

ИМИТАЦИЯ ДИНАМИКИ КОЛЕБАНИЙ МАНИПУЛЯТОРА С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА II РОДА

В статье рассматриваются основные этапы составления динамической модели колебаний манипулятора на основе методики математического моделирования, базой которой выступает схемное решение исследуемого манипулятора. Составлено схемное решение манипулятора как системы, в которой на рабочую панель действует произвольная вертикальная сила P_z и моменты M_x , M_y относительно осей X и Y . Разработана динамическая модель манипулятора и эквивалентная модель динамики его колебаний путем замены основных подвижных структурных его элементов и шарниров упругими элементами — пружинами с известными коэффициентами жесткости. На основе уравнения динамики, в форме Лагранжа II рода, составлена система уравнений колебательных процессов, возникающих от внешних нагрузок, определены собственные частоты упругих колебаний манипулятора и сделаны выводы.

Ключевые слова: манипулятор, рабочая панель, наклонная панель, поворот-но-опорная панель, поворотная панель, коэффициент жесткости, уравнения Лагранжа, матрица инерции и жесткости.

Введение. При анализе исследуемого манипулятора составляется расчетная динамическая модель, которая учитывает и геометрию звеньев, и расположение кинематических пар, а также распределение масс звеньев, моментов инерции, параметров жесткости и т.п.

Основные элементы приводов манипулятора — это механические или гидравлические передачи, связывающие их со структурными звеньями манипулятора. При синтезе этих передач, а также звеньев манипулятора, необходимо стремиться к высокой жесткости его элементов. Но из-за строгих диапазонов норм на массу и габариты элементов манипулятора бывает, что не удается снизить их упругую податливость до минимальных значений. В результате этого возникают движения упругих колебаний его звеньев и манипулятора в целом. Данные колебания отрицательно сказываются на работе манипулятора, вызывая увеличение динамических нагрузок на его звенья, снижение точности при отработке движений и появлению опасных резонансных явлений. Поэтому на начальных этапах синтеза манипулятора необходимо учесть жесткость его элементов. Поэтому расчёт резонансных частот, частот вынужденных колебаний, позволяет подправить структуру схемы манипулятора.

Для этого рассмотрим манипулятор, описанный в [1] и [2]. Главная часть пространственного манипулятора (ГПМ) представлена в виде схемного решения манипулятора на рис. 1 [3]. Ранее описыва-

лась особенность ГПМ, заключающаяся в том, что с помощью двух встречных вращений наклонной панели 2 и поворотной опорной панели 3 создается поступательное вертикальное движение рабочей панели 4 [4] (рис. 1). В независимости от условий функционирования манипулятора [5–7] главными характеристиками при его эксплуатации всегда является его высокая жесткость, которая непосредственно связана с податливостью его структурных звеньев.

Постановка задачи. На рабочую панель 4 в данном схемном решении манипулятора приложены внешние нагрузки: вертикальная сила P_z вдоль оси Z и моменты сил M_x и M_y , действующие вокруг соответствующих осей X и Y . Известны геометрические, массовые и жесткостные параметры ГПМ (рис. 1). Задача: используя методику математического моделирования, составить расчетную схему схемного решения манипулятора как системы в виде динамической модели колебаний и описать в общем виде колебательные процессы, возникающие от внешних нагрузок, и найти резонансные характеристики свободных колебаний манипулятора.

Теория и результаты исследования

1) Жесткость системы

Схемное решение манипулятора (рис. 1) представляет собой большую совокупность деталей и узлов как система. В этой системе они связаны между собой разного рода и типа соединений. Таким образом, данная система предполагает неограничен-

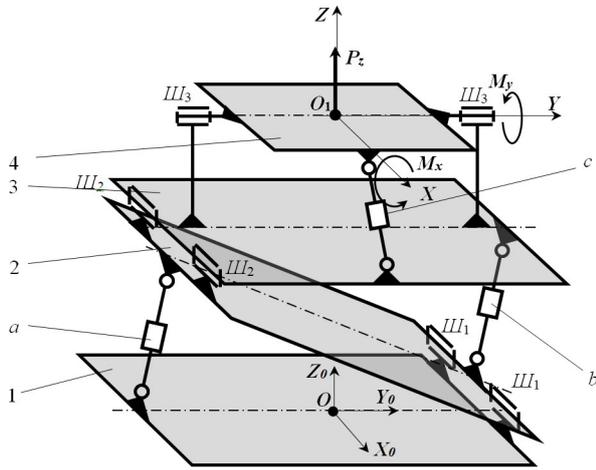


Рис. 1. Схемное решение манипулятора ГПМ:
 1 — станина (поворотная панель);
 2 — наклонная панель;
 3 — поворотной-опорная панель;
 4 — рабочая панель;
 a, b, c — приводы (гидроцилиндры);
 Ш₁, Ш₂, Ш₃ — вращательные шарниры

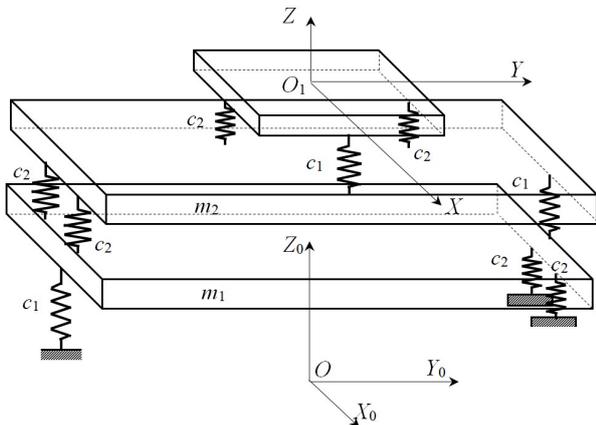


Рис. 2. Динамическая модель колебаний ГПМ:
 O₁XYZ и O₀X₀Y₀Z₀ — подвижная и неподвижная системы координат; m₁ — масса наклонной панели, m₂ — масса поворотной-опорной панели, m₃ — масса рабочей панели

ное число степеней свободы, что негативно сказывается не только на кинематике, но и на динамике манипулятора. Поэтому для составления расчетной схемы манипулятора необходимо уменьшить число деталей, включаемых в нее, и тем самым уменьшить число степеней свободы [8].

Для этого при разработке динамической модели колебаний манипулятора были приняты допущения, описанные в [9].

Применяя эти допущения, будем рассматривать колебания манипулятора по трем координатным направлениям: крутильные колебания по осям X, Y и продольные колебания вдоль оси Z. Тогда расчетная схема динамической модели ГПМ может быть представлена в виде, изображенном на рис. 2.

Из рис. 2 видно, что ГПМ можно структурно изобразить в виде трех элементов:

— пружины: жесткостью c₁ (привод a) и 2c₂ (два вращательных шарнира Ш₁), действующие в направлении оси Z;

— пружины: жесткостями 2c₂ (два вращательных шарнира Ш₂) и c₁ (привод b), действующие в направлении оси Z;

— пружины: жесткостями c₁ (привод c) и 2c₂ (два вращательных шарнира Ш₃) действующие в направлении оси Z.

Считаем, что коэффициенты жесткости шарниров Ш₁, Ш₂ и Ш₃ одинаковы и равны c₂.

Из рис. 2 видно, что первый «параллелепипед» имеет коэффициент жесткости слева c₁ и справа 2c₂ (параллельное соединение двух элементов c₂); второй «параллелепипед» имеет коэффициент жесткости слева 2c₂ (параллельное соединение двух элементов c₂) и справа c₁; третий «параллелепипед» имеет жесткость слева c₂, справа c₂ и спереди c₁. Тогда видно, что слева элементы пружин с коэффициентами жесткости c₁, 2c₂, c₂ и справа элементы пружин с жесткостями c₂, 2c₂, c₁ соединены последовательно.

Переведем жесткость в податливость и определим её приведённое значение для элементов, соединенных последовательно [10] (рис. 2):

$$\frac{1}{C_{np.1}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{2c_2} + \frac{1}{c_2}, \quad (1)$$

где c₁ — это коэффициент жесткости приводов a, b и c соответственно; c₂ — коэффициент жесткости шарниров Ш₂ и Ш₃ соответственно.

Из формулы (1) находим

$$C_{np.1} = \frac{c_1 \cdot 2c_2 \cdot c_2}{c_1 \cdot 2c_2 + c_1 \cdot c_2 + 2c_2 \cdot c_2} = \frac{2c_1c_2^2}{3c_1c_2 + 2c_2^2} = \frac{2c_1c_2}{3c_1 + 2c_2}. \quad (2)$$

Аналогично из (1) находим

$$C_{np.2} = c_1; \quad (3)$$

$$C_{np.3} = \frac{2c_2 \cdot c_1c_2}{2c_2 \cdot c_1 + 2c_2 \cdot c_2 + c_1 \cdot c_2} = \frac{2c_1c_2^2}{3c_1c_2 + 2c_2^2} = \frac{2c_1c_2}{3c_1 + 2c_2}. \quad (4)$$

Для простоты обозначим:

$$C_{np.1} = C_1, \quad C_{np.2} = C_2$$

$$\text{и } C_{np.3} = C_3.$$

Таким образом, динамическую модель ГПМ (рис. 2) можно преобразовать в эквивалентную динамическую модель ГПМ (рис. 3), в которой «новая» пружина слева имеет коэффициент жесткости C₁, «новая» пружина спереди имеет коэффициент жесткости C₂ и «новая» пружина справа имеет коэффициент жесткости C₃;

2) Колебания системы

Дифференциальные уравнения вынужденных колебаний эквивалентной динамической модели, представленной на рис. 3, составим в форме системы уравнений Лагранжа II рода [11]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i, \quad (5)$$

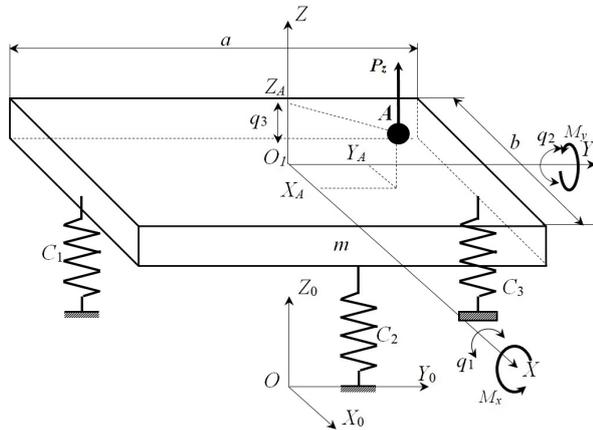


Рис. 3. Эквивалентная модель колебаний ГПМ:
 X_A, Y_A, Z_A — координаты центра тяжести системы;
 a и b — длина и ширина рабочей панели манипулятора;
 q_1, q_2 и q_3 — обобщенные координаты;
 m — масса манипулятора

где T — кинетическая энергия системы; Π — потенциальная энергия системы; s — число обобщенных координат (в данном механизме $s = 3$); q_i — обобщенные координаты (q_1 — поворот вокруг оси X , q_2 — поворот вокруг оси Y , q_3 — перемещение вдоль оси Z); Q_i — обобщенные возмущающие силы, $i = 1, 2, 3$.

Применяя теорему Кёнига [11, с. 190], представляем кинетическую энергию подвижного параллелепипеда (рис. 3) в виде кинетической энергии, связанной с перемещением центра тяжести A , и кинетической энергии в относительном движении (связанной с поворотом системы вокруг осей X и Y):

$$\begin{aligned} \dot{X} &= Z_A \cdot (\dot{q}_2), \dot{Y} = Z_A \cdot (\dot{q}_1), \dot{Z} = \\ &= Y_A \cdot (\dot{q}_1) + X_A \cdot (\dot{q}_2) + \dot{q}_3, \\ J\omega^2 &= J_X \cdot (\dot{q}_1)^2 + J_Y \cdot (\dot{q}_2)^2 + \\ &+ J_{XY} \cdot (\dot{q}_1) \cdot (\dot{q}_2) + \\ &+ J_{YZ} \cdot (\dot{q}_2) \cdot (\dot{q}_3) + J_{XZ} \cdot (\dot{q}_1) \cdot (\dot{q}_3) \end{aligned} \quad (6)$$

Применяя допущение, что координатные оси выбраны как главные оси инерции, тогда и все центробежные моменты инерции будут обращены в нуль [10, с. 21].

Тогда

$$T = \frac{1}{2} \left[m \left((\dot{X})^2 + (\dot{Y})^2 + (\dot{Z})^2 \right) + \left(J_X \cdot (\dot{q}_1)^2 + J_Y \cdot (\dot{q}_2)^2 \right) \right] \quad (7)$$

где $m = (m_1 + m_2 + m_3)$ — масса системы: m_1 — масса наклонной панели, m_2 — масса поворотной опорной панели, m_3 — масса рабочей панели; J_X, J_Y — моменты инерции системы относительно координатных осей X, Y .

Подставив (6) в (7), получим выражение кинетической энергии системы:

$$T = \frac{1}{2} \left[m \cdot [(Y_A \cdot \dot{q}_1 + X_A \cdot \dot{q}_2)^2 + (\dot{q}_3)^2] + J_X \cdot (\dot{q}_1)^2 + J_Y \cdot (\dot{q}_2)^2 \right] \quad (8)$$

Из (8) находим:

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial T}{\partial q_2} = \frac{\partial T}{\partial q_3} = 0. \quad (9)$$

Дважды дифференцируя (8) (по \dot{q}_i и по времени), получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) &= \frac{1}{2} \left[(m \cdot Y_A^2 + J_X) \cdot \ddot{q}_1 + m \cdot X_A \cdot Y_A \cdot \ddot{q}_2 \right], \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) &= \frac{1}{2} \left[m \cdot X_A \cdot Y_A \cdot \ddot{q}_1 + (m \cdot X_A^2 + J_Y) \cdot \ddot{q}_2 \right], \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} \right) &= \frac{1}{2} m \cdot \ddot{q}_3 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Потенциальная энергия определяется из выражения [12], [13]

$$\Pi_i = \frac{C_i x_i^2}{2}, \quad (11)$$

где C_i — жесткость i -й пружины; x_i — деформация (сжатие-растяжение) i -й пружины.

Из рис. 3 видно:

$$\begin{aligned} x_1 &= \left(q_3 + q_1 \cdot \frac{a}{2} \right) + \left(q_3 - q_1 \cdot \frac{a}{2} \right), \\ x_2 &= \left(q_2 \cdot \frac{b}{2} \right), \quad x_3 = q_3. \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда, используя выражения (2–4), (11) и (12), раскрывая скобки, группируя, получим выражение для потенциальной энергии системы:

$$\Pi = \frac{1}{2} \left[\frac{c_1 c_2}{3c_1 + 2c_2} \cdot q_1^2 + \frac{b^2}{4} c_1 \cdot q_2^2 + \frac{3c_1^2 + 10c_1 c_2}{3c_1 + 2c_2} \cdot q_3^2 \right] \quad (13)$$

где a — длина основания (поворотного стола, равная длине поворотной опорной панели); b — ширина рабочей панели; c_1, c_2 и c_3 — коэффициенты жесткости из (1).

Дифференцируя (13) по обобщенным координатам, получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} &= \frac{1}{2} \left[\frac{2c_1 c_2}{3c_1 + 2c_2} \right] \cdot q_1, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} &= \frac{1}{2} \left[\frac{b^2}{2} c_1 \right] \cdot q_2, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial q_3} &= \frac{1}{2} \left[\frac{6c_1^2 + 20c_1 c_2}{3c_1 + 2c_2} \right] \cdot q_3 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

С учетом (9), (10) и (14) запишем уравнения колебаний системы в форме (5):

$$\left. \begin{aligned} & (m \cdot Y_A^2 + J_X) \cdot \ddot{q}_1 + \\ & + m \cdot X_A \cdot Y_A \cdot \ddot{q}_2 + \frac{2c_1 c_2}{3c_1 + 2c_2} q_1 = M_X, \\ & m \cdot X_A \cdot Y_A \cdot \ddot{q}_1 + \\ & + (m \cdot X_A^2 + J_Y) \cdot \ddot{q}_2 + \frac{b^2}{2} c_1 \cdot q_2 = M_Y, \\ & m \cdot \ddot{q}_3 + \frac{6c_1^2 + 20c_1 c_2}{3c_1 + 2c_2} q_3 = P_Z \end{aligned} \right\}. \quad (15)$$

Для удобства решения дифференциальные уравнения колебаний системы (15) запишем в матричном виде [12, с. 181], [13, с. 122]:

$$\|a\| \cdot \{\ddot{q}_i\} + \|c\| \cdot \{q_i\} = \{Q_i\}, \quad (16)$$

где $\|a\|$ — матрица коэффициентов инерции; $\|c\|$ — матрица коэффициентов жесткости; $\{Q_i\}$ — матрица обобщенных возмущающих сил.

В нашу задачу входит определение только резонансных частот колебаний манипулятора как системы, которые определяются как собственные частоты колебаний. Поэтому положим $Q_i = 0$.

Тогда (16) запишется:

$$\|a\| \cdot \{\ddot{q}_i\} + \|c\| \cdot \{q_i\} = 0. \quad (17)$$

Уравнения (17) представляют собой свободные колебания системы с тремя степенями свободы, где

$$\|a\| = \begin{vmatrix} (mY_A^2 + J_X) & mX_A Y_A & 0 \\ mX_A Y_A & (mX_A^2 + J_Y) & 0 \\ 0 & 0 & m \end{vmatrix},$$

$$\|c\| = \begin{vmatrix} \frac{2c_1 c_2}{3c_1 + 2c_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b^2}{2} \cdot c_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6c_1^2 + 20c_1 c_2}{3c_1 + 2c_2} \end{vmatrix}.$$

Решение системы (17) будем искать в виде: $q_i = A_i \cdot \sin(k \cdot t + \beta)$, т.е.

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= A_1 \cdot \sin(k \cdot t + \beta_1) \\ q_2 &= A_2 \cdot \sin(k \cdot t + \beta_2) \\ q_3 &= A_3 \cdot \sin(k \cdot t + \beta_3) \end{aligned} \right\}, \quad (18)$$

где k_i — собственные частоты системы; β_i — начальные фазы; A_i — амплитуды колебаний.

Продифференцируем q_i по времени дважды:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_1 &= -A_1 \cdot k^2 \sin(k \cdot t + \beta_1) \\ \ddot{q}_2 &= -A_2 \cdot k^2 \sin(k \cdot t + \beta_2) \\ \ddot{q}_3 &= -A_3 \cdot k^2 \sin(k \cdot t + \beta_3) \end{aligned} \right\}. \quad (19)$$

Подставляя выражения (18) и (19) в (17) и приводя подобные, получим:

$$\left. \begin{aligned} & A_1 \left(k^2 (mY_A^2 + J_X) - \frac{2c_1 c_2}{3c_1 + 2c_2} \cdot mX_A \cdot Y_A \right) + \\ & + A_2 k^2 \cdot mX_A \cdot Y_A = 0, \\ & A_1 k^2 \cdot mX_A \cdot Y_A + \\ & + A_2 \left(k^2 (mX_A^2 + J_Y) - \frac{b^2}{2} C_1 \right) = 0, \\ & A_3 \left(mk^2 - \frac{6c_1^2 + 20c_1 \cdot c_2}{3c_1 + 2c_2} \right) = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (20)$$

Следовательно, определитель системы (20) будет:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{vmatrix},$$

где α_{ij} — коэффициенты, введенные для упрощения записи и характеризующие собственные свойства системы:

$$\alpha_{11} = \frac{2c_1 c_2}{3c_1 + 2c_2} - (mY_A^2 + J_X)k^2, \quad \alpha_{12} = -mX_A Y_A,$$

$$\alpha_{13} = 0, \quad \alpha_{21} = -mX_A Y_A, \quad \alpha_{22} = \frac{b^2}{2} c_1 - (mX_A^2 + J_Y)k^2,$$

$$\alpha_{23} = 0, \quad \alpha_{31} = 0, \quad \alpha_{32} = 0, \quad \alpha_{33} = \frac{6c_1^2 + 20c_1 c_2}{3c_1 + 2c_2} - mk^2.$$

При равенстве нулю данного определителя получим частотное уравнение $\Delta = 0$, из которого найдем собственные частоты колебаний манипулятора:

$$\alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{33} - \alpha_{12} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_{33} = 0,$$

$$\alpha_{33} (\alpha_{22} \cdot \alpha_{33} - \alpha_{12} \cdot \alpha_{21}) = 0. \quad (21)$$

Из (21) видно, что первое решение: $\alpha_{33} = 0$, или $\frac{6c_1^2 + 20c_1 c_2}{3c_1 + 2c_2} - mk^2 = 0$, откуда

$$k_3 = \sqrt{\frac{6c_1^2 + 20c_1 c_2}{m \cdot (3c_1 + 2c_2)}}. \quad (22)$$

Второе решение: $(\alpha_{22} \cdot \alpha_{33} - \alpha_{12} \cdot \alpha_{21}) = 0$,

$$\left(\frac{2c_1 c_2}{3c_1 + 2c_2} - (mY_A^2 + J_X)k^2 \right) \times$$

$$\times \left(\frac{b^2}{2} c_1 - (mX_A^2 + J_Y)k^2 \right) - (mX_A Y_A)^2 = 0.$$

Раскрывая скобки, группируя и делая замену постоянных коэффициентов, получаем:

$$A \cdot (k^2)^2 - B \cdot (k^2) + C = 0, \quad (23)$$

где A, B, C — постоянные коэффициенты, зависящие от геометрических, инерционных и жесткостных параметров системы.

$$A = (mY_A^2 + J_X)(mX_A^2 + J_Y),$$

$$B = \left(\frac{2c_1 c_2}{3c_1 + 2c_2} \cdot (mY_A^2 + J_X) + \frac{b^2}{2} c_1 \cdot (mX_A^2 + J_Y) \right),$$

$$C = \frac{c_1^2 c_2 b^2}{3c_1 + 2c_2}.$$

Решая уравнение (23), находим

$$k_{1,2} = \sqrt{\frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}}. \quad (24)$$

Решения уравнений вынужденных колебаний манипулятора, представленных системой (16) [13, с. 123], в матричном виде можно представить в виде

$$q_j = A_j \sin(pt + \delta_j), \quad (25)$$

где A_j — амплитуда вынужденных колебаний с частотами p и начальной фазой колебаний δ_j , решения которых представляют сумму решений (18) свободных колебаний манипулятора и частного решения (25).

Выводы

1. Таким образом, на основе математического моделирования разработана эквивалентная динамическая модель колебаний манипулятора с помощью замены его структурных элементов — упругими элементами с известными коэффициентами жесткости.

2. Определена система дифференциальных уравнений (17), описывающих свободные колебания системы, и найдены резонансные параметры манипулятора: частоты k_1 и k_2 — собственные частоты крутильных колебаний вокруг осей X и Y (24) и частота k_3 — собственная частота продольных колебаний вдоль оси Z (22), зависящие от геометрических, массовых и жесткостных параметров манипулятора.

3. На базе уравнений динамики Лагранжа второго рода составлена система колебательных движений манипулятора (15–16), имитирующая его поведение как системы от внешних нагрузок, и определена методика нахождения ее решений (25).

Библиографический список

1. Балакин П. Д., Шамутдинов А. Х. Схемное решение механизма пространственного манипулятора // Омский научный вестник. 2012. № 2. С. 65–69.
2. Пат. 170930 Российская Федерация, МПК В 25 J 1/00. Пространственный механизм с шестью степенями свободы / Балакин П. Д., Шамутдинов А. Х. № 2016115295; заявл. 19.05.16; опубл. 15.05.17, Бюл. № 14.
3. Шамутдинов А. Х., Лесняк И. Ю. Методика определения реакций в шарнирах механизма оригинального манипулятора // Омский научный вестник. 2022. № 2 (182). С. 28–32. DOI: 10.25206/1813-8225-2022-182-28-32.
4. Люкшин В. С. Теория винтовых поверхностей в проектировании режущих инструментов. Москва: Машиностроение, 1967. 372 с.
5. Orsino R. M. M., Hess-Coelho T. A., Malvezzi F. Applications of the modular modelling methodology to the dynamic analysis

of parallel manipulators with common subsystems // International conference on the theory of machines and mechanisms. 2021. Vol. 85. P. 123–133. DOI: 10.1007/978-3-030-83594-1_13.

6. Shi Z. X., Eric Fung H. K., Li Y. C. Dynamic modelling of a rigid-flexible manipulator for constrained motion task control // Applied Mathematical Modelling. 1999. Vol. 23, no 7. P. 509–525. DOI: 10.1016/S0307-904X(98)10096-3.

7. Cai J., Deng J., Zhang W. [et al.]. Modeling method of autonomous robot manipulator based on D-H algorithm // Artificial intelligence and edge computing in mobile information systems. 2021. 4448648. DOI: 10.1155/2021/4448648.

8. Артоболевский И. И. Теория механизмов и машин. Москва: Наука, 1975. 640 с. ISBN 5-02-013810-X.

9. Шамутдинов А. Х., Балакин П. Д., Закерничная Н. В. Динамика колебаний манипулятора на основе математического моделирования // Наука и бизнес: пути развития. 2019. № 1 (91). С. 28–32.

10. Писаренко Г. С., Агарев В. А., Квитка А. Л. [и др.]. Сопротивление материалов / под общ. ред. Г. С. Писаренко. 4-е изд., перераб. и доп. Киев: Выща школа, 1979. 696 с.

11. Яблонский А. А. Курс теоретической механики. В 2 ч. Ч. 2. Динамика. Москва: Высшая школа, 1966. 411 с.

12. Яблонский А. А., Норейко С. С. Курс теории колебаний. Изд. 3-е, испр. и доп. Москва: Высшая школа, 1975. 248 с.

13. Кольцов А. Г., Шамутдинов А. Х. Исследование динамики механизмов параллельной кинематики с новой структурой // Современные тенденции в технологиях металлообработки и конструкция металлообрабатывающих машин и комплектующих изделий: межвуз. науч. сб. Уфа, 2012. Т. 16, № 4 (49). С. 120–128.

ШАМУТДИНОВ Айдар Харисович, кандидат технических наук, профессор Российской академии естественных наук, доцент кафедры «Техническая механика» Омского автобронетанкового инженерного института, г. Омск.

SPIN-код: 4939-6254

AuthorID: 688427

ORCID: 0000-0001-5896-7247

Адрес для переписки: 1972id@list.ru

ЛЕСНЯК Иван Юрьевич, кандидат технических наук, и. о. заведующего, доцент кафедры «Машиноведение» Омского государственного технического университета, г. Омск.

SPIN-код: 6114-0646

ResearcherID: E-6397-2014

ORCID: 0000-0002-9481-5985

Адрес для переписки: lesnyak.ivan@gmail.com

Для цитирования

Шамутдинов А. Х., Лесняк И. Ю. Имитация динамики колебаний манипулятора с помощью уравнений Лагранжа II рода // Омский научный вестник. 2022. № 3 (183). С. 53–57. DOI: 10.25206/1813-8225-2022-183-53-57.

Статья поступила в редакцию 28.03.2022 г.

© А. Х. Шамутдинов, И. Ю. Лесняк