

УДК 514.182.7:004.925.8

DOI: 10.25206/1813-8225-2022-183-5-9

**Е. В. КОНОПАЦКИЙ
И. Г. БАЛЮБА**Донбасская национальная академия
строительства и архитектуры,
г. Макеевка

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДУГИ ОБВОДА НА ОСНОВЕ КОНФИГУРАЦИИ ДЕЗАРГА

Предложен новый геометрический алгоритм моделирования дуги обвода в виде кривой одного отношения на основе конфигурации Дезарга, параметризация которого выполнена с помощью математического аппарата «Точечное исчисление». Проведенный анализ показал, что полученная дуга обвода обладает интересными геометрическими свойствами, которые потенциально могут быть использованы для моделирования одномерных и многомерных обводов высокого порядка гладкости, что составляет перспективу дальнейших исследований. Представлено подробное описание процесса параметризации дуги обвода в точечном исчислении, исходя из предложенного геометрического алгоритма ее построения за исключением громоздких преобразований. Приведенные приемы параметризации геометрических объектов в точечном исчислении на основе простого отношения трех точек прямой, инвариантного относительно параллельного проецирования, могут быть использованы другими исследователями для решения широкого круга задач инженерной геометрии и компьютерной графики. Приведены примеры моделирования пространственных и плоских, замкнутых и незамкнутых дуг обвода, которые могут найти свое применение в качестве формообразующих элементов поверхностей технических форм.

Ключевые слова: конфигурация Дезарга, дуга обвода, геометрический алгоритм, точечное исчисление, порядок гладкости, касательная.

Введение. Теорема Дезарга является одной из красивейших теорем проективной геометрии, которая наглядно раскрывает принцип двойственности прямых и точек. В соответствии с [1] теорема Дезарга гласит, что если в двух треугольниках прямые, соединяющие соответственные вершины, проходят через одну точку, то три точки пересечения соответственных сторон этих треугольников лежат на одной прямой, и наоборот. Теорема Дезарга используется для решения широкого круга задач проективной геометрии [2]. Она имеет несколько обобщений, примером которых служат работы [3, 4]. Её графической интерпретацией является конфигурация Дезарга (рис. 1), которая нашла широкое применение в теории геометрических построений. Например, с её помощью были получены графические

алгоритмы построения квадрики, заданной девятью точками [5]. Её применяют в области автоматизации процессов синтеза компьютерных программ для решения геометрических задач методами конструктивного моделирования [6] и для построения более сложных конфигураций на её основе [7, 8]. Имеются примеры практического использования конфигурации Дезарга в строительстве и архитектуре [9, 10]. Кроме того, теорема Дезарга нашла широкое применение в сфере образования [11–13]. Также конфигурацию Дезарга можно использовать для моделирования пространственных кривых и, в частности, дуг обвода.

Моделирование дуги обвода на основе теоремы Дезарга. Дополним конфигурацию Дезарга (рис. 1) системой подвижных линий, формирующих пол-

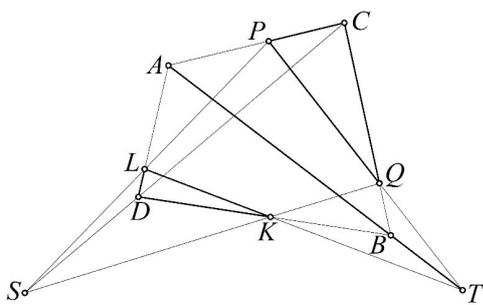


Рис. 1. Графическая интерпретация теоремы Дезарга

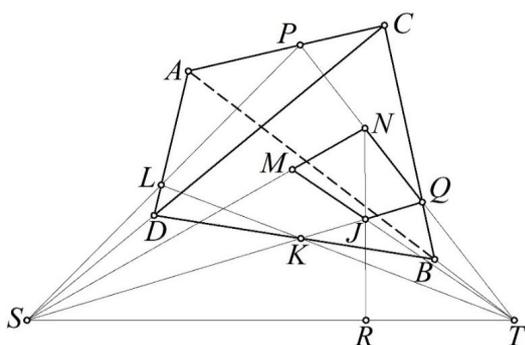


Рис. 2. Геометрическая схема моделирования дуги обвода на основе конфигурации Дезарга

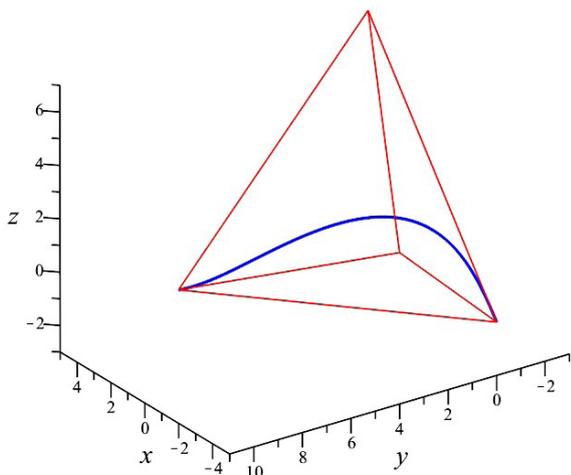


Рис. 3. Визуализация пространственной дуги обвода, полученной на основе конфигурации Дезарга

ный четырёхсторонник $MNQJ$ в симплексе трёхмерного пространства $ABCD$ (рис. 2).

Одним из способов построения дуг обвода является использование кривых одного отношения [14], примерами которых могут служить кривые Безье. Согласованное одним и тем же параметром движение точек обеспечивает наличие касательных в начальной и конечной точках дуги обвода. Исходя из этого принимаем текущий параметр t в виде единого отношения соответствующих направленных отрезков (рис. 2):

$$t = \frac{AP}{AC} = \frac{CQ}{CB} = \frac{BK}{BD} = \frac{PN}{PQ} = \frac{QJ}{QK} = \frac{TR}{TS}. \quad (1)$$

Преобразуем полученные соотношения, используя правила преобразования простого отношения трёх точек прямой точечного исчисления [15, 16]:

$$ACP = CBQ = BDK = PQN = QKJ = TSR = \frac{t}{\bar{t}},$$

где $\bar{t} = 1 - t$ — дополнение параметра $t \in [0;1]$ до 1.

Используя O -теорему (теорему об отношениях) точечного исчисления [15, 16], частным случаем которой является теорема Менелая, для треугольника ACB , рассечённого прямой PQT , получим следующую зависимость:

$$ACP \cdot CBQ \cdot BAT = -1 \Rightarrow ABT = -\frac{t^2}{\bar{t}^2}.$$

Отсюда определяем точку T :

$$ABT = \frac{A - T}{T - B} = -\frac{t^2}{\bar{t}^2} \Rightarrow T = \frac{A\bar{t}^2 - Bt^2}{1 - 2t}.$$

Аналогичным образом из треугольника CBD , рассечённого прямой QKS , определяем точку S :

$$S = \frac{C\bar{t}^2 - Dt^2}{1 - 2t}.$$

Точку R определим из соотношения (1):

$$\begin{aligned} \frac{T - R}{T - S} = t &\Rightarrow R = T\bar{t} + St \Rightarrow \\ \Rightarrow R &= \frac{A\bar{t}^3 - Bt^2\bar{t} + C\bar{t}^2t - Dt^3}{1 - 2t}. \end{aligned}$$

Исходя из геометрической схемы (рис. 2) текущие точки N и J описывают дуги кривой Безье 2-го порядка в симплексах ABC и CBD соответственно. Используя соотношения (1), получим:

$$\begin{aligned} \frac{AP}{AC} = \frac{CQ}{CB} = \frac{PN}{PQ} = t &\Rightarrow N = A\bar{t}^2 + 2C\bar{t}t + Bt^2, \\ \frac{CQ}{CB} = \frac{BK}{BD} = \frac{QJ}{QK} = t &\Rightarrow J = C\bar{t}^2 + 2B\bar{t}t + Dt^2. \end{aligned}$$

Переопределим точку J в симплексе плоскости SNT :

$$J = (S - T)p_j + (N - T)q_j + T,$$

где $p_j = \frac{JQ}{SQ}$ и $q_j = \frac{JR}{NR}$ (рис. 2).

Определим текущую точку дуги обвода M как результат пересечения прямых SN и TJ . Для этого сформируем подвижный треугольник переменной площади TJM , определяемый движением точки M по прямой SN с помощью параметра λ : $M = S\bar{\lambda} + N\lambda$, где $\bar{\lambda} = 1 - \lambda$. Далее определим значение параметра λ , при котором площадь переменного треугольника TJM будет равна нулю, и он выродится в прямую. В соответствии с S -теоремой (теорема о площадях) точечного исчисления [15], получим:

$$\begin{vmatrix} p_j & q_j & 1 - p_j - q_j \\ \bar{\lambda} & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{q_j}{p_j + q_j}.$$

$$M = S \frac{p_j}{p_j + q_j} + N \frac{q_j}{p_j + q_j}.$$

Параметры p_j и q_j определим, исходя из инвариантных свойств простого отношения трёх точек прямой относительно параллельного проецирования:

$$p_j = \frac{J - Q}{S - Q} = 2t - 1, \quad q_j = \frac{J - R}{N - R} = \frac{\bar{t}}{t},$$

где J, S, N, R — текущие точки, уравнения которых были получены выше;

$Q = (B - C)t + C$ — текущая точка, которая определяется из соотношения (1).

В результате, после подстановок и преобразований, получим:

$$M = S \frac{t(2t - 1)}{2t^2 - 2t + 1} + N \frac{\bar{t}}{2t^2 - 2t + 1}.$$

После замены точек S и N определим искомое точечное уравнение дуги обвода в симплексе $ABCD$:

$$M = \frac{A\bar{t}^3 + Bt^2\bar{t} + C\bar{t}^2t + Dt^3}{2t^2 - 2t + 1}. \quad (2)$$

Или в координатной форме для трёхмерного пространства:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A\bar{t}^3 + x_Bt^2\bar{t} + x_C\bar{t}^2t + x_Dt^3}{2t^2 - 2t + 1} \\ y_M = \frac{y_A\bar{t}^3 + y_Bt^2\bar{t} + y_C\bar{t}^2t + y_Dt^3}{2t^2 - 2t + 1} \\ z_M = \frac{z_A\bar{t}^3 + z_Bt^2\bar{t} + z_C\bar{t}^2t + z_Dt^3}{2t^2 - 2t + 1} \end{cases}$$

Анализ полученной дуги обвода. Как видно из уравнения (2), дуга обвода, полученная на основе конфигурации Дезарга, зависит только от параметра t и точек трёхмерного симплекса $ABCD$ (и, соответственно, их координат), который можно рассматривать как систему двух скрещивающихся прямых AC и DB . Эти прямые являются касательными дуги обвода. Исходя из этого, полученная дуга обвода является пространственной кривой двойкой кривизны. Визуализация полученной дуги представлена на рис. 3.

Числитель точечного уравнения (2) является симметричным выражением и очень похож на точечное уравнение дуги кривой Безье 3-го порядка ($M = A\bar{t}^3 + 3Bt^2\bar{t} + 3C\bar{t}^2t + Dt^3$) за исключением двух постоянных коэффициентов, равных 3, которые определяются биномом Ньютона.

Полученная дуга обвода, как и другие геометрические объекты, параметризованные на основе алгоритмов проективной геометрии, демонстрирует высокую устойчивость к совпадению точек. Например, в случае совпадения точек $C \equiv B$ получим плоскую дугу обвода, визуализация которой приведена на рис. 4:

$$M = \frac{A\bar{t}^3 + Bt\bar{t} + Dt^3}{2t^2 - 2t + 1} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A\bar{t}^3 + x_Bt\bar{t} + x_Dt^3}{2t^2 - 2t + 1} \\ y_M = \frac{y_A\bar{t}^3 + y_Bt\bar{t} + y_Dt^3}{2t^2 - 2t + 1} \\ z_M = \frac{z_A\bar{t}^3 + z_Bt\bar{t} + z_Dt^3}{2t^2 - 2t + 1} \end{cases}$$

Следует отметить, что полученная плоская дуга обвода на интервале изменения параметра t от 0

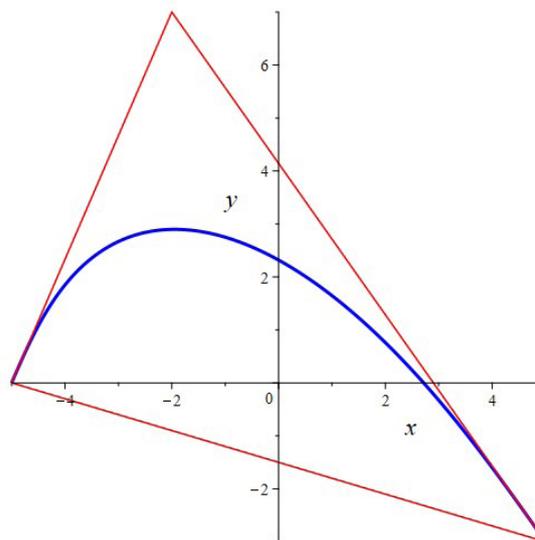


Рис. 4. Визуализация плоской дуги обвода, полученной на основе конфигурации Дезарга

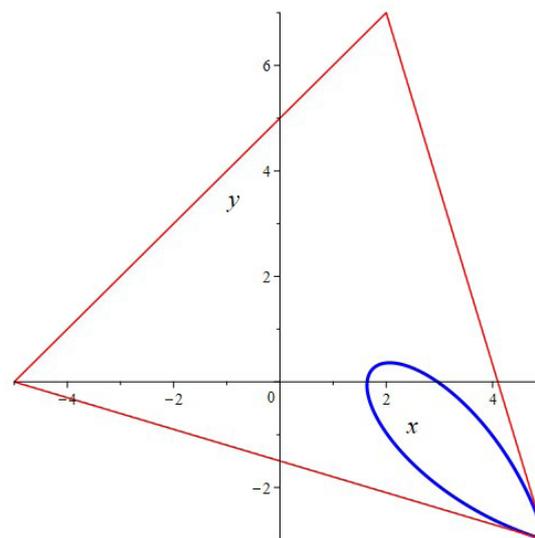


Рис. 5. Визуализация плоской замкнутой дуги обвода, полученной на основе конфигурации Дезарга

до 1 не содержит точек перегиба. Но если необходимо смоделировать плоскую дугу обвода с точкой перегиба, то достаточно выбрать координаты точек в уравнении (2) таким образом, чтобы все точки принадлежали одной плоскости, но не совпадали друг с другом, а касательные были направлены в разные стороны.

Совпадение начальной и конечной точек $A \equiv D$ даёт замкнутую дугу обвода (рис. 5):

$$M = \frac{A(1 - 3t\bar{t}) + Bt^2\bar{t} + C\bar{t}^2t}{2t^2 - 2t + 1} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A(1 - 3t\bar{t}) + x_Bt^2\bar{t} + x_C\bar{t}^2t}{2t^2 - 2t + 1} \\ y_M = \frac{y_A(1 - 3t\bar{t}) + y_Bt^2\bar{t} + y_C\bar{t}^2t}{2t^2 - 2t + 1} \\ z_M = \frac{z_A(1 - 3t\bar{t}) + z_Bt^2\bar{t} + z_C\bar{t}^2t}{2t^2 - 2t + 1} \end{cases}$$

Значение параметра $t = 0$ определяет начальную точку дуги обвода A , а $t = 1$ — конечную точку дуги обвода D . При $t = 0,5$ дуга обвода проходит через центр тяжести G тетраэдра $ABCD$:

$$G = \frac{A + B + C + D}{4}.$$

Исследуем знаменатель точечного уравнения (2). Дискриминант квадратного уравнения $2t^2 - 2t + 1 = 0$ равен -4 . Это значит, что уравнение имеет только комплексные корни. Поскольку интервал изменения параметра t лежит в пределах от 0 до 1, то в его пределах дуга обвода является непрерывной.

Продифференцируем точечное уравнение (2) по параметру t :

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} = & \frac{-2t^4 + 4t^3 - 3t^2 + 2t - 1}{(2t^2 - 2t + 1)^2} A + \\ & + \frac{-2t^4 + 4t^3 - 5t^2 + 2t}{(2t^2 - 2t + 1)^2} B + \\ & + \frac{2t^4 - 4t^3 + 5t^2 - 4t + 1}{(2t^2 - 2t + 1)^2} C + \frac{2t^4 - 4t^3 + 3t^2}{(2t^2 - 2t + 1)^2} D. \end{aligned}$$

При значении параметра $t = 0$ получим $\frac{dM}{dt} = C - A \neq 0$, а при $t = 1$ — $\frac{dM}{dt} = D - B \neq 0$. Промежуточные значения параметра t дают линейную функцию от исходных точек $\frac{dM}{dt} = f(A, B, C, D)$ и их координат в случае покоординатного расчёта (для x : $\frac{dx_M}{dt} = f(x_A, x_B, x_C, x_D)$ и т.д.). То есть на интервале изменения параметра от 0 до 1 кривая является гладкой [17]. Обратим внимание, что в обоих случаях значения дифференцируемой функции определяется двумя точками (A и C при $t = 0$, D и B при $t = 1$), которые определяют касательные в начальной и конечной точках дуги обвода. Поскольку касательная, так же как и простое отношение трёх точек прямой, обладает инвариантными свойствами относительно параллельного проецирования, то все дифференциальные свойства кривой в начальной и конечной точках сохраняются в случае проецирования полученной дуги обвода на любую плоскость.

Определим вторую производную точечного уравнения дуги обвода (2) по параметру t :

$$\begin{aligned} \frac{d^2M}{dt^2} = & \frac{-4t^3 + 6t - 2}{(2t^2 - 2t + 1)^3} A + \frac{4t^3 - 6t + 2}{(2t^2 - 2t + 1)^3} B + \\ & + \frac{-4t^3 + 12t^2 - 6t}{(2t^2 - 2t + 1)^3} C + \frac{4t^3 - 12t^2 + 6t}{(2t^2 - 2t + 1)^3} D. \end{aligned}$$

При значении параметра $t = 0$ получим $\frac{d^2M}{dt^2} = 2B - 2A \neq 0$, а при $t = 1$ — $\frac{d^2M}{dt^2} = 2C - 2D \neq 0$. По аналогии с определением первой производной точечного уравнения (2) при начальном и конечном значениях текущего параметра t значения дифференцируемой функции определяются двумя точками. Только эти точки умножены на некоторое число n , в данном случае равное 2. Эти пары точек однозначно определяют прямые линии, которые можно использовать для стыковки дуг обвода по 2-му порядку гладкости. Таким образом, используя полученные линейные зависимости, можно согласовать координаты точек предыдущей и последующей дуги обвода, добившись 2-го порядка гладкости.

Если дифференцировать точечное уравнение дуги обвода (2) дальше, то получится интересная закономерность.

Для четных порядков производных начальное и конечное значения параметра t обеспечивают пары точек симплекса, умноженные на n , по аналогии с дифференцированием 2-го порядка. А для нечётных порядков производных формируется комбинация точек, из которой можно выделить точечную формулу параллельного переноса, и тогда также сформировать пару точек симплекса для согласования со следующим сегментом обвода. Таким образом, вырисовывается некий геометрический алгоритм моделирования обводов высоких порядков гладкости, разработка которого является перспективной дальнейших исследований.

Заключение. На основе конфигурации Дезарга разработан новый геометрический алгоритм моделирования дуги обвода в виде кривой одного отношения, который обладает интересными геометрическими свойствами и в перспективе открывает возможности моделирования одномерных и многомерных обводов высокого порядка гладкости.

Вместе с тем, предложенный геометрический алгоритм не является единственно возможным. Перспективным направлением видится использование конфигурации Дезарга для конструирования других геометрических объектов, обладающих наперёд заданными свойствами.

Библиографический список

1. Глаголев Н. А. Проективная геометрия. Москва: Высшая школа, 1963. 244 с.
2. Масалова А. А., Алексанян Г. А. Использование интерактивной модели «Применение теоремы Дезарга к решению задач проективной геометрии» // Прикладные вопросы точных наук: материалы III Междунар. науч.-практ. конф. Армавир: Изд-во АГПУ, 2019. С. 317–320.
3. Пименов Р. Р. Обобщения теоремы Дезарга: скрытые пространства // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2016. № 1 (21). С. 44–57.
4. Пименов Р. Р. Обобщения теоремы Дезарга: геометрия перпендикулярного // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. 2016. № 1 (21). С. 28–43.
5. Короткий В. А. Графические алгоритмы построения квадрики, заданной девятью точками // Геометрия и графика. 2019. Т. 7, № 2. С. 3–12. DOI: 10.12737/article_5d2c1502670779.58031440.
6. Волошинов Д. В. Применение методов конструктивной геометрии для визуального синтеза и анализа компьютерных программ // Научно-технические ведомости СПбГТУ. 2006. № 3 (45). С. 65–78.
7. Иващенко А. В., Знаменская Е. П. Построение сложных конфигураций на основе конфигурации Дезарга // Перспективы науки. 2018. № 3 (102). С. 43–48.
8. Иващенко А. В., Знаменская Е. П. Варианты последовательностей построения конфигурации Дезарга // Вестник МГСУ. 2016. № 9. С. 130–139. DOI: 10.22227/1997-0935.2016.9.130-139.
9. Иващенко А. В., Знаменская Е. П. Геометрические конфигурации, используемые в металлоконструкциях в строительстве // Перспективы науки. 2019. № 1 (112). С. 43–49.
10. Иващенко А. В., Знаменская Е. П. Конфигурация Дезарга в архитектурном и дизайн-проектировании // Вестник МГСУ. 2014. № 9. С. 154–160.

11. Малинникова Н. А., Коробкова В. И. Приложение теоремы Дезарга к школьному курсу геометрии // Психология и педагогика: методика и проблемы практического применения. 2015. № 46. С. 89–94.

12. Торопова О. И. Формирование исследовательской компетенции обучающихся при решении задач по геометрии с помощью теоремы Дезарга // Бакалавр. 2018. № 1-2 (37-38). С. 18–21.

13. Бернацкий П. Н. Применение теоремы Дезарга для построений на плоскости в школьном курсе геометрии // Державинский форум. 2021. Т. 5. № 18. С. 94–104.

14. Балюба И. Г., Конопацкий Е. В. Конструирование дуг обвода из кривых одного отношения // GraphiCon 2017: тр. 27-й Междунар. конф. по компьютерной графике и машинному зрению (Пермь, 24–28 сентября 2017 г.). Пермь: Издат. центр ПГНИУ, 2017. С. 332–334.

15. Балюба И. Г., Конопацкий Е. В., Бумага А. И. Точечное исчисление. Макеевка: Донбасская национальная академия строительства и архитектуры, 2020. 244 с.

16. Балюба И. Г., Конопацкий Е. В. Точечное исчисление. Историческая справка и основополагающие определения // Физико-техническая информатика (СРТ2020): материалы 8-ой Междунар. конф. (Пушино, Московская обл., 09–13 ноября 2020 г.). Нижний Новгород: Научно-исследовательский центр физико-технической информатики, 2020. С. 321–327. DOI: 10.30987/conferencearticle_5fd755c0adb1d9.27038265.

17. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. В 3 т. Т. 2: Дифференциальное и интегральное исчисление / под ред. В. А. Садовниченко. 6-е изд., стер. Москва: Дрофа, 2004. 512 с.

КОНОПАЦКИЙ Евгений Викторович, доктор технических наук, доцент (Россия), профессор кафедры специализированных информационных технологий и систем Донбасской национальной академии строительства и архитектуры, г. Макеевка.

SPIN-код: 4566-6208

AuthorID (РИНЦ): 681553

AuthorID (SCOPUS): 57188826034

ORCID: 0000-0003-4798-7458

ResearcherID: D-3235-2019

Адрес для переписки: e.v.konopatskiy@mail.ru

БАЛЮБА Иван Григорьевич, доктор технических наук, профессор (Россия), профессор кафедры специализированных информационных технологий и систем Донбасской национальной академии строительства и архитектуры, г. Макеевка.

AuthorID (SCOPUS): 57215326314

ORCID: 0000-0002-8248-1797

Адрес для переписки: balyuba42@gmail.com

Для цитирования

Конопацкий Е. В., Балюба И. Г. Моделирование дуги обвода на основе конфигурации Дезарга // Омский научный вестник. 2022. № 3 (183). С. 5–9. DOI: 10.25206/1813-8225-2022-183-5-9.

Статья поступила в редакцию 04.04.2022 г.

© Е. В. Конопацкий, И. Г. Балюба