторонах, не смежных с этой вершиной;

2) четыре точки находятся на сторонах замыкания.

Решетка Ханана делит плоскость на $(k + 1)^2$ прямоугольных подобластей.

Свойства образов линейных условий следующие.

Свойство 1. Множество, определенное линейными условиями, имеет образы в виде конечного числа точек, линий или подобластей.

Доказывать, что образами условий могут быть точки и линии, нет необходимости. Докажем, что образами условий могут быть области. Пусть $n = 2$ и пусть дана точка $A(x_A, y_A)$, $|x_A| = |y_A| \neq 0$.

Рассмотрим простейшее условие $d(OX) = d(AX)$. Возьмем любую точку $B(x_B, y_B)$, $x_B \leq 0$, $y_B \geq y_A$. Тогда $|OB| = |y_A| + |y_B| + |x_B|$, $|AB| = |x_A| + |x_B| + |y_B|$. Но $|x_A| = |y_A|$. Следовательно, $|OB| = |BA|$.

Результатом этого условия будет множество $X = \{x \leq 0,\ y \geq y_A\} \cup \{x_A + y_A = x_A,\ x > 0,\ y > 0\} \cup \cup \{x \geq x_A,\ y \leq 0\}$ (рис. 2).

Свойство 2. Множество, определенное совместными линейными условиями и являющееся линией, представляет собой ломаную, каждое звено которой имеет свое направление в подобластях решетки.

Пусть B — точка ломаной в какой-нибудь подобласти решетки и пусть для этой точки выполняется заданное линейное условие. Линейное условие можно трактовать как градиент изменения значения линейной формы расстояний с началом в точке B. В пределах этой подобласти вклад каждой компоненты в градиент остается неизменным и результат условия не изменится при движении точки B перпендикулярно градиенту. Однако на границе подобласти вклад какой-либо одной или нескольких компонент изменится, и градиент изменит свое направление. Следовательно, в каждой подобласти решетки звено ломаной будет иметь свое направление.

Свойство 3. Любое линейное условие сопоставляет каждому узлу решетки некоторое числовое значение — значение линейной формы расстояний в данной точке. Изменение значений вдоль отрезка решетки между соседними узлами равномерное.

Свойство 4. В каждой подобласти решетки одному из узлов будет соответствовать минимальное значение линейной формы расстояний, а другому, ему противоположному, максимальное. Или на одной стороне подобласти будет постоянное минимальное значение, а на противоположной стороне — максимальное постоянное.

Два последних свойства позволяют создать простейший алгоритм построения множества уровня для заданного множества точек и заданного линейного условия.

Шаг 1. Определение координат всех узлов решетки Ханана.

Шаг 2. Подсчет числовых значений заданного условия во всех узлах решетки.

Шаг 3. Определение вершин ломаной линии уровня на соответствующих отрезках решетки.

Неточечные множества. Рассмотрим случай, когда исходные множества являются линейными, но не одноточечными. Например, отрезки, прямые, многоугольники и т.п.

Пусть $A(x_A, y_A)$ — точка, B — отрезок прямой L: $ax + by + c = 0$, $|a| > |b|$. Расстояние $d(AL)$ определяется по формуле $d(AL) = |x_A - (b/a)y_A - c/a|$, то есть определяется длиной отрезка, параллельного оси Ox.

Возможны следующие случаи:

1) $d(AX) = d(XL)$ — условие равной удаленности или условие параболического типа;

2) $d(AX) + d(XL) = \mathrm{const} > 0$ — условие эллиптического типа;

3) $d(AX) - d(XL) = \mathrm{const} > 0$ — условие гиперболического типа.

Пусть $d(AX) = d(XB)$. На прямой L имеются две точки B_1 и B_2, являющиеся точками пересечения с прямыми a_1 и a_2: $|x - x_A| = |y - y_A|$. Множество X в общем случае будет представлять собой четырехзвенную ломаную. Соответствующее построение показано на рис. 3.

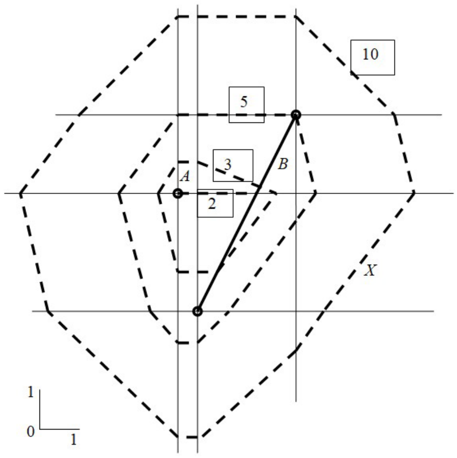

Рис. 4. Изолинии X для $d(AX) + d(XL) \geq 2$

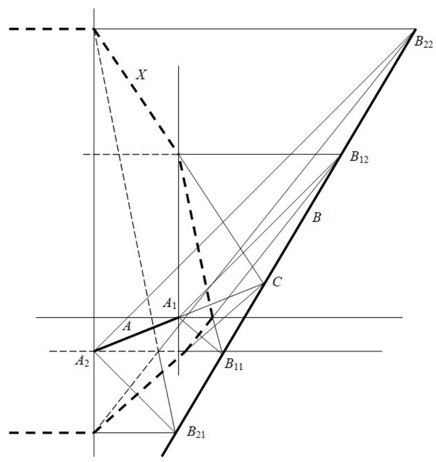

Рис. 6. Множество X, равноудаленное от отрезка $A = A_1A_2$ и прямой B

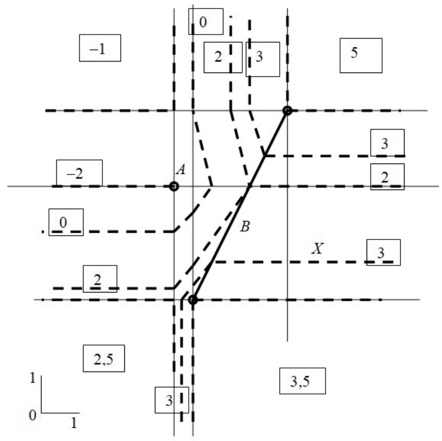

Рис. 5. Изолинии X для $-2 \leq d(AX) - d(XL) \leq 5$

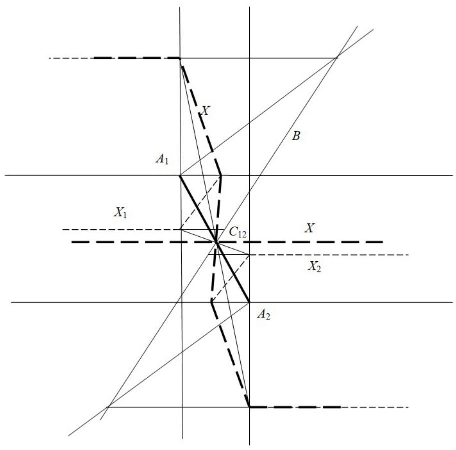

Рис. 7. Множество $X = X_1 \cup X_2$, равноудаленное от отрезка A_1A_2 и прямой B

Пусть $d(AX) + d(XL) = \text{const} > 0$ или $d(AB) \leq \leq d(AX) + d(XL) < +\infty$. Построение множества X основывается на свойствах 2 и 3 и показано на рис. 4. Изменение направления изолиний происходит не только в точках пересечения с решеткой, но и в точках пересечения с заданным отрезком.

Если $d(AX) - d(XL) = \text{const} > 0$ или точнее, если $-\min\, d(AB) \leq d(AX) - d(XL) \leq \max\, d(AB)$, то изолинии определяются условием гиперболического типа. Построение показано на рис. 5.

Пусть $A = [A_1A_2]$ — отрезок, а B — прямая. Рассмотрим условие равной удаленности без доказательств.

Теорема 1. Множество X, равноудаленное от отрезка A и прямой B, представляет собой выпуклую оболочку множества $X_1 \cup X_2$, где X_1 определяется условием $\mathrm{d}(\mathrm{A}1X_1) = \mathrm{d}(X_1\mathrm{B})$, X_2 определяется условием $\mathrm{d}(\mathrm{A}2X_2) = \mathrm{d}(X_2\mathrm{B})$.

Теорема 2. Множество X_1, определенное условием $d(A_1X_1) = d(X_1B)$, и множество X_2, определенное условием $d(A_2X_2) = d(X_2B)$, гомотетичны с центром гомотетии $C = A \cap B$ и коэффициентом $d(A_2C)/d(A_1C)$.

Построение множества X, основанное на этих теоремах, приведено на рис. 6.

Теорема 3. Множество X точек, равноудаленных от выпуклого многоугольника $A = A_1A_2...A_k$ и прямой B, $A \cap B = \varnothing$, представляет собой выпуклую оболочку множества $X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_k$, где $d(A_iX_i) = = d(X_iB_i)$, $i = 1, ..., k$.

В случае, когда отрезок $A = [A_1A_2]$ пересекает прямую B, возможны два варианта: A и B принадлежат одному типу прямых или A и B принадлежат разным типам прямых. В первом варианте множество X представляет собой объединение пятизвенной ломаной, гомотетичной самой себе относительно центра C_{12}, $C_{12} = A \cap B$, и прямой, проходящей через C_{12} параллельно оси Ox (рис. 7). При этом среднее звено ломаной соединяет средние вершины ломаных X_1 и X_2, а два крайних звена совпадают со звеньями ломаных X_1 и X_2. Во втором варианте X является объединением двух трехзвенных ломаных, гомотетичных самим себе относительно центра C_{12}. При этом средние звенья соединяют крайние гомотетичные вершины ломаных X_1 и X_2, а крайние звенья совпадают с крайними звеньями ломаных X_1 и X_2.

Обобщение на многомерное пространство. В пространстве с прямоугольной системой координат $Ox_1... x_n$ и прямоугольной метрикой расстояние от точки $A(x_{1A}, ..., x_{nA})$ определяется по формуле $d(OA) = |OA| = |x_{1A}| + ... + |x_{nA}|$. Расстояние между точками A и B рассчитывается по формуле $d(AB) = |AB| = |x_{nB} - x_{1A}| + ... + |x_{nB} - x_{nA}|$. Расстояние от начала координат до k-плоскости X^k будет определяться как минимальное расстояние $d(OX^k) = \min(d(OA)\colon A \in X^k)$. В связи с этим сформулируем следующую теорему.

Теорема 4. Расстояние от начала координат до k-плоскости общего положения определяется как минимальное расстояние из $n!/(n - k)!k!$ расстояний от начала координат до следов k-плоскости на $(n - k)$-плоскостях системы координат.

Строгое доказательство слишком длинно. Поэтому обоснуем теорему кратко. В случае $n = 2$, $k = 1$ все очевидно. В случае $n = 3$, $k = 2$ все доказывается достаточно просто. В случае $n = 3$, $k = 1$ ситуация менее очевидна. Простое обоснование следующее. Множество точек, равноудаленных от начала координат, описывается уравнением $|x| + |y| + |z| = d > 0$ и геометрически представляет собой поверхность октаэдра. Увеличивая или уменьшая параметр d, можно прийти к такому его значению, при котором заданная прямая общего положения коснется октаэдра в точке его ребра. Эта точка лежит в одной из координатных плоскостей. Остальное очевидно.

Последнее рассуждение легко обобщить на многомерное пространство. Множество точек, равноудаленных от начала координат, описывается уравнением $|x_1| + ... + |x_n| = d > 0$ и геометрически представляет собой многомерный аналог октаэдра. Изменяя параметр d можно прийти к такому его значению, при котором заданная k-плоскость общего положения коснется его в какой-либо точке $(n - k)$-мерной грани. Поскольку точка касания обязательно будет лежать в $(n - k)$-мерной координатной плоскости, соответствующей этой грани, то это обосновывает теорему.

Заключение. В данной статье были рассмотрены некоторые общие свойства семейств изолиний плоскости, порождаемые линейными неточечными фигурами и удовлетворяющие линейным условиям, записанными в виде линейной формы расстояний между множествами. Расстояние определялись в прямоугольной метрике. Изучение описанных конструкций можно продолжать в следующих направлениях. Во-первых, можно рассматривать нелинейные фигуры как основы для образования семейств изолиний при линейных условиях. Во-вторых, необходимо ввести в рассмотрение нелинейные условия, что будет порождать нелинейные семейства изолиний с новыми свойствами. Оба эти направления могут найти технические приложения, упомянутые во введении. В-третьих, предлагаемая теория может быть обобщена на многомерные пространства. Отдельные элементы теории встречаются в [11].

Библиографический список

1. Кривулин Н. К., Плотников П. В. Об алгебраическом решении задачи Ролса о размещении на плоскости с прямоугольной метрикой // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2015. Т. 2, № 2. С. 194—201.
2. Francis R. L. A geometrical solution procedure for a rectilinear distance minimax location problem // AIIE Trans. 1972. Vol. 4, № 4. P. 328—332.
3. Малинаускас К. К. Специальная диаграмма Вороного для построения графа ограничений в задачах топологического проектирования СБИС // Известия вузов. Электроника. 2007. № 3. С. 24—31.
4. Малинаускас К. К. Динамическое построение абстрактных диаграмм Вороного // Фундаментальная и прикладная математика. 2007. Т. 13, № 2. С. 141—154.
5. Куспеков К. А. Моделирование инженерных сетей кратчайшими связывающими линиями // Вестник Национальной академии наук Республики Казахстан. 2010. № 3. С. 98—100.
6. Нечепуренко М. С., Ольшевский А. И. Исследование и разработка алгоритма построения деревьев Штейнера для случая ортогональной метрики в трехмерном пространстве // Информатика, управляющие системы, математическое и компьютерное моделирование: сб. материалов VIII Междунар. науч.-техн. конф. Донецк: Изд-во ДонНТУ, 2017. С. 464—469.
7. Медведева О. Н. Моделирование и оптимизация межпоселковых систем газораспределения // Вестник Волгоград. гос. арх.-строит. ун-та. Серия: Строительство и архитектура. 2012. № 28. С. 135—142.
8. Куспеков К. А. Алгоритм построения оптимальной конфигурации газораспределительной сети на плоскости с ортогональной метрикой // Омский научный вестник. 2012. № 1 (107). С. 14—16.
9. Юрков В. Ю. Образы линейных условий на плоскости с прямоугольной метрикой // Геометрия и графика. 2020. Т. 8, № 1. С 3—14. DOI: 10.12737/2308-4898-2020-3-14.
10. Hanan M. On Steiner's problem with rectilinear distance // Siam Journal on Applied Mathematics. 1966. Vol. 14, № 2. P. 255—265. DOI:10.1137/0114025.
11. Mohamed H. A., Abdelhafez Y. A. A. On the Bisectors of Weakly Separable Sets // Journal for Geometry and Graphics. 2000. Vol. 4, № 1. P. 19—30.

ЮРКОВ Виктор Юрьевич, доктор технических наук, профессор (Россия), профессор кафедры «Конструирование и технология изделий легкой промышленности» Омского государственного технического университета, г. Омск.
SPIN-код: 2414-1438
AuthorID (РИНЦ): 173644
AuthorID (SCOPUS): 55857657200
Адрес для переписки: viktor_yurkov@mail.ru

Для цитирования

Юрков В. Ю. Семейства изолиний в пространстве с прямоугольной метрикой // Омский научный вестник. 2022. № 2 (182). С. 17—20. DOI: 10.25206/1813-8225-2022-182-17-20.

Статья поступила в редакцию 12.02.2022 г.