

## РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЦЕПИ УПРАВЛЕНИЯ МАГНИТОУПРАВЛЯЕМОГО ФЕРРОВАРИОМЕТРА

Задачей данной работы является разработка математической модели для исследования магнитного поля управления магнитоуправляемого ферровариометра в линейном приближении. Данная задача решается на основе плоскопараллельной модели. В основе решения лежит метод вторичных источников. На основе разработанной математической модели составлена программа на языке высокого уровня, обеспечивающая ввод исходных данных и вывод их на печать, вычисление координат вторичных источников и расчет начального приближенного значения связанных токов, а также итерационный счет системы уравнений с заданной точностью. Описанный метод и программа позволяют получать приближенную картину распределения поля управления в конструкции магнитоуправляемого ферровариометра и окружающем пространстве, если конструкция может быть представлена плоскопараллельной моделью. На основе расчета поля можно выполнять параметрический синтез конструкции цепи управления и оценивать ее мешающее воздействие на окружающие электрические цепи.

**Ключевые слова:** ферровариометр, математическая модель, цепь управления, магнитопровод, магнитное поле, феррит.

**Введение.** В радиотехнических устройствах и устройствах автоматического регулирования используются индуктивные элементы с автоматической перестройкой [1–4].

К таким элементам относятся магнитоуправляемые ферровариометры. Устройства имеют сложную конструкцию, содержащую рабочую и управляющую обмотки, а также рабочий и управляющий магнитопроводы. Магнитные параметры рабочего магнитопровода могут изменяться в заданных пределах под действием управляющего магнитного поля, создаваемого управляющими обмоткой и магнитопроводом. Магнитные поля системы могут оказывать влияние на близкорасположенные электрические цепи и элементы.

Простые аналитические выражения для такого анализа отсутствуют, поскольку структура создаваемых полей сильно зависит от нелинейных характеристик магнитных материалов и конструкции ферровариометра. Задачей работы является формирование математической модели для исследования магнитного поля управления в линейном приближении.

Такие управляемые элементы должны иметь малое время перестройки из одного крайнего положения в другое и малые собственные потери при заданном уровне мощности высокочастотного сигнала.

Из известных элементов [5, 6] с немеханической перестройкой наиболее удовлетворяет перечисленным требованиям магнитоуправляемый ферровариометр (МФВ). Анализ его характеристик и разработка вариантов конструкции в настоящее время опираются главным образом на методы теории магнитных цепей [7]. В работах [8–10] описаны основные типы конструкций МФВ и даны соотношения, полезные при оценке их параметров.

Важной характеристикой ферровариометра является зависимость его коэффициента перестройки от тока управления. Методы достоверного расчета этой характеристики, пригодные для всего многообразия известных конструкций, пока не разработаны.

В настоящей работе на основе плоскопараллельной модели решается задача расчета поля управления МФВ. В основе решения лежит метод вторичных источников [11]. Суть метода заключается в том, чтобы магнитное поле в кусочно-однородной среде, обусловленное некоторыми первичными источниками с токами, может быть эквивалентно представлено полем свободного пространства, создаваемым теми же первичными источниками и некоторыми вторичными источниками, расположенными на границах однородных областей пространства.

Для имитационного и математического (численного) моделирования магнитного поля и его

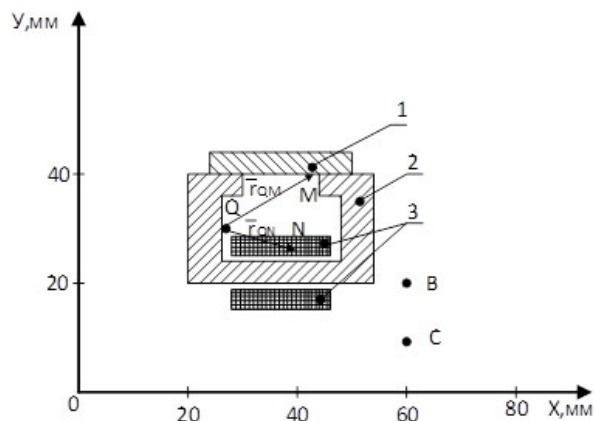


Рис. 1. Оси  $X, Y$  прямоугольной системы координат и сечение магнитоуправляемого ферровариометра плоскостью  $Z = 0$ : 1 — ферритовый сердечник, обратимая магнитная проницаемость которого меняется при подмагничивании; 2 — стальной магнитопрод; 3 — обмотка управления;  $B, C$  — проекция на плоскость  $Z = 0$  проводников близкорасположенной электрической цепи

силовых характеристик существуют коммерчески распространяемые комплексы программ [12–15]. Расчеты при этом проводятся с использованием метода конечных элементов. Однако стоимость таких программных комплексов достаточно высока, и не все предприятия и организации могут позволить себе их использовать.

Поэтому целью данной работы является разработка математической модели и программы расчета

$$B_{ti}(Q) = -\frac{d\bar{A}_Q}{dn} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{l=1}^p \int_{S_l} \delta_l(N) \frac{\cos(\bar{r}_{QN_l}, \bar{n}_Q)}{r_{QN_l}} dS_l - \frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{i=1}^2 \oint_{L_i} \sigma_i(M) \frac{\cos(\bar{r}_{QM_i}, \bar{n}_Q)}{r_{QM_i}} dl_i, \quad (3)$$

где  $L_i$  — граница раздела  $i$ -ой магнитной среды и воздуха;

$S_l$  — площадь сечения  $l$ -ой области с током управления;

$\bar{A}_Q$  — векторный магнитный потенциал в точке  $Q$ ;

$\delta_l(N)$  — плотность тока управления в точке  $N$   $l$ -ой области;

$\sigma_i(M)$  — плотность связанных токов в точке  $M$ ;

цепи управления магнитоуправляемого ферровариометра.

**Разработка математической модели.** Плотность токов вторичных источников можно найти из формируемых интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода, решаемых численно с помощью ЭВМ.

На рис. 1 показаны оси  $X, Y$  прямоугольной системы координат и сечение МФВ плоскостью  $Z = 0$ . Высокочастотная катушка индуктивности не изображена.

Плотность связанных токов намагниченности на границе раздела воздуха и  $i$ -ой магнитной среды определяется из выражения:

$$\sigma_i(Q) = \frac{2}{\mu_0} \cdot \frac{\mu_i - \mu_0}{\mu_i + \mu_0} \cdot B_{ti}(Q), \quad (1)$$

где  $B_{ti}$  — тангенциальная составляющая магнитной индукции на границе раздела;

$\mu_i$  — абсолютная магнитная проницаемость  $i$ -ой среды;

$\mu_0$  — абсолютная магнитная проницаемость вакуума;

$Q$  — точка наблюдения.

При этом имеет место соотношение:

$$\mu_i = \begin{cases} \mu_\phi, & i = 1, \\ \mu_c, & i = 2, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\mu_\phi$  — абсолютная магнитная проницаемость феррита;

$\mu_c$  — абсолютная магнитная проницаемость стали.

Выражение для индукции имеет вид:

$\bar{n}_Q$  — единичный вектор внешней нормали к границе раздела в точке  $Q$ ;

$\bar{r}_{QN_l}$  — вектор из точки  $Q$  в точку  $N$  области  $l$ ;

$\bar{r}_{QM_i}$  — вектор из точки  $Q$  в точку  $M$  границы  $i$ -ой среды;

$p$  — число областей с током управления.

Подставив выражение (3) в (1), получим для МФВ, показанного на рис. 1, систему:

$$\sigma_i(Q) = -\frac{\lambda_1}{\pi} \sum_{k=1}^m \int_{L_k} \sigma_k(M) \frac{\cos(\bar{r}_{QM_k}, \bar{n}_Q)}{r_{QM_k}} dl_k - \frac{\lambda_2}{\pi} \sum_{j=1}^n \int_{L_j} \sigma_j(M) \frac{\cos(\bar{r}_{QM_j}, \bar{n}_Q)}{r_{QM_j}} dl_j - \frac{\lambda_i}{\pi} \sum_{l=1}^p \int_{S_l} \delta_l(N) \frac{\cos(\bar{r}_{QN_l}, \bar{n}_Q)}{r_{QN_l}} dS_l, \quad (4)$$

где  $m$  — общее число прямолинейных участков границы феррита;

$n$  — общее число прямолинейных участков границы стали.

Постоянные коэффициенты  $\lambda_i$  определяются из соотношения:

$$\lambda_i = \frac{\mu_i - \mu_0}{\mu_i + \mu_0}. \quad (5)$$

Для численного решения системы (4) линейно интегралы заменяем конечными суммами:

$$\sigma_i(Q) = -\frac{\lambda_1}{\pi} \sum_{k=1}^m \Delta l_k \sum_{s=1}^{q_k} \sigma_k(M) \frac{\cos(\bar{r}_{QM_k}, \bar{n}_Q)}{r_{QM_k}} - \frac{\lambda_2}{\pi} \sum_{j=1}^n \Delta l_j \sum_{s=1}^{q_j} \sigma_j(M) \frac{\cos(\bar{r}_{QM_j}, \bar{n}_Q)}{r_{QM_j}} - \frac{\lambda_i}{\pi} \sum_{l=1}^p \int_{S_l} \delta_l(N) \frac{\cos(\bar{r}_{QN_l}, \bar{n}_Q)}{r_{QN_l}} dS_l, \quad (6)$$

где  $q_i, q_k$  — число элементов разбиения  $i$ -ой и  $k$ -ой границы;

$\Delta l$  — длина элемента границы.

Систему (6) можно представить в матричной записи:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \dots \\ \sigma_g \\ \dots \\ \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}b_{12}\dots b_{1h}\dots b_{1z} \\ b_{21}b_{22}\dots b_{2h}\dots b_{2z} \\ \dots \\ b_{g1}b_{g2}\dots b_{gh}\dots b_{gz} \\ \dots \\ b_{z1}b_{z2}\dots b_{zh}\dots b_{zz} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \dots \\ \sigma_g \\ \dots \\ \sigma_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_g \\ \dots \\ f_z \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где  $b_{gh}$  — коэффициенты системы;

$f_g$  — свободные члены;

$Z$  — полное число элементов всех границ.

Порядок системы (7) равен:

$$z = \sum_{k=1}^m q_k + \sum_{j=1}^n q_j. \quad (8)$$

На элементе  $\Delta l$  плотность тока принимается равной величине, вычисленной для центральной точки элемента. Для МФВ с прямолинейными ортогональными границами верны соотношения:

$$\beta_g = \begin{cases} \frac{\lambda_1}{2\pi} \cdot \Delta l_g & \text{при } g \leq \sum_{k=1}^m q_k, \\ \frac{\lambda_2}{2\pi} \cdot \Delta l_g & \text{при } g > \sum_{k=1}^m q_k. \end{cases} \quad (12)$$

$$B_x = -\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^p \frac{J_i}{a_i \cdot b_i} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{i+j} \left\{ (x - x_{ij}) \cdot \ln[(x - x_{ij})^2 + (y - y_{ij})^2] + 2(y - y_{ij}) \operatorname{arctg} \frac{x - x_{ij}}{y - y_{ij}} \right\}, \quad (13)$$

$$B_y = -\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^p \frac{J_i}{a_i \cdot b_i} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^{i+j} \left\{ (y - y_{ij}) \cdot \ln[(x - x_{ij})^2 + (y - y_{ij})^2] + 2(x - x_{ij}) \operatorname{arctg} \frac{y - y_{ij}}{x - x_{ij}} \right\}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} x_{1l} &= x_l - 0,5a_l, & x_{2l} &= x_l + 0,5a_l, \\ y_{1l} &= y_l - 0,5b_l, & y_{2l} &= y_l + 0,5b_l, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $x_l, y_l$  — координаты центров обмоток;

$a_l, b_l$  — размеры обмоток.

Полные токи обмоток  $J_l$  равны

$$J_l = b_l \cdot a_l \cdot \delta_l. \quad (16)$$

Поле, созданное вторичными источниками, рассчитывается как поле системы точечных проводников, расположенных в центрах соответствующих участков. Величина тока одного проводника определяется выражением

$$J_g = \sigma_g \cdot \Delta l, \quad g = 1, 2, \dots, z. \quad (17)$$

Расчёт поля системы точечных проводников выполняем по формулам

$$A = -\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{g=1}^z J_g \cdot \ln[(x - x_g)^2 + (y - y_g)^2], \quad (18)$$

$$b_{gh} = \begin{cases} -a_{gh}(X_g - X_h) - \text{для границ, где воздух слева,} \\ a_{gh}(X_g - X_h) - \text{для границ, где воздух справа,} \\ -a_{gh}(Y_g - Y_h) - \text{для границ, где воздух сверху,} \\ a_{gh}(Y_g - Y_h) - \text{для границ, где воздух снизу.} \end{cases} \quad (9)$$

Для определения  $a_{gh}$  служат выражения:

$$a_{gh} = \begin{cases} \frac{\lambda_1}{\pi} \cdot \frac{\Delta l_g}{(X_g - X_h)^2 + (Y_g - Y_h)^2} & \text{при } g \leq \sum_{k=1}^m q_k, \\ \frac{\lambda_2}{\pi} \cdot \frac{\Delta l_g}{(X_g - X_h)^2 + (Y_g - Y_h)^2} & \text{при } g > \sum_{k=1}^m q_k, \end{cases} \quad (10)$$

где  $X_g, Y_g$  — координаты центра  $g$ -го участка.

Свободные члены системы вычисляются по формулам

$$f_g = \begin{cases} -\beta_g B_x - \text{для границ, где воздух сверху,} \\ \beta_g B_x - \text{для границ, где воздух снизу,} \\ -\beta_g B_y - \text{для границ, где воздух слева,} \\ -\beta_g B_y - \text{для границ, где воздух справа.} \end{cases} \quad (11)$$

Величины, входящие в (11), рассчитываются следующим образом:

$$B_x = -\frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{g=1}^z J_g \cdot \frac{y - y_g}{(x - x_g)^2 + (y - y_g)^2}, \quad (19)$$

$$B_y = -\frac{\mu_0}{2\pi} \sum_{g=1}^z J_g \cdot \frac{x - x_g}{(x - x_g)^2 + (y - y_g)^2}. \quad (20)$$

Полное поле в конструкции и окружающем пространстве определяется после решения системы (7) наложением полей обмоток и системы точечных вторичных источников.

**Программная реализация математической модели.** Для получения численных результатов была составлена программа на языке высокого уровня, обеспечивающая ввод исходных данных и вывод их на печать, вычисление координат вторичных источников и расчёт начального приближенного значения связанных токов, а также итерационный счёт системы уравнений с заданной точностью. Разработаны подпрограммы для определения векторного магнитного потенциала и составляющих индукции в заданных точках системы координат.

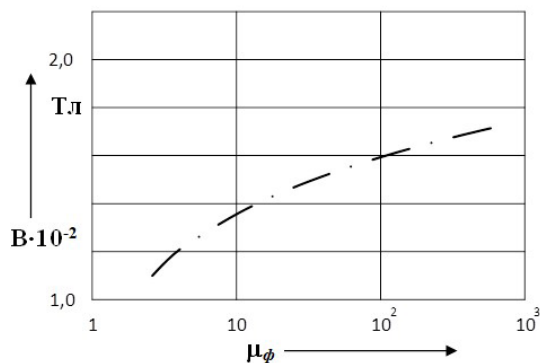


Рис. 2. Зависимость максимальной индукции поля управления в ферритовом сердечнике от проницаемости  $\mu_\phi$  при  $\mu_c = \text{const}$  и  $J_y = \text{const}$

Исходными данными являются начальные проницаемости феррита и стали, координаты и размеры границ, координаты и размеры сечений обмоток, количества элементов границ и плотности токов обмоток управления.

С помощью программы на численной модели оценивалось влияние геометрии и места расположения обмоток на величину индукции поля управления в ферритовом сердечнике. Выяснялось влияние на величину индукции соотношения проницаемости феррита и стали.

Для определения эффективности верхних слоёв многослойной обмотки управления рассчитывалась конструкция, в которой имелся воздушный промежуток между обмоткой и стальным магнитопроводом. При величине промежутка 10 мм рассчитанная величина индукции в точке ферритового сердечника с координатами (36,0 мм; 43,5 мм) уменьшилась в пять раз по сравнению с вариантом расположения обмотки без воздушного промежутка.

Расчёт распределения поля управления по длине ферритового сердечника показывает, что значения индукции в центре и на краях отличаются в 1,4–1,5 раза. Этим фактом можно объяснить некоторое отличие коэффициентов перестройки МФВ при различных способах размещения обмотки сигнала на ферритовом сердечнике.

При соотношениях магнитных проницаемостей феррита и стали  $\mu_\phi \ll \mu_c$  величина максимальной индукции поля управления в ферритовом сердечнике слабо зависит от проницаемости  $\mu_\phi$ . На рис. 2 приведена указанная зависимость при  $\mu_c = \text{const}$  и токе управления  $J_y = \text{const}$ . В свою очередь, дальнейшее увеличение  $\mu_c$  практически не влияет на эффективность системы подмагничивания. Из этого следует, что при определенной геометрии системы и относительно малой проницаемости феррита стремление выбирать для магнитопровода материал с наибольшей доступной магнитной проницаемостью неоправданно.

Для определения влияния рассеянного поля управления МФВ на магниточувствительные элементы, а также для оценки его мешающего воздействия на близкорасположенные электрические цепи можно вычислить магнитный поток взаимодействия. Магнитный поток  $\Phi_{BC}$  равен

$$\Phi_{BC} = I(A_B - A_C), \quad (21)$$

где  $A_B, A_C$  — векторные магнитные потенциалы в точках  $B$  и  $C$  ( $B, C$  — проекции на плоскость  $Z = 0$

проводников близкорасположенной электрической цепи);

$l$  — длина проводников близкорасположенной электрической цепи по оси  $Z$ .

Численно определив зависимость  $\Phi_{BC}(J_y)$  и зная функцию  $J_y(t)$  при перемагничивании, можно рассчитать наведённую э.д.с. в контуре, образованном проводниками  $B$  и  $C$ , на основе закона электромагнитной индукции

$$e = - \frac{d\Phi_{BC}}{dt} = - \frac{d\Phi_{BC}}{dJ_y} \cdot \frac{dJ_y}{dt}. \quad (22)$$

**Экспериментальная проверка.** Для экспериментальной проверки точности разработанной модели и программы были проведены измерения рассеянного стационарного поля управления в различных точках окна магнитопровода. Погрешность измерителя магнитной индукции ШИ-15У на малых пределах измерения не превышает 10 %. В отсутствии ферритового сердечника рассчитанное значение индукции в центре зазора между полюсами магнитопровода составило  $9,3 \cdot 10^{-4}$  Тл при плотности тока управления  $0,2$  А/мм<sup>2</sup>. Измеренное значение —  $1,05 \cdot 10^{-3}$  Тл. При наличии ферритового сердечника (рис. 1) расчёт индукции в центре окна магнитопровода дал значение  $3,1 \cdot 10^{-3}$  Тл при плотности тока  $0,6$  А/мм<sup>2</sup>. Измеренное значение  $3,5 \cdot 10^{-3}$  Тл. Сравнение показывает удовлетворительное совпадение расчётных и экспериментальных результатов.

**Выводы.** Отметим некоторые особенности разработанного метода. Введение в расчётную модель границ второго типа (второго магнитного материала) существенно ухудшает сходимость итерационного процесса при решении системы линейных уравнений. По сравнению с конструкцией, где имелся только один магнитный материал, сходимость ухудшилась почти в три раза. При решении задачи примерно одинаковой сложности по числу точечных источников на границах в нашем случае требуется 17–18 итераций против 5–6 итераций для одного магнитного материала. Соответственно возрастает время счёта на ЭВМ.

Кроме того, линейная модель справедлива лишь для слабых управляющих полей. Результаты расчёта и эксперимента начинают расходиться при больших токах управления, когда электромагнитные процессы, происходящие в устройстве, соответствуют нелинейным участкам характеристик материалов. Попытка аппроксимации нелинейных характеристик кусочно-линейными приводит к кратному увеличению времени счёта, так как требуется последовательный счёт каждого участка характеристики. Описанный метод и программа позволяют получать приближённую картину распределения поля управления в конструкции МФВ и окружающем пространстве, если конструкция может быть представлена плоскопараллельной моделью.

На основе расчёта поля можно выполнять параметрический синтез конструкции цепи управления и оценивать её мешающее воздействие на окружающие электрические цепи (например, близкорасположенные проводники или дорожки печатных плат).

#### Библиографический список

1. Груздев В. В. Ключевые генераторы с внешним возбуждением класса Е с ППГ-ферровариометром в формирующем

- П-контуре // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2013. Т. 7, № 9. С. 57–59.
2. Grebennikov A., Sokal N. O. Switchmode RF Power Amplifiers. Oxford: Elsevier, 2007. 442 p.
3. Telegony A., Molnar B., Sokal N. O. Class Em Switching – Mode Tuned Power Amplifier – High efficiency with SEOW – Switching Transistor // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. Vol. 51 (6). P. 1662–167606. DOI: 10.1109/TMTT.2003.812562.
4. Хмелев В. Н., Барсуков Р. В., Ильченко Е. В. Блок контроля и управления ультразвуковым генератором на базе микроконтроллера STM32F103 // Южно-сибирский научный вестник. 2017. № 4 (20). С. 31–34.
5. Несвижский Ю. Б. Высокочастотные ферриты в радиопередающей технике. Москва: Связь, 1972. 224 с.
6. Преображенский А. А. Магнитные материалы и элементы. Москва: Высшая школа, 1976. 336 с.
7. Агаронянц Р. А. Электромагнитные элементы технической кибернетики. Москва: Наука, 1972. 278 с.
8. Нуянзин В. П. Некоторые возможные конструкции ферровариометров большой реактивной мощности и их параметры // Радиоэлектроника. 1971. № 3. С. 308–318.
9. Магнитные и диэлектрические приборы. В 2 ч. / Под ред. Г. В. Катца; пер. с англ. В. В. Матвеева и В. И. Позднякова; под. ред. И. Б. Негневицкого. Москва: Энергия, 1964. Ч. 1. 416 с.
10. Кыштымов Г. А., Плишкин А. В. Расчет и оптимизация геометрических размеров ферровариометров антенных согласующих устройств // Техника средств связи. 1980. Вып. 7 (25). С. 59–70.
11. Тозони О. В. Метод вторичных источников в электротехнике. Москва: Энергия, 1975. 295 с.
12. Андреева Е. Г., Плеханова В. С. Исследование магнитного поля, его силовых характеристик, свойств материалов электротехнических устройств с незамкнутой магнитной системой // Омский научный вестник. 2018. № 4 (160). С. 31–37. DOI: 10.25206/1813-8225-2018-160-31-37.
13. ANSYS Maxwell. URL: <https://www.ansys.com/products/electronics/ansys-maxwell> (дата обращения: 29.05.2022).
14. ELCUT. URL: <http://elcut.ru/> (дата обращения: 29.05.2022).
15. COMSOL Multiphysics. URL: <https://www.comsol.ru/comsol-multiphysics> (дата обращения: 29.05.2022).

**ЗАЙЦЕВ Владимир Васильевич**, кандидат технических наук, доцент кафедры «Телекоммуникационные, радиотехнические системы и сети» Омского государственного университета путей сообщения (ОмГУПС), г. Омск.

SPIN-код: 7983-3922

AuthorID (РИНЦ): 1011846

Адрес для переписки: [tixon1949@bk.ru](mailto:tixon1949@bk.ru)

**ФАДЕЕВ Константин Сергеевич**, кандидат технических наук, доцент (Россия), заведующий кафедрой «Телекоммуникационные, радиотехнические системы и сети» ОмГУПС, г. Омск.

SPIN-код: 4466-5270

AuthorID (РИНЦ): 459148

Адрес для переписки: [fadeev\\_spi@mail.ru](mailto:fadeev_spi@mail.ru)

**АВДЕЕВА Ксения Васильевна**, кандидат технических наук, доцент (Россия), доцент кафедры «Телекоммуникационные, радиотехнические системы и сети» ОмГУПС, г. Омск.

SPIN-код: 4881-9326

AuthorID (РИНЦ): 788953

ORCID: 0000-0002-3207-1781

AuthorID (SCOPUS): 56826178100

Адрес для переписки: [avdeeva\\_kv@mail.ru](mailto:avdeeva_kv@mail.ru)

#### Для цитирования

Зайцев В. В., Фадеев К. С., Авдеева К. В. Разработка математической модели цепи управления магнитоуправляемого ферровариометра // Омский научный вестник. 2022. № 3 (183). С. 103–107. DOI: 10.25206/1813-8225-2022-183-103-107.

Статья поступила в редакцию 12.04.2022 г.

© В. В. Зайцев, К. С. Фадеев, К. В. Авдеева