

КОНСТРУКТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ ФОРМИРОВАНИЯ СОСТАВНЫХ КУБИЧЕСКИХ КРИВЫХ БЕЗЬЕ В ПРОСТРАНСТВЕ И НА ПЛОСКОСТИ

В статье рассмотрены два графоаналитических алгоритма. Первый алгоритм позволяет формировать пространственную кривую, проходящую через заданные узловые точки с указанными в этих точках направляющими векторами. Второй алгоритм позволяет формировать плоскую составную кривую, проходящую через заданные узловые точки с указанными в этих точках направляющими векторами и радиусами кривизны. Конструируемые кривые образуют кубическими сегментами в форме Безье. Направляющие векторы рассматриваются как элемент управления формой конструируемой кривой. В узловых точках обеспечивается геометрическая гладкость второго порядка, обусловленная непрерывностью наклона и кривизны. Отличительная особенность предлагаемых алгоритмов заключается в существенном использовании конструктивных средств компьютерной графики.

Ключевые слова: кубический сегмент, направляющий вектор, кривизна, кручение, геометрическая гладкость.

Введение. Кубические кривые в форме Безье широко применяются в геометрическом моделировании благодаря своей простоте и ясному смыслу векторных коэффициентов, входящих в уравнения кривой Безье. Плоские кубические кривые Безье входят в стандартный набор геометрических примитивов практически всех пакетов компьютерной графики [1]. Сложнее найти инструментальные средства для моделирования и визуализации пространственных кубических сегментов Безье. Еще более затруднительно с помощью стандартных средств компьютерной графики сформировать составную кубическую кривую Безье, удовлетворяющую наперед заданным граничным условиям и требованиям гладкости. Научные издания и учебные руководства не уделяют достаточного внимания вопросам формирования составных кривых, ограничиваясь исследованием геометрических свойств отдельных сегментов. Задача гладкого соединения сегментов решается, как правило, в рамках концепции параметрической гладкости, предполагающей совпадение векторных производных соединяемых сегментов в точке стыка как по направлению, так и по модулю [2–4]. В энциклопедическом издании [5] имеется лишь пять страниц (с. 452–456), посвященных геометрической непрерывности составных кривых. В работе [6] рассматриваются плоские кубические кривые без обсуждения условий их гладкого сопряжения. Наиболее полно условия формирования геометрически гладких составных кривых рассматриваются в [7–11], но конвертация этих условий в практически приемлемые алгоритмы требует определенной математической грамотности.

В связи с этим представляется актуальной разработка конструктивных алгоритмов формирования

гладких составных кривых Безье, пригодных для реализации в любом графическом пакете, поддерживающем трехмерную графику. Представленные в статье пошаговые алгоритмы могут быть полезны в проектировании и в учебном процессе.

Постановка задачи. В ортонормированном базисе хуз даны точки $R_0, R_1, R_2, \dots, R_n$ с указанными в этих точках единичными направляющими векторами $T_0, T_1, T_2, \dots, T_n$. Через данные точки требуется провести G^2 -гладкую составную кривую (геометрически гладкую кривую второго порядка гладкости), касающуюся указанных векторов. Направляющие векторы могут рассматриваться либо как наперед заданные геометрические условия, либо как элемент управления формой конструируемой кривой.

Для конструктивного решения задачи в статье используются кубические сегменты в форме Безье

$$\mathbf{r}_i(t) = (1-t)^3 \mathbf{R}_{i-1} + 3t(1-t)^2 \mathbf{Q}_i + 3t^2(1-t) \mathbf{P}_i + t^3 \mathbf{R}_i, \\ t \in [0, 1], \quad (1)$$

где i — номер сегмента; R_{i-1}, R_i — начальная и конечная точки i -го сегмента; Q_i, P_i — первая и вторая управляющие точки i -го сегмента. Здесь и далее символы R_i, Q_i, P_i обозначают точки как геометрические объекты, а символы $\mathbf{R}_i, \mathbf{Q}_i, \mathbf{P}_i$ обозначают радиус-векторы этих же точек. Декартовы координаты радиус-векторов $\mathbf{R}_i, \mathbf{Q}_i, \mathbf{P}_i$ отнесенные к ортам $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ декартовой системы координат хуз, совпадают с декартовыми координатами точек R_i, Q_i, P_i .

Кривая называется G^2 -гладкой, если ее вектор кривизны

$$\mathbf{K}(t) = \frac{\dot{\mathbf{i}}(t) \times \ddot{\mathbf{i}}(t)}{|\dot{\mathbf{i}}(t)|^3} \quad (2)$$

при изменении параметра t изменяется непрерывно как по модулю, так и по направлению. Для G^2 -гладкой стыковки сегментов $\mathbf{r}_{i-1}(t), \mathbf{r}_i(t)$ необходимо и достаточно обеспечить общую касательную и общий вектор кривизны в точке соединения сегментов: $\mathbf{K}_{i-1}(1) = \mathbf{K}_i(0)$. Геометрическая непрерывность второго порядка, обусловленная непрерывностью наклона и кривизны, не требует совпадения значений первых и вторых производных по обе стороны точки соединения [12]. Векторы первых производных $\dot{\mathbf{r}}_{i-1}(1), \dot{\mathbf{r}}_i(0)$ соединяемых сегментов в стыковой точке R_i должны совпадать по направлению, но могут не совпадать по модулю. Векторы вторых производных $\ddot{\mathbf{r}}_{i-1}(1), \ddot{\mathbf{r}}_i(0)$ находятся в общей для соединяемых сегментов соприкасающейся плоскости, но могут не совпадать ни по направлению, ни по модулю [7].

Искомую кривую предлагается формировать последовательно, постепенно добавляя сегменты. На первый сегмент R_0-R_1 накладываются требования инцидентности точкам R_0, R_1 и касания векторов $\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1$. Как на плоскости, так и в пространстве имеется ∞^2 кубических сегментов, удовлетворяющих указанным требованиям, поэтому пользователь может достаточно произвольно выбирать форму первого сегмента.

Второй сегмент R_1-R_2 , добавляемый к первому, должен удовлетворять граничным условиям $\{R_1, R_2, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{K}_1\}$, то есть проходить через точки R_1, R_2 , касаться векторов $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$ и иметь вектор кривизны \mathbf{K}_1 в своей начальной точке, совпадающий с вектором кривизны в конечной точке первого сегмента.

Следующие сегменты должны удовлетворять аналогичной группе условий. Таким образом, поставленная в статье задача сводится к последовательному построению кубических сегментов Безье $R_{i-1}-R_i$ вида (1), удовлетворяющих граничным условиям $\{R_{i-1}, R_i, \mathbf{T}_{i-1}, \mathbf{T}_i, \mathbf{K}_{i-1}\}$.

Условие G^2 -гладкого соединения кубических сегментов Безье. В системе координат хуз даны точки R_0, R_1, R_2 с инцидентными этим точкам прямыми τ_0, τ_1, τ_2 (рис. 1). Требуется сформировать составную G^2 -гладкую кривую, образованную кубическими сегментами Безье R_0-R_1 и R_1-R_2 . Искомая кривая должна проходить через данные точки и касаться данных прямых.

Пусть первый сегмент R_0-R_1 зафиксирован указанием управляющих точек $Q_1 \in \tau_0, P_1 \in :$

$$\mathbf{r}^{(1)}(t) = (1-t)^3 \mathbf{R}_0 + 3t(1-t)^2 \mathbf{Q}_1 + 3t^2(1-t) \mathbf{P}_1 + t^3 \mathbf{R}_1, \quad t \in [0, 1]. \quad (3)$$

Будем искать управляющие точки $Q_2 \in \tau_1, P_2 \in \tau_2$ второго сегмента R_1-R_2

$$\mathbf{r}^{(2)}(t) = (1-t)^3 \mathbf{R}_1 + 3t(1-t)^2 \mathbf{Q}_2 + 3t^2(1-t) \mathbf{P}_2 + t^3 \mathbf{R}_2, \quad t \in [0, 1]. \quad (4)$$

исходя из условия равенства векторов кривизны первого и второго сегментов в стыковой точке R_1 . Здесь и далее надстрочный индекс в скобках означает номер сегмента, а подстрочный индекс — номер узловой точки.

Согласно (2), условие равенства кривизны сегментов $\mathbf{r}^{(1)}(t)$ и $\mathbf{r}^{(2)}(t)$ в точке R_1 имеет вид

$$\frac{\dot{\mathbf{r}}_1^{(1)} \times \ddot{\mathbf{r}}_1^{(1)}}{|\dot{\mathbf{r}}_1^{(1)}|^3} = \frac{\dot{\mathbf{r}}_1^{(2)} \times \ddot{\mathbf{r}}_1^{(2)}}{|\dot{\mathbf{r}}_1^{(2)}|^3}. \quad (5)$$

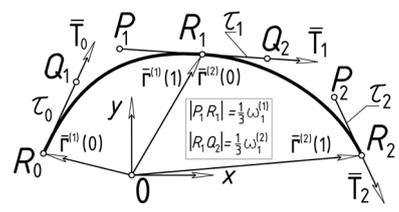


Рис. 1. Соединение сегментов Безье координат XYZ

Запишем первые производные в виде

$$\dot{\mathbf{r}}_1^{(1)} = \omega_1^{(1)} \mathbf{T}_1, \quad \dot{\mathbf{r}}_1^{(2)} = \omega_1^{(2)} \mathbf{T}_1, \quad (6)$$

где $\omega_1^{(1)}, \omega_1^{(2)}$ — модули первых производных в точке R_1 . Подставляя (6) в (5), получаем условие гладкости:

$$\mathbf{T}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1^{(2)} = \mathbf{T}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1^{(1)} \left(\frac{\omega_1^{(2)}}{\omega_1^{(1)}} \right)^2. \quad (7)$$

Условие (7) будет выполнено, если

$$\ddot{\mathbf{r}}_1^{(2)} = \ddot{\mathbf{r}}_1^{(1)} \left(\frac{\omega_1^{(2)}}{\omega_1^{(1)}} \right)^2.$$

Но условие (7) будет выполнено также и в том случае, если к вектору $\dot{\mathbf{r}}_1^{(2)}$ прибавить любой вектор, коллинеарный вектору \mathbf{T}_1 , например, вектор $\mu_1 \dot{\mathbf{r}}_1^{(1)}$, где μ_1 — произвольный скаляр. Получаем условие гладкости

$$\ddot{\mathbf{r}}_1^{(2)} = \ddot{\mathbf{r}}_1^{(1)} \left(\frac{\omega_1^{(2)}}{\omega_1^{(1)}} \right)^2 + \mu_1 \dot{\mathbf{r}}_1^{(1)}, \quad (8)$$

справедливое при любом значении μ_1 .

Дифференцируя (3) и (4), получаем:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_1^{(1)} &= \dot{\mathbf{r}}^{(1)}(1) = 3(\mathbf{R}_1 - \mathbf{P}_1); \\ \ddot{\mathbf{r}}_1^{(1)} &= \ddot{\mathbf{r}}^{(1)}(1) = 6(\mathbf{Q}_1 - 2\mathbf{P}_1 + \mathbf{R}_1) \\ \dot{\mathbf{r}}_1^{(2)} &= \dot{\mathbf{r}}^{(2)}(0) = 3(\mathbf{Q}_2 - \mathbf{R}_1); \\ \ddot{\mathbf{r}}_1^{(2)} &= \ddot{\mathbf{r}}^{(2)}(0) = 6(\mathbf{R}_1 - 2\mathbf{Q}_2 + \mathbf{P}_2). \end{aligned} \quad (9)$$

Подставляя (9) в (8), после алгебраических преобразований получаем известное [13, с. 152] условие G^2 -гладкого соединения сегментов Безье:

$$\mathbf{P}_2 = [(1 + \lambda_1)^2 + 0,5\mu_1] \mathbf{R}_1 + \mathbf{Q}_1 \lambda_1^2 - \mathbf{P}_1 [2\lambda_1(\lambda_1 + 1) + 0,5\mu_1], \quad (10)$$

где $\lambda_1 = \omega_1^{(2)} / \omega_1^{(1)}$. Выражение (10) следует рассматривать как векторную параметрически заданную функцию $\mathbf{P}_2(\lambda_1, \mu_1)$ скалярных параметров λ_1, μ_1 (с фиксированными векторными коэффициентами $\mathbf{R}_1, \mathbf{Q}_1, \mathbf{P}_1$). Функция $\mathbf{P}_2(\lambda_1, \mu_1)$ определяет некоторую поверхность в пространстве хуз. Учитывая, что управляющая точка P_2 должна быть инцидентна наперед заданной касательной τ_2 (см. рис. 1), отметим точку P_2 на пересечении прямой τ_2 с поверхностью $\mathbf{P}_2(\lambda_1, \mu_1)$. В свою очередь, точка P_2 однозначно определит пару значений $\{\lambda_1, \mu_1\}$, удовлетворяющих условию (10).

Положение управляющей точки $Q_2 \in \tau_1$ зависит от λ_1 [14]:

$$Q_2 R_1 = \lambda_1 | P_1 R_1 |. \quad (11)$$

Условия (10), (11) позволяют найти управляющие точки Q_2, P_2 сегмента R_1-R_2 , гладко (с гладкостью G^2) соединенного с фиксированным сегментом R_0-R_1 и касающегося в своей конечной точке R_2 наперед заданной прямой τ_2 . Практическое применение условий (10), (11) рассматривается ниже.

Составная кривая Безье в пространстве. В ортогональной системе координат хуз даны точки R_0, R_1, R_2 с указанными в этих точках касательными τ_0, τ_1, τ_2 . Зафиксированы управляющие точки $Q_1 \in \tau_0, P_1 \in \tau_1$ первого сегмента R_0-R_1 . Требуется к сегменту R_0-R_1 добавить сегмент R_1-R_2 , обеспечив общую касательную τ_1 и общий вектор кривизны K_1 соединяемых сегментов в стыковой точке R_1 .

Задача сводится к построению управляющих точек $Q_2 \in \tau_1, P_2 \in \tau_2$ добавляемого сегмента, удовлетворяющих условиям гладкости (10), (11). В стыковой точке R_1 должны совпадать соприкасающиеся плоскости $Q_1 P_1 R_1$ и $R_1 Q_2 P_2$ соединяемых сегментов, следовательно, точка P_2 должна находиться в соприкасающейся плоскости $Q_1 P_1 R_1$. С другой стороны, точка P_2 инцидентна наперед заданной касательной τ_2 , поэтому точка P_2 определяется на пересечении касательной τ_2 и соприкасающейся плоскости $Q_1 P_1 R_1$:

$$P_2 = \tau_2 \cap Q_1 P_1 R_1. \quad (12)$$

Таким образом, управляющая точка P_2 зафиксирована. Для определения управляющей точки Q_2 требуется найти скалярные величины λ_1, μ_1 , удовлетворяющие условию гладкости (10).

В соприкасающейся плоскости $Q_1 P_1 R_1$ отметим локальную систему координат XU с началом в точке Q_1 и осью $X=Q_1 R_1$. Все точки, входящие в условие (10), лежат в плоскости XU , поэтому это условие можно разложить по осям X, Y . Учитывая, что локальные координаты точки Q_1 и координата Y_1 точки $R_1(X_1, Y_1)$ равны нулю, получаем условие гладкости (10) в скалярной форме:

$$\begin{aligned} X_{p_2} &= [(1 + \lambda_1)^2 + 0,5\mu_1]X_1 - [2\lambda_1(\lambda_1 + 1) + 0,5\mu_1]X_{p_1} \\ Y_{p_2} &= -[2\lambda_1(\lambda_1 + 1) + 0,5\mu_1]Y_{p_1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Входящие в (13) локальные координаты точек $R_1(X_1, 0), P_1(X_{p_1}, Y_{p_1}), P_2(X_{p_2}, Y_{p_2})$ в системе координат XU определяются с помощью справочных средств графического пакета.

Система уравнений (13) содержит неизвестные скалярные величины λ_1, μ_1 . Из второго уравнения находим:

$$0,5\mu_1 = -2\lambda_1(\lambda_1 + 1) - Y_{p_2} / Y_{p_1}. \quad (14)$$

Подставляя (14) в первое уравнение из (13), получаем:

$$\lambda_1^2 = 1 + \frac{Y_{p_2}}{Y_{p_1}} \left(\frac{X_{p_1}}{X_1} - 1 \right) - \frac{X_{p_2}}{X_1}. \quad (15)$$

Определив λ_1 , отмечаем на касательной τ_1 , согласно (11), управляющую точку Q_2 конструируемого сегмента R_1-R_2 . Таким образом, практическое применение условий гладкости (10), (11) сводится к решению типовой задачи начертательной геометрии (построение точки пересечения прямой τ_2 и плоскости $Q_1 P_1 R_1$) и вычислению параметра λ_1

в соответствии с (15). Конструктивная простота применения условий (10), (11) достигнута благодаря использованию вспомогательной системы координат XU и справочных средств применяемого графического пакета.

На основе полученного решения предлагается конструктивный алгоритм, реализуемый с помощью любого программного средства, поддерживающего трехмерную графику («Компас», «Нанокэд», «Симплекс» и др.).

Алгоритм 1. Построение пространственного кубического сегмента Безье, гладко соединенного с фиксированным пространственным сегментом Безье. Дана характеристическая ломаная $R_0 Q_1 P_1 R_1$ фиксированного сегмента R_0-R_1 и конечная точка R_2 добавляемого сегмента R_1-R_2 с указанной в точке R_2 касательной τ_2 .

Требуется найти управляющие точки Q_2, P_2 добавляемого сегмента, исходя из условия (10) гладкого соединения сегментов.

Шаг 1. В «мировой» системе координат хуз средствами трехмерной компьютерной графики указываем характеристическую ломаную $R_0 Q_1 P_1 R_1$ фиксированного сегмента R_0-R_1 , конечную точку R_2 добавляемого сегмента, а также касательную τ_2 в точке R_2 .

Шаг 2. В соприкасающейся плоскости $Q_1 P_1 R_1$ отмечаем локальную систему координат XU с началом в точке Q_1 и осью $X=Q_1 R_1$. Средствами компьютерной графики фиксируем управляющую точку $P_2 = XU \cap \tau_2$ конструируемого сегмента R_1-R_2 . С помощью справочных средств графического пакета определяем локальные координаты точек $R_1(X_1, 0), P_1(X_{p_1}, Y_{p_1}), P_2(X_{p_2}, Y_{p_2})$.

Шаг 3. Подставляя найденные на шаге 2 значения локальных координат точек R_2, P_1, P_2 в выражение (15), вычисляем величину λ_1 . Учитывая (11), отмечаем на касательной τ_1 управляющую точку Q_2 сегмента R_1-R_2 .

Результат: найдены управляющие точки Q_2, P_2 сегмента R_1-R_2 , гладко (с гладкостью G^2) соединенного с фиксированным сегментом R_0-R_1 .

Условие существования решения. Если точка P_2 попадает на касательную τ_1 , то, согласно (15), получаем $\lambda_1 = 0$. Таким образом, касательная τ_1 делит соприкасающуюся плоскость $XU = Q_1 P_1 R_1$ на две области, в одной из которых правая часть выражения (15) отрицательна. Попадание управляющей точки P_2 в эту область означает, что поставленная задача не имеет решения.

Пример 1. В «мировой» системе координат хуз зафиксирована характеристическая ломаная $R_0(0, 0, 0) - Q_1(0, 0, 10) - P_1(-5, -25, 40) - R_1(5, -20, 30)$ кубического сегмента Безье R_0-R_1 . Требуется найти управляющие точки Q_2, P_2 сегмента Безье $R_1-R_2(40, 0, 0)$, гладко соединенного с фиксированным сегментом R_0-R_1 . Касательная τ_2 в точке R_2 совпадает с осью x (рис. 2).

Решение. В «мировой» системе координат средствами трехмерной компьютерной графики указываем характеристическую ломаную $R_0 Q_1 P_1 R_1$ фиксированного сегмента R_0-R_1 , конечную точку R_2 добавляемого сегмента и касательную $\tau_2 = x$ в точке R_2 . В соприкасающейся плоскости $Q_1 P_1 R_1$ отмечаем локальную систему координат XU с началом в точке Q_1 и осью $X=Q_1 R_1$. С помощью средств компьютерной графики находим управляющую точку $P_2 = XU \cap \tau_2$ и ее локальные координаты $P_2(X_{p_2} = -3,04635, Y_{p_2} = -24,4330)$. С помощью справочных средств графического пакета определяем

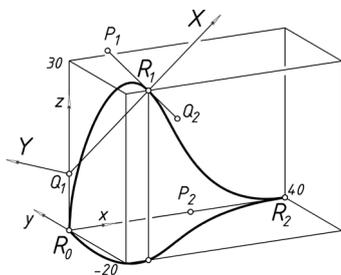


Рис. 2. Составная кривая Безье (к примеру 1)

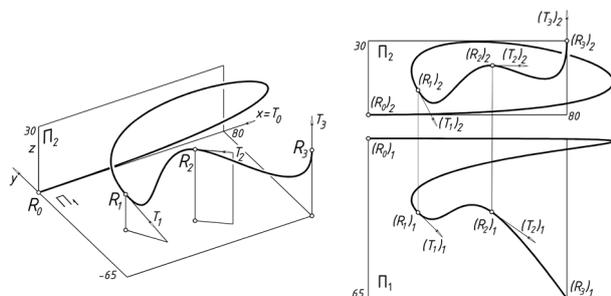


Рис. 3. Модель траектории (к примеру 2): аксонометрия (слева) и двухпроекции чертёж (справа)

локальные координаты точек $R_1(X_1=28,7228, Y_1=0)$, $P_1(X_{p1}=37,4267, Y_{p1}=12,2165)$.

Подставляя найденные локальные координаты точек R_1, P_1, P_2 в уравнение (15), вычисляем величину $\lambda_1=0,7071$. Учитывая (11), отмечаем на касательной τ_1 управляющую точку Q_2 сегмента R_1-R_2 . Возвращаясь в «мировую» систему координат хуз, определяем (с помощью справочных средств графического пакета) координаты управляющих точек $Q_2(12,0711; -16,4644; 22,9289)$, $P_2(22,5; 0; 0)$ в «мировой» системе координат. Раскладывая уравнение (4) по осям x, y, z , находим скалярные уравнения пространственного сегмента Безье R_1-R_2 . Меняя параметр t в диапазоне от 0 до 1, вычисляем координаты точек сегмента и получаем его визуальное изображение (см. рис. 2).

Пример 2. Управляемый объект стартует с большой скоростью вдоль оси x «мировой» системы координат хуз (точка старта R_0 — начало координат), и в точке $R_3(80, -65, 30)$ уходит вертикально вверх (рис. 3). Траектория должна пройти через промежуточные пункты $R_1(20, -30, 10)$ и $R_2(50, -30, 20)$. В пункте R_1 задан нисходящий направляющий вектор $T_1(0,4575; -0,4575; -0,7625)$, заставляющий движущийся объект сделать «петлю» и изменить направление движения более чем на 90° относительно первоначального направления. В точке R_2 объект должен сделать «горку» (задан почти горизонтальный единичный направляющий вектор $T_2(0,8130; -0,5807; -0,04206)$). Требуется смоделировать физически правдоподобную траекторию движения объекта.

Решение. Движение материального тела без воздействия внешних возмущающих факторов характеризуется непрерывным (без скачков) изменением наклона, кривизны и кручения. Моделируя траекторию с помощью составной кубической кривой, можно добиться плавного изменения наклона и кривизны, но невозможно обеспечить непрерывное изменение кручения [15]. Поэтому с помощью

составной кривой Безье может быть получена модель траектории лишь «в первом приближении». Преимущество такого решения — в небольшом количестве необходимых вычислений и вспомогательных построений.

Произвольно задав модули $|\dot{r}(0)|=\omega_0=1=675$, $|\dot{r}(1)|=\omega_1=195$ первых производных в точках R_0, R_1 , получаем петлеобразную кривую R_0-R_1 . Последующие сегменты R_1-R_2, R_2-R_3 формируются однозначно, в соответствии с алгоритмом 1 (см. рис. 3). Меняя значения ω_0, ω_1 , получаем разные варианты геометрически гладкой пространственной составной кривой $R_0-R_1-R_2-R_3$.

Составная кривая Безье на плоскости. В ортогональной системе координат $ху$ даны точки R_0, R_1, R_2 с указанными в этих точках касательными τ_0, τ_1, τ_2 . Отмечены управляющие точки $Q_1 \in \tau_0, P_1 \in \tau_1$ сегмента Безье R_0-R_1 . Требуется к сегменту R_0-R_1 добавить сегмент R_1-R_2 , обеспечив непрерывное изменение наклона и кривизны в стыковой точке R_1 .

На плоскости имеется $\infty 1$ сегментов Безье R_1-R_2 , удовлетворяющих указанным требованиям, поэтому одна из управляющих точек конструируемого сегмента R_1-R_2 (точка Q_2 на касательной τ_1 или точка P_2 на касательной τ_2) может быть задана произвольно.

Схема решения. Вводим в рассмотрение локальную систему координат XY с началом в точке Q_1 и осью X , проходящей через узловую точку R_1 . Произвольным образом указываем одну из управляющих точек второго сегмента. Например, укажем на касательной τ_2 управляющую точку P_2 . В системе координат XY определяем локальные координаты точек $R_1(X_1, Y_1), P_1(X_{p1}, Y_{p1}), P_2(X_{p2}, Y_{p2})$. По формуле (14) вычисляем параметр λ_1 и отмечаем управляющую точку Q_2 на касательной τ_1 : $|R_1Q_2|=\lambda_1|R_1P_1|$. Формой добавляемого сегмента можно управлять, изменяя положение управляющей точки P_2 на касательной τ_2 .

Плоский кубический сегмент Безье с фиксированной кривизной в обеих граничных точках (вставка сегмента). Требуется найти кубический сегмент Безье, проходящий через точки $R_1(x_1, y_1), R_2(x_2, y_2)$ и имеющий в этих точках заданные касательные τ_1, τ_2 и заданную кривизну K_1, K_2 (вставить кубический сегмент в разрыв между двумя наперед заданными сегментами).

Будем искать решение в координатной форме:

$$\begin{aligned} x(t) &= (1-t)^3 x_1 + 3t(1-t)^2 x_0 + 3t^2(1-t)x_p + t^3 x_2 \\ y(t) &= (1-t)^3 y_1 + 3t(1-t)^2 y_0 + 3t^2(1-t)y_p + t^3 y_2, \\ t &\in [0, 1]. \end{aligned} \quad (16)$$

Управляющие точки $Q(x_0, y_0), P(x_p, y_p)$ должны быть определены из условий инцидентности $Q \in \tau_1, P \in \tau_2$ и из условий равенства кривизны на концах сегмента наперед заданным значениям K_1, K_2 .

Кривизна плоской кривой, заданной в явном виде $y=y(x)$, вычисляется по формуле

$$K = \frac{y''_x}{(1+y'^2_x)^{3/2}}. \quad (17)$$

Значения $(y'_x)_1 = d_1, (y'_x)_2 = d_2$ известны (равны тангенсам d_1, d_2 углов наклона касательных τ_1, τ_2 к оси x), поэтому из (17) могут быть найдены значения вторых производных в граничных точках конструируемого сегмента:

$$\begin{aligned}\eta_1 &= (y''_x)_1 = K_1(1 + d_1^2)^{3/2}, \\ \eta_2 &= (y''_x)_2 = K_2(1 + d_2^2)^{3/2}.\end{aligned}\quad (18)$$

Кривизна параметрически заданной кривой вычисляется по формуле

$$K = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}. \quad (19)$$

Подставляя $y'_x = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ в уравнение (17) и приравняв правые части уравнений (17) и (19), получаем:

$$\frac{\eta}{\left[1 + \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

или

$$\frac{\eta[(\dot{x})^2]^{3/2}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}. \quad (20)$$

Сокращая знаменатели и учитывая, что $(\dot{x}^2)^{3/2} = |\dot{x}|^3$, получаем:

$$\eta |\dot{x}|^3 = \dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}. \quad (21)$$

Подставляя $\dot{y} = \dot{x}y'_x$ в выражение (21) и сокращая на \dot{x} , получаем:

$$\eta \dot{x}^2 \text{sign}(\dot{x}) = \ddot{y} - y'_x \ddot{x}. \quad (22)$$

Множитель $\text{sign}(\dot{x})$ имеет принципиальное значение. Пренебрежение этим множителем может приводить к вычислительной ошибке.

Согласно (22), получаем условия, при выполнении которых конструируемый сегмент (16) удовлетворяет граничным условиям $\{R_1, R_2, \tau_1, \tau_2, K_1, K_2\}$:

$$\begin{aligned}\eta_1 \dot{x}_1^2 \text{sign}(\dot{x}_1) &= \ddot{y}_1 - d_1 \ddot{x}_1, \\ \eta_2 \dot{x}_2^2 \text{sign}(\dot{x}_2) &= \ddot{y}_2 - d_2 \ddot{x}_2.\end{aligned}\quad (23)$$

Дифференцируя (16) по параметру t , находим производные, входящие в условия (23):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 3(x_Q - x_1), & \dot{y}_1 &= 3(y_Q - y_1), \\ \dot{x}_2 &= 3(x_2 - x_P), & \dot{y}_2 &= 3(y_2 - y_P), \\ \ddot{x}_1 &= 6(x_1 - 2x_Q + x_P), & \ddot{y}_1 &= 6(y_1 - 2y_Q + y_P), \\ \ddot{x}_2 &= 6(x_Q - 2x_P + x_2), & \ddot{y}_2 &= 6(y_Q - 2y_P + y_2).\end{aligned}\quad (24)$$

Подставляя (24) в (23), получаем:

$$\begin{aligned}3\eta_1(x_Q - x_1)^2 \text{sign}(x_Q - x_1) &= \\ = 2(y_1 - 2y_Q + y_P) - 2d_1(x_1 - 2x_Q + x_P), \\ 3\eta_2(x_2 - x_P)^2 \text{sign}(x_2 - x_P) &= \\ = 2(y_Q - 2y_P + y_2) - 2d_2(x_Q - 2x_P + x_2).\end{aligned}\quad (25)$$

В уравнения (25) входят неизвестные величины x_Q, y_Q, x_P, y_P .

Учитывая условия инцидентности $Q \in \tau_1, P \in \tau_2$, запишем:

$$\begin{aligned}y_Q &= d_1(x_Q - x_1) + y_1, \\ y_P &= y_2 - d_2(x_2 - x_P).\end{aligned}\quad (26)$$

Подставляя (26) в (25), исключаем из (25) неизвестные y_Q, y_P . После алгебраических преобразований получаем:

$$\begin{aligned}x_P &= \frac{3\eta_1}{2(d_2 - d_1)}(x_Q - x_1)^2 \text{sign}(x_Q - x_1) + \psi, \\ x_Q &= \frac{3\eta_2}{2(d_1 - d_2)}(x_2 - x_P)^2 \text{sign}(x_2 - x_P) + \psi,\end{aligned}\quad (27)$$

где ψ — постоянный коэффициент:

$$\psi = \frac{(y_2 - y_1) + (d_1 x_1 - d_2 x_2)}{d_1 - d_2}. \quad (28)$$

Решая систему уравнений (27) относительно неизвестных x_P, x_Q и учитывая (26), находим координаты управляющих точек $Q(x_Q, y_Q), P(x_P, y_P)$ сегмента Безье, удовлетворяющего граничным условиям $\{R_1, R_2, \tau_1, \tau_2, K_1, K_2\}$.

Нелинейная система уравнений (27) может быть решена графически. Полагая x_Q независимой переменной, начертим параболу $x_P = f(x_Q)$ (первое уравнение из системы (27)). Аналогично, полагая x_P независимой переменной, начертим параболу $x_Q = g(x_P)$ (второе уравнение из системы (27)). В точках пересечения парабол получаем значения неизвестных x_P, x_Q . Затем, согласно (26), вычисляем значения y_Q, y_P . Если кривизна K_1 (или K_2) равна нулю, то решение заметно упрощается, так как нелинейная система уравнений (27) вырождается в линейное уравнение относительно x_Q (или x_P).

На основе полученного решения составлен конструктивный алгоритм вставки кубического сегмента.

Алгоритм 2. Построение плоского сегмента Безье, удовлетворяющего граничным условиям $\{R_1, R_2, \tau_1, \tau_2, K_1, K_2\}$.

На плоскости xOy даны точки $R_1(x_1, y_1), R_2(x_2, y_2)$ с указанными в этих точках касательными τ_1, τ_2 . В точках R_1, R_2 заданы алгебраические значения кривизны K_1, K_2 (с учетом знака). Требуется найти управляющие точки $Q \in \tau_1, P \in \tau_2$ сегмента Безье, удовлетворяющего указанным граничным условиям.

Шаг 1. Находим тангенсы d_1, d_2 углов наклона касательных τ_1, τ_2 к оси x . По формулам (18) вычисляем вторые производные η_1, η_2 в граничных точках конструируемого сегмента. По формуле (28) вычисляем постоянный коэффициент ψ .

Шаг 2. Графически решаем систему уравнений (27). Для этого вычерчиваем параболу $x_P = f(x_Q)$, полагая x_Q независимой переменной. Аналогично, полагая x_P независимой переменной, вычерчиваем параболу $x_Q = g(x_P)$. В точках пересечения парабол получаем значения координат x_P, x_Q управляющих точек Q, P . Затем по формулам (26) определяем координаты y_P, y_Q управляющих точек Q, P .

Результат: получены управляющие точки $Q(x_Q, y_Q), P(x_P, y_P)$ сегмента Безье (16), удовлетворяющего граничным условиям $\{R_1, R_2, \tau_1, \tau_2, K_1, K_2\}$. Если в граничных точках заданы только модули кривизны $|K_1|, |K_2|$ (без учета знака), то задача может иметь четыре решения. Например, на рис. 4 показаны четыре кубических сегмента с общими окружностями кривизны ρ_1, ρ_2 в граничных точках R_1, R_2 .

Условие существования решения. Параболы $x_P = f(x_Q)$ и $x_Q = g(x_P)$ должны иметь вещественные точки пересечения. Если параболы не пересекаются (система уравнений (27) не имеет вещественного решения), то кубического сегмента, удовлетворя-

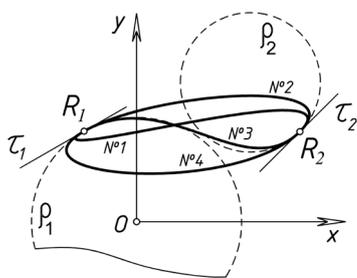


Рис. 4. Сегменты Безье с фиксированной кривизной на концах

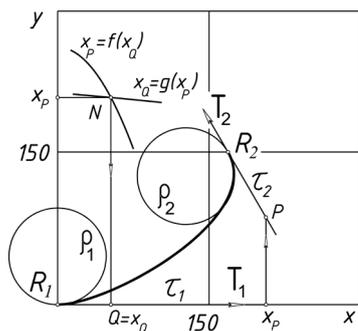


Рис. 5. Сопряжение окружностей (к примеру 3)

ющего условиям $\{R_1, R_2, \tau_1, \tau_2, K_1, K_2\}$, не существует.

Используя алгоритм 2, можно найти кубический сегмент Безье, обеспечивающий: G^2 -гладкое сопряжение двух окружностей; сопряжение прямой линии и окружности; сопряжение двух прямых линий.

Пример 3 (сопряжение окружностей). На окружностях ρ_1, ρ_2 с одинаковыми радиусами 50 даны точки $R_1(0, 0)$ и $R_2(175, 150)$ с указанными в этих точках касательными векторами T_1, T_2 (рис. 5). Требуется найти кубический сегмент Безье R_1-R_2 , обеспечивающий G^2 -гладкое сопряжение данных окружностей.

Решение. Задача сводится к поиску управляющих точек сегмента Безье, удовлетворяющего граничным условиям $\{R_1, R_2, \tau_1, \tau_2, K_1, K_2\}$, где $K_1=K_2=0,02$, а касательные τ_1, τ_2 в точках R_1, R_2 наклонены к оси x под углами 0° и 120° .

Вычисляем коэффициенты $d_1 = \operatorname{tg} 0^\circ = 0$, $d_2 = \operatorname{tg} 120^\circ = -1,73205$. По формулам (18) вычисляем вторые производные $\eta_1 = 0,020$, $\eta_2 = 0,160$. По формуле (28) вычисляем постоянный коэффициент $\psi = 261,6025$. Выполняем графическое решение системы уравнений (27) относительно неизвестных x_p, x_Q . Для этого вычисляем параболы $x_p = f(x_Q)$ (первое уравнение), $x_Q = g(x_p)$ (второе уравнение) и отмечаем точку $N(x_Q = 52,5094; x_p = 21,8458)$ пересечения парабол. По формулам (26) вычисляем координаты $y_Q = 0$, $y_p = 82,7170$. Подставляя координаты узловых точек $R_1(0, 0)$ и $R_2(175, 150)$ и управляющих точек $Q(52,5094; 0)$, $P(213,8458; 82,7170)$ в уравнения (16), получаем кубический сегмент Безье R_1-R_2 , гладко соединяющий окружности ρ_1, ρ_2 (см. рис. 5).

Заключение. Предложены алгоритмы формирования пространственных и плоских составных

кубических кривых Безье, отличающиеся использованием направляющих векторов в узловых точках для управления формой конструируемой кривой. В узловых точках обеспечивается общая касательная, общая соприкасающаяся плоскость и общий радиус кривизны соединяемых сегментов. В качестве граничных геометрических условий принимаются узловы точки с указанными в этих точках касательными векторами. Для практической реализации алгоритмов используются ручной калькулятор и любой программный продукт, поддерживающий трехмерную графику. Трехмерное моделирование используется как для выполнения геометрических операций (построение точки пересечения прямой и плоскости, поиск точек пересечения парабол и др.), так и для пересчета координат опорных точек при замене системы координат.

К преимуществам предлагаемых алгоритмов можно отнести простоту их практической реализации, обусловленную небольшим количеством вспомогательных расчетов и построений, и наглядность (возможность визуального представления и прогноза качественного изменения формы кривой при изменении направления касательных векторов в узловых точках). Недостатки алгоритмов следуют из общих недостатков параметризованных кубических кривых — недостаточная «гибкость» и невозможность обеспечить непрерывность кручения по длине конструируемой кривой.

Библиографический список

1. Голованов Н. Н. Геометрическое моделирование. Москва: ДМК-Пресс, 2020. 406 с.
2. Panchuk K., Myasoedova T., Lyubchinov E. Spline Curves Formation Given Extreme Derivatives // Mathematics. 2021. Vol. 9. 47. DOI: 10.3390/math9010047.
3. Панчук К. А., Юрков В. Ю., Кайгородцева Н. В. Математические основы геометрического моделирования кривых линий. Омск: Изд-во ОмГТУ, 2020. 198 с.
4. Шикин Е. В., Плисс Л. И. Кривые и поверхности на экране компьютера. Руководство по сплайнам для пользователя. Москва: Диалог-МИФИ, 1996. 240 с.
5. Agoston M. K. Computer Graphics and Geometric Modeling. Springer: London, UK, 2005. P. 373–470.
6. Gallier J. Curves and Surfaces in Geometric Modeling: Theory and Algorithms. University of Pennsylvania: Philadelphia, PA, USA, 2018. P. 61–114.
7. Farin G., Hoschek J., Kim M. S. Handbook of Computer Aided Geometric Design. Elsevier Science B. V.: Amsterdam, The Netherlands. 2002. P. 75–87.
8. Marsh D. Applied Geometry for Computer Graphics and CAD. 2nd ed. Springer: London, UK, 2005. P. 135–185.
9. Schneider P. J., Eberly D. H. Geometric Tools for Computer Graphics. Morgan Kaufmann Publishers, Inc.: San Francisco, CA, USA, 2003. P. 109–170.
10. Knott G. D. Interpolating Cubic Splines. Birkhauser: Boston, MA, USA, 1999. P. 133–138.
11. Bartels R. H., Beatty J. C., Barsky B. A. An Introduction to Splines for Use in Computer Graphics and Geometric Modeling. Morgan Kaufmann Publishers, Inc.: Los Altos, CA, USA, 1987. P. 6–12.
12. Жермен-Лакур П., Жорж П. А., Пистр Ф. [и др.]. Математика и САПР. В 2-х кн. Москва: Мир, 1989. Кн. 2. 264 с.
13. Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве. Москва: Мир, 1982. 304 с.
14. Короткий В. А. Кубические кривые в инженерной геометрии // Геометрия и графика. 2020. Т. 8, № 3. С. 3–24. DOI: 10.12737/2308-4898-2020-3-24.

15. Hoschek J., Lasser, D. Fundamentals of computer aided geometric design. A K Peters / CRC Press, England, 1996. P. 213–247.

ResearcherID: 000457888400003

ORCID: 0000-0002-5266-4701

Адрес для переписки: korotkiiva@susu.ru

Для цитирования

Короткий В. А. Конструктивные алгоритмы формирования составных кубических кривых Безье в пространстве и на плоскости // Омский научный вестник. 2022. № 2 (182). С. 10–16. DOI: 10.25206/1813-8225-2022-182-10-16.

Статья поступила в редакцию 12.02.2022 г.

© В. А. Короткий

КОРОТКИЙ Виктор Анатольевич, доктор технических наук, доцент (Россия), профессор кафедры «Инженерная и компьютерная графика» Южно-Уральского государственного университета (национального исследовательского), г. Челябинск.

SPIN-код: 7576-1921

AuthorID (РИНЦ): 777039

AuthorID (SCOPUS): 57170871600