УДК/UDC 514.122.3
DOI: 10.25206/1813-8225-2025-194-26-34
EDN: PMANTK
Научная статья/Original article

СОПРЯЖЕНИЕ КРИВЫХ БЕЗЬЕ ДЛЯ ЗАДАЧ ГЛАДКОГО СОЕДИНЕНИЯ КРИВЫХ И СКРУГЛЕНИЯ УГЛОВ

О. В. Кривошеев[1,2], С. В. Маврин[1,2], А. С. Старкова[1]

[1]Российский федеральный ядерный центр –
Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики, г. Саров
[2]Саровский физико-технический институт –
филиал «Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г. Саров

Предлагается аналитический метод гладкого соединения двух кривых Безье произвольной степени соединительной линией, являющейся также кривой Безье. В точках сопряжения соединительной линии с исходными кривыми реализуется порядок гладкости, соответствующий степеням исходных кривых. На соединительную линию могут быть наложены дополнительные ограничения, которые часто возникают при решении реальных конструкторских задач. Доказаны теоремы о необходимых условиях существования соединительной кривой. Возможности предлагаемого метода применяются для решения следующих задач: гладкого соединения двух исходно заданных кривых Безье и гладкого скругления внутреннего угла, образованного пересекающимися исходно заданными кривыми Безье. Решение второй задачи позволяет выполнить как симметричное, так и несимметричное скругление углов, образованных пересечением не прямых линий, с сохранением высокой степени гладкости в точках сопряжения. Показано влияние дополнительных ограничений на форму соединительной кривой.

Предлагаемый математический метод основан на решении системы линейных уравнений, в которой уравнениями являются условия равенства производных в точках сопряжения и в точках дополнительных ограничений. Кривые Безье представляются как частные случаи B-сплайна. Предлагаемый метод применим как для 2D, так и для 3D случаев.

Ключевые слова: кривая Безье, параметрическая непрерывность, сопряжение, CAD-системы, геометрическое ядро, системы полного жизненного цикла «САРУС».

Для цитирования: Кривошеев О. В., Маврин С. В., Старкова А. С. Сопряжение кривых Безье для задач гладкого соединения кривых и скругления углов // Омский научный вестник. 2025. № 2 (194). С. 26–34. DOI: 10.25206/1813-8225-2025-194-26-34. EDN: PMANTK.

© Кривошеев О. В., Маврин С. В., Старкова А. С., 2025.
Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.

BEZIER CURVE CONJUGATION FOR SMOOTH CURVE JOINING AND CORNER ROUNDING

O. V. Krivosheev[1,2], S. V. Mavrin[1,2], A. S. Starkova[1]

[1]Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Research Institute of Experimental Physics, Sarov, Russia
[2]Sarov Institute of Physics and Technology –
Branch of the National Research Nuclear University "MEPhI", Sarov, Russia

The authors propose an analytical method for the smooth connection of two Bezier curves of arbitrary degree using a connecting curve, which is also a Bezier curve. At the points of connection between the connecting curve and the original curves, the smoothness order corresponds to the degrees of the original curves. Additional constraints can be imposed on the connecting curve, which frequently arise when addressing practical design challenges. Theorems establishing the necessary conditions for the existence of the connecting curve are proven. The capabilities of the proposed method are demonstrated by solving two problems: the smooth connection of two initially given Bezier curves and the smooth rounding of an interior corner formed by intersecting initially given Bezier curves. The solution to the second problem enables both symmetric and asymmetric rounding of corners formed by the intersection of non-straight lines, while maintaining a high degree of smoothness at the connection points. The influence of additional constraints on the connecting curve's shape is shown.

The proposed mathematical method is based on solving a system of linear equations, where the equations represent the derivative equality conditions at the connection points and at the points where additional constraints are applied. Bezier curves are treated as special cases of B-splines. The proposed method is applicable to both 2D and 3D scenarios.

Keywords: Bezier curve, parametric continuity, conjugation, CAD-systems, geometric kernel, full life cycle systems "SARUS".

For citation: Krivosheev O. V., Mavrin S. V., Starkova A. S. Bezier curve conjugation for smooth curve joining and corner rounding. *Omsk Scientific Bulletin.* 2025. No. 2 (194). P. 26—34. DOI: 10.25206/1813-8225-2025-194-26-34. EDN: PMANTK.

© Krivosheev O. V., Mavrin S. V., Starkova A. S., 2025.
The content is available under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

Введение

В настоящее время разработка новых изделий ведется на системах автоматизированного проектирования (САПР), которые включают в себя CAD (Computer-Aided Design), CAM (Computer-Aided Manufacturing) и CAE (Computer-Aided Engineering) системы. В основе этих систем лежит геометрическое ядро, которое позволяет создавать двухмерные и трехмерные геометрические объекты и проводить операции с этими объектами [1]. В современных САПР одним из основных геометрических объектов является NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline) и частный случай NURBS — кривые Безье.

Соединение линий и поверхностей с заданным порядком гладкости (непрерывности[1]) является одной из постоянно используемых операций в CAD-системах. Требования к гладкости определяются физическими задачами, могут быть вызваны эстетическими [2] и технологическими аспектами изготовления изделий. Эти требования, например, возникают при конструировании лопаток турбин, гребных винтов, поверхности летательных аппаратов, корпусов судов, кузовов современных автомобилей, при проектировании автомобильных и железнодорожных трасс и т. д. Описать такие контуры сложной формы аналитическими функциями невозможно, поэтому для их представления в САПР используют кусочно-непрерывные методы аппроксимации, основанные на NURBS [3]. При аппроксимации построенная кривая или поверхность пройдет вблизи заданных точек, но при этом она будет обладать необходимой гладкостью. При интерполяции, наоборот, кривая или поверхность гарантировано проходит через заданные точки, но потеряет гладкость.

Например, в работе [4] с помощью дробно-рациональных сегментов Безье 2-го порядка строится замкнутый сплайн Безье, проходящий через заданные точки, при этом порядок гладкости не превышает C^2. В [5] на плоскости строится сплайн, составленный из кубических кривых Безье по заданным узлам интерполяции.

На сегодняшний день кривые Безье находят широкое применение в геометрическом моделировании в задачах, в которых важна форма линий. Например, в работе [6] приводится обзор методов обработки кривых Безье (подгонка, манипуляция, слияние и блендинг) в CAD и их приложения для нужд производства (оптимизация траектории движения инструмента, проектирование профилей, реверс-инжиниринг и т. д.).

В современной научной литературе вопросам по сопряжению кривых Безье с определенным порядком гладкости уделяется достаточное внимание. Так, автор работы [7] для проектирования автомобильной трассы использует сплайн Безье, составленный из сегментов кубических кривых Безье, состыкованных между собой с порядком гладкости C^2. В работе [8] графоаналитическими методами строится плоская и пространственная кривая Безье, образованная кубическими сегментами с непрерывностью G^2 и проходящая через заданные узловые точки с указанными в них направляющими векторами и радиусами кривизны. В [9] итеративным методом на плоскости строится сплайн, состоящий из кубических кривых Безье, сглаживающий ломаную линию и обеспечивающий непрерывность первой и второй производных. Работы [10, 11], основанные на принципах «множественного сопряжения» (объединения нескольких сегментов в один), предлагают более эффективные итеративные алгоритмы для создания сплайна из смежных сегментов кривых Безье по сравнению с алгоритмами, основанными на «парном сопряжении» [12, 13].

В ограниченном количестве работ по сопряжению кривых Безье авторы вводят еще и дополнительные ограничения, накладываемые на сопрягающую (или аппроксимирующую) кривую. Так, например, в работе [14] приводится метод полностью гладкого сопряжения двух кривых Безье, при этом задается простейшее ограничение — точка, через которую должна пройти аппроксимирующая кривая.

В [15] авторы предлагают подход, позволяющий наложить на аппроксимирующую кривую дополнительные ограничения в виде полного совпадения этой кривой с одной из заданных, или прохождения через заданную точку и равенства производных заданным значениям в этой точке.

Необходимо также отметить, что, как показал опыт практического применения *CAD*-модуля *Системы полного жизненного цикла* (*СПЖЦ*) «САРУС» [16], при разработке реальных конструкций практически всегда возникают дополнительные ограничения. Они могут представлять собой, например, места креплений, которых обязательно должна касаться конструкция, и/или значения производных в заданных точках, которые определяются требованиями гидроаэродинамики, эстетики, гладкости трасс и т.д.

Настоящая работа является дальнейшим развитием общих подходов к сопряжению кривых Безье, представленных в работах [15, 17, 18], а также формулирует новую постановку задачи.

Целью настоящей работы является разработка математических методов соединения исходных кривых Безье соединительной линией, которая также

является кривой Безье. При этом порядок непрерывности в точках сопряжения может быть любым вплоть до степени исходных кривых, и на соединительную кривую могут быть наложены дополнительные ограничения в виде точек, через которые должны пройти соединительная линия и/или значения производных в этих точках.

Новизной работы по сравнению с работами [15, 17] является новая постановка задачи, а по сравнению с [18] — более общая постановка задачи.

В работе решаются следующие задачи. Формулируются условия гладкого сопряжения соединительной кривой с двумя исходными кривыми Безье, которые могут иметь разные степени, при этом соединительная кривая также представляется как кривая Безье. На соединительную кривую могут быть наложены дополнительные ограничения. Порядок гладкости в точках сопряжения может быть задан произвольно вплоть до степеней исходных кривых. Условия непрерывности сводятся к системе линейных уравнений, решением которой являются координаты контрольных точек соединительной кривой Безье. Дополнительные ограничения приводят к увеличению степени соединительной кривой, что в свою очередь приводит к увеличению числа уравнений в системе. Доказываются теоремы о степени соединительной кривой, которые являются необходимыми условиями существования соединительной кривой. В качестве результата применения метода рассматриваются две задачи — гладкое соединение в граничных точках исходных кривых и скругление внутреннего угла, образованного пересекающимися исходными кривыми Безье. Вторая задача позволяет производить как симметричное, так и несимметричное скругление углов, образованных пересечением не прямых линий, с сохранением непрерывности в точках сопряжения. Кривые Безье, как и в работах [15, 17, 18], представляются как частные случаи B-сплайна, что позволяет воспользоваться программными функциями геометрического ядра, которые за один вызов позволяют получить как значения базисных функций, так и все их производные, вплоть до порядка, соответствующего степени кривой Безье. Кроме этого, такое представление кривых Безье позволяет с минимальными трудозатратами распространить полученные результаты на B-сплайны и NURBS, которые в настоящее время реализованы в геометрических ядрах современных САПР. Рассматриваемые методы применимы как для плоских, так и для пространственных кривых.

Постановка задачи

Даны две исходные кривые Безье $P(u)$ и $Q(v)$ степени n_p и n_q соответственно. На каждой из кривых заданы точки P_* и Q_*, и соответствующие этим точкам значения параметрических переменных u_0 и v_0:

$$P_* = P(u)\big|_{u=u_0},\ u_0 \in [0,1]\ ,$$

$$Q_* = Q(v)\big|_{v=v_0},\ v_0 \in [0,1]\ .$$

Необходимо определить соединительную кривую Безье $R(t)$, которая соединит точки P_* и Q_*, при этом в точках сопряжения должны выполняться условия гладкого сопряжения вплоть до порядка, равного степени соответствующих кривых:

$$\begin{cases} P^{(k_p)}(u)\big|_{u=u_0} = R^{(k_p)}(t)\big|_{t=0}, & k_p = \overline{0,\ n_p}, \\ R^{(k_q)}(t)\big|_{t=1} = Q^{(k_q)}(v)\big|_{v=v_0}, & k_q = \overline{0,\ n_q}, \end{cases} \tag{1}$$

где k_p и k_q — порядок производных (здесь и далее по тексту нулевая производная соответствует значению функции) параметрических функций $P(u)$ и $Q(v)$ соответственно.

На соединительной кривой $R(t)$ может быть дополнительно задана точка R_* и соответствующее значение параметрической переменной t_0:

$$R_* = R(t)\big|_{t=t_0},\ t_0 \in [0,1]\ . \tag{2}$$

Ограничение (2) может быть дополнено заданием значений производных кривой $R(t)$ в точке R_*:

$$R^{(k_r)}(t)\big|_{t=t_0} = D_{k_r},\ k_r = \overline{0,K}\ , \tag{3}$$

где $R^{(k_r)}$ — производная k_r-го порядка; D_{k_r} — заданное значение k_r-й производной; K — максимальный порядок производной.

Необходимые условия гладкого сопряжения

Теорема 1. Для выполнения условий гладкого сопряжения вида (1) и единственности соединительной кривой $R(t)$ необходимо, чтобы степень соединительной кривой Безье была равна:

$$n_{r1} = n_p + n_q = 1, \tag{4}$$

где n_{r1} — степень соединительной кривой Безье $R(t)$ при выполнении (1).

Доказательство. Условия в системе (1), определяющие производные порядка от 0 до n_p для кривой $R(t)$ в точке $t = 0$ и от 0 до n_q для кривой $R(t)$ в точке $t = 1$, задают $[(n_p+1) + [(n_q+1)]$ линейных уравнений относительно неизвестных R_l, $l = \overline{0, n_{r1}}$.

Запишем производную функции, которая описывает кривую Безье как линейную комбинацию производных базисных функций с контрольными точками в качестве коэффициентов:

$$R^{(k)}(t) = \sum_{l=0}^{n_{r1}} N^{(k)}_{l,n_{r1}}(t) R_l, \tag{5}$$

где k — порядок производной; $N^{(k)}_{l,n_{r1}}(t)$ — k-я производная l-й базисной функции степени n_{r1}; R_l — контрольные точки кривой $R(t)$; $l = \overline{0, n_{r1}}$.

Запишем условия из системы (1), используя (5):

$$\begin{cases} \sum\limits_{l=0}^{n_{r1}} N^{(k_p)}_{l,n_{r1}}(0) R_l = P^{(k_p)}(u)\Big|_{u=u_0}, k_p = \overline{0, n_p}, \\ \sum\limits_{l=0}^{n_{r1}} N^{(k_q)}_{l,n_{r1}}(1) R_l = Q^{(k_q)}(v)\Big|_{v=v_0}, k_q = \overline{0, n_q}. \end{cases} \tag{6}$$

Рассматривая систему (6) как систему линейных уравнений относительно R_l, $l = \overline{0, n_{r1}}$ неизвестных, можно видеть, что для того, чтобы система была совместной и определенной (имела единственное решение), необходимо, чтобы число неизвестных было равно числу уравнений. Таким образом, количество контрольных точек кривой $R(t)$ должно быть равно $((n_p+1)+(n_q+1))$, и, следовательно, степень кривой будет на единицу меньше, т. е. (4). Если количество контрольных точек кривой $R(t)$ превышает n_{r1}, то система (6) становится неопределенной, т.е. будет иметь множество решений и, следовательно, единственность кривой $R(t)$ будет отсутствовать.

Если количество контрольных точек кривой $R(t)$ будет меньше n_{r1}, то система становится не-

совместной и, следовательно, не имеет точного решения.

Теорема 2. Для выполнения условий гладкого сопряжения вида (1) при дополнительных ограничениях (3) и единственности соединительной кривой $R(t)$ необходимо, чтобы степень соединительной кривой Безье была равна:

$$n_{r2} = n_{r1} + (K+1), \tag{7}$$

где n_{r2} — степень соединительной кривой Безье $R(t)$ при дополнительных ограничениях вида (3); $(K+1)$ — количество дополнительных ограничений.

Доказательство. По аналогии с доказательством теоремы 1 можно доказать, что системе (1) при ограничениях (3) соответствует следующая система линейных уравнений относительно R_l неизвестных, $l = \overline{0, n_{r2}}$:

$$\begin{cases} \sum\limits_{l=0}^{n_{r2}} N_{l,n_{r2}}^{(k_p)}(0) R_l = P^{(k_p)}(u)\Big|_{u=u_0}, k_p = \overline{0, n_p}, \\ \sum\limits_{l=0}^{n_{r2}} N_{l,n_{r2}}^{(k_r)}(t_0) R_l = D_{k_r}, k_r = \overline{0, K}, \\ \sum\limits_{l=0}^{n_{r2}} N_{l,n_{r2}}^{(k_q)}(1) R_l = Q^{(k_q)}(v)\Big|_{v=v_0}, k_q = \overline{0, n_q}. \end{cases} \tag{8}$$

Проводя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 1, можно доказать, что для существования единственности соединительной кривой степень кривой $R(t)$ должна быть равна (7).

Метод решения задачи без дополнительных ограничений

Представим исходные кривые Безье $P(u)$ и $Q(v)$ как частный случай B-сплайна [17]:

$$P(u) = \sum_{i=0}^{n_p} N_{i,n_p}(u) P_i, u \in [0,1], \tag{9}$$

$$Q(v) = \sum_{j=0}^{n_q} N_{j,n_q}(v) Q_j, v \in [0,1], \tag{10}$$

где n_p, n_q — степени кривых Безье $P(u)$, $Q(v)$ соответственно; $N_{i,n_p}(u)$, $N_{j,n_q}(v)$ — i-я и j-я базисные функции B-сплайна степени n_p и n_q соответственно; P_i, Q_j — контрольные точки кривых Безье $P(u)$, $Q(v)$ соответственно; $i = \overline{0, n_p}$, $j = \overline{0, n_q}$.

Узловые векторы кривых (9) и (10) представляются как узловые векторы B-сплайна:

$$U = (\underbrace{0,\ldots,0}_{n_p},0,1,\underbrace{1,\ldots,1}_{n_p}),$$

$$V = (\underbrace{0,\ldots,0}_{n_q},0,1,\underbrace{1,\ldots,1}_{n_q}).$$

Записывая соединительную кривую Безье $R(t)$ так же в виде B-сплайна, условия гладкого сопряжения (1) можно записать:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{n_p} N_{i,n_p}^{(k_p)}(u_0) P_i = \sum\limits_{l=0}^{n_{r1}} N_{l,n_{r1}}^{(k_p)}(0) R_l, k_p = \overline{0, n_p}, \\ \sum\limits_{l=0}^{n_{r1}} N_{l,n_{r1}}^{(k_q)}(1) R_l = \sum\limits_{j=0}^{n_q} N_{j,n_q}^{(k_q)}(v_0) Q_j, k_q = \overline{0, n_q}, \end{cases} \tag{11}$$

где верхний индекс базисных функций соответствует порядку производных, n_{r1} — степень соединительной кривой при отсутствии дополнительных ограничений.

Используя алгоритм расчета базисных функций, реализованный в СПЖЦ «САРУС» [17] за одно обращение к соответствующей функции, можно получить как все необходимые базисные функции, так и все их производные, которые представляются в виде квадратной матрицы порядка $(p+1)$:

$$D(u) = \begin{bmatrix} N_{0,p}^{(0)}(u) & N_{1,p}^{(0)}(u) & \ldots & N_{p,p}^{(0)}(u) \\ N_{0,p}^{(1)}(u) & N_{1,p}^{(1)}(u) & \ldots & N_{p,p}^{(1)}(u) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{0,p}^{(k)}(u) & N_{1,p}^{(k)}(u) & \ldots & N_{p,p}^{(k)}(u) \end{bmatrix}, \tag{12}$$

где p — степень кривой Безье; k — порядок производной, $k = \overline{0, p}$.

В предельных точках области определения параметрической переменной матрица (12) имеет вид нижних треугольных матриц:

$$D(0) = \begin{bmatrix} N_{0,p}^{(0)}(0) & 0 & \ldots & 0 \\ N_{0,p}^{(1)}(0) & N_{1,p}^{(1)}(0) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{0,p}^{(k)}(0) & N_{1,p}^{(k)}(0) & \ldots & N_{p,p}^{(k)}(0) \end{bmatrix}, \tag{13}$$

$$D(1) = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & N_{p,p}^{(0)}(1) \\ 0 & \ldots & N_{p-1,p}^{(1)}(1) & N_{p,p}^{(1)}(1) \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ N_{0,p}^{(k)}(1) & \ldots & N_{p-1,p}^{(k)}(1) & N_{p,p}^{(k)}(1) \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Система (11) представляет собой систему линейных уравнений относительно $(n_{r1}+1)$ неизвестных, которые являются контрольными точками соединительной кривой R_l, $l = \overline{0, n_{r1}}$.

В матричном виде система (11) выглядит следующим образом:

$$A \cdot \vec{X} = \vec{B}, \tag{15}$$

где A — квадратная матрица коэффициентов системы порядка $(n_{r1}+1)$; $\vec{X}$, $\vec{B}$ — вектор-столбцы размера $(n_{r1}+1)$ неизвестных и свободных членов соответственно.

Матрица коэффициентов A в (15) может быть представлена как блочная матрица:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

где $A_{n,m}$ — матрицы; $n, m = \overline{1,2}$.

$A_{1,1}$ — нижняя треугольная матрица порядка (n_p+1), элементами которой являются первые (n_p+1) строк и столбцов матрицы $D(0)$ (13), рассчитанной для кривой $R(t)\big|_{t=0}$:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} N_{0,n_{r1}}^{(0)}(0) & 0 & \ldots & 0 \\ N_{0,n_{r1}}^{(1)}(0) & N_{1,n_{r1}}^{(1)}(0) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{0,n_{r1}}^{(n_p)}(0) & N_{1,n_{r1}}^{(n_p)}(0) & \ldots & N_{n_p,n_{r1}}^{(n_p)}(0) \end{bmatrix}.$$

A_{12} — нулевая матрица размера $(n_p+1)\times(n_q+1)$.

A_{21} — нулевая матрица размера $(n_q+1)\times(n_p+1)$.

A_{22} — нижняя треугольная матрица порядка (n_q+1), элементы которой получены удалением первых (n_p+1) столбцов и последних (n_p+1) строк:

$$A_{22}=\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & N^{(0)}_{n_{r1},n_{r1}}(1) \\ 0 & \dots & N^{(1)}_{n_{r1}-1,n_{r1}}(1) & N^{(1)}_{n_{r1},n_{r1}}(1) \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ N^{(n_q)}_{n_{r1}-n_q,n_{r1}}(1) & \dots & N^{(n_q)}_{n_{r1}-1,n_{r1}}(1) & N^{(n_q)}_{n_{r1},n_{r1}}(1) \end{bmatrix}.$$

Вектор-столбец $\vec{B}$ в блочном виде выглядит следующим образом:

$$\vec{B}=\begin{bmatrix}\vec{B}_0\\ \vec{B}_1\end{bmatrix},$$

где $\vec{B}_0, \vec{B}_1$ — вектор-столбцы.

$\vec{B}_0$ — вектор-столбец размера (n_p+1), рассчитанный как

$$\vec{B}_0 = D_p(u_0)\cdot\vec{P}, \tag{16}$$

где $D_p(u_0)$ — квадратная матрица порядка (n_p+1) вида (12), рассчитанная для кривой $P(u)\big|_{u=u_0}$; $\vec{P}$ — вектор-столбец размера (n_p+1), элементами которого являются контрольные точки кривой $P(u)$.

$\vec{B}_1$ — вектор-столбец размера (n_q+1), рассчитанный как

$$\vec{B}_1 = D_q(v_0)\cdot\vec{Q}, \tag{17}$$

где $D_q(v_0)$ — квадратная матрица порядка (n_q+1) вида (12), рассчитанная для кривой $Q(v)\big|_{v=v_0}$; $\vec{Q}$ — вектор-столбец размера (n_q+1), элементами которого являются контрольные точки кривой $Q(v)$.

Обратим внимание, что при решении 2D задачи векторы $\vec{R}$, $\vec{P}$ и $\vec{Q}$ — двухмерные, а при решении 3D задачи эти векторы — трехмерные, что верно и для задачи с дополнительными ограничениями.

Метод решения задачи с дополнительными ограничениями

Представим дополнительные ограничения (3) в виде B-сплайна и его производных:

$$\sum_{l=0}^{n_{r2}} N^{(k_r)}_{l,n_{r2}}(t_0)R_l = D_{k_r}, k_r=\overline{0,K}, \tag{18}$$

где верхний индекс у базисных функций соответствует порядку производных; n_{r2} — степень соединительной кривой при наложении дополнительных ограничений.

Объединяя систему линейных уравнений (11) и (18), получим систему $(n_{r2}+1)$ уравнений, относительно $(n_{r2}+1)$ неизвестных, которые представляют собой контрольные точки соединительной кривой — R_l, $l=\overline{0,n_{r2}}$:

$$C\cdot\vec{Y}=\vec{F}, \tag{19}$$

где C — квадратная матрица коэффициентов системы порядка $(n_{r2}+1)$; $\vec{Y}$, $\vec{F}$ — вектор-столбцы размера $(n_{r2}+1)$ неизвестных и свободных членов соответственно.

Матрица коэффициентов C в (19) может быть представлена как блочная:

$$C=\begin{bmatrix} C_{11} & & C_{12} \\ & C_{21} & \\ C_{31} & & C_{32}\end{bmatrix},$$

где $C_{n,m}$ — матрицы; $n=\overline{1,3}$, $m=\overline{1,2}$.

C_{11} — нижняя треугольная матрица порядка (n_p+1), элементами которой являются первые (n_p+1) строк и столбцов матрицы $D(0)$ (13), рассчитанной для кривой $R(t)\big|_{t=0}$:

$$C_{11}=\begin{bmatrix} N^{(0)}_{0,n_{r2}}(0) & 0 & \dots & 0 \\ N^{(1)}_{0,n_{r2}}(0) & N^{(1)}_{1,n_{r2}}(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N^{(n_p)}_{0,n_{r2}}(0) & N^{(n_p)}_{1,n_{r2}}(0) & \dots & N^{(n_p)}_{n_p,n_{r2}}(0)\end{bmatrix}.$$

C_{12} — нулевая матрица размера $[(n_p+1)\times(n_{r2}-n_p)]$.

C_{21} — матрица размера $[(K+1)\times(n_{r2}+1)]$, элементами которой являются первые $(K+1)$ строк матрицы $D(t)\big|_{t=t_0}$ (12), рассчитанной для кривой $R(t)\big|_{t=t_0}$:

$$C_{21}=\begin{bmatrix} N^{(0)}_{0,n_{r2}}(t_0) & N^{(0)}_{1,n_{r2}}(t_0) & \dots & N^{(0)}_{n_{r2},n_{r2}}(t_0) \\ N^{(1)}_{0,n_{r2}}(t_0) & N^{(1)}_{1,n_{r2}}(t_0) & \dots & N^{(1)}_{n_{r2},n_{r2}}(t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N^{(K)}_{0,n_{r2}}(t_0) & N^{(K)}_{1,n_{r2}}(t_0) & \dots & N^{(K)}_{n_{r2},n_{r2}}(t_0)\end{bmatrix}.$$

C_{31} — нулевая матрица размера $[(n_q+q)\times(n_{r2}-n_q)]$.

C_{32} — нижняя треугольная матрица порядка (n_q+1), элементы которой получены удалением первых $(n_p+1+K+1)$ столбцов и последних $(n_p+1+K+1)$ строк:

$$C_{32}=\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & N^{(0)}_{n_{r2},n_{r2}}(1) \\ 0 & \dots & N^{(1)}_{n_{r2}-1,n_{r2}}(1) & N^{(1)}_{n_{r2},n_{r2}}(1) \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ N^{(n_q)}_{n_{r2}-n_q,n_{r2}}(1) & \dots & N^{(n_q)}_{n_{r2}-1,n_{r2}}(1) & N^{(n_q)}_{n_{r2},n_{r2}}(1)\end{bmatrix}.$$

Вектор-столбец $\vec{F}$ в блочном виде выглядит следующим образом:

$$\vec{F}=\begin{bmatrix}\vec{F}_0\\ \vec{F}_1\\ \vec{F}_2\end{bmatrix},$$

где $\vec{F}_i$ — вектор-столбцы; $i=\overline{0,2}$.

$\vec{F}_0$ — вектор-столбец размера (n_p+1), расчет которого полностью совпадает с расчетом вектора $\vec{B}_0$ (16).

$\vec{F}_1$ — вектор-столбец размера $[(K+1)\times(n_{r2}+1)]$, рассчитанный как

$$\vec{F}_1 = D_r(t_0)\cdot\vec{D},$$

где $D_r(t_0)$ — матрица размера $[(K+1)\times(n_{r2}+1)]$, которая представляет собой первые $(K+1)$ строк матрицы $D(t)\big|_{t=t_0}$, рассчитанной для кривой $R(t)\big|_{t=t_0}$; $\vec{D}$ — вектор-столбец, элементы которого образованы значениями ограничений (правые части системы (18)).

$\vec{F}_2$ — вектор-столбец размера (n_q+1), расчет которого полностью совпадает с расчетом вектора $\vec{B}_1$ (17).

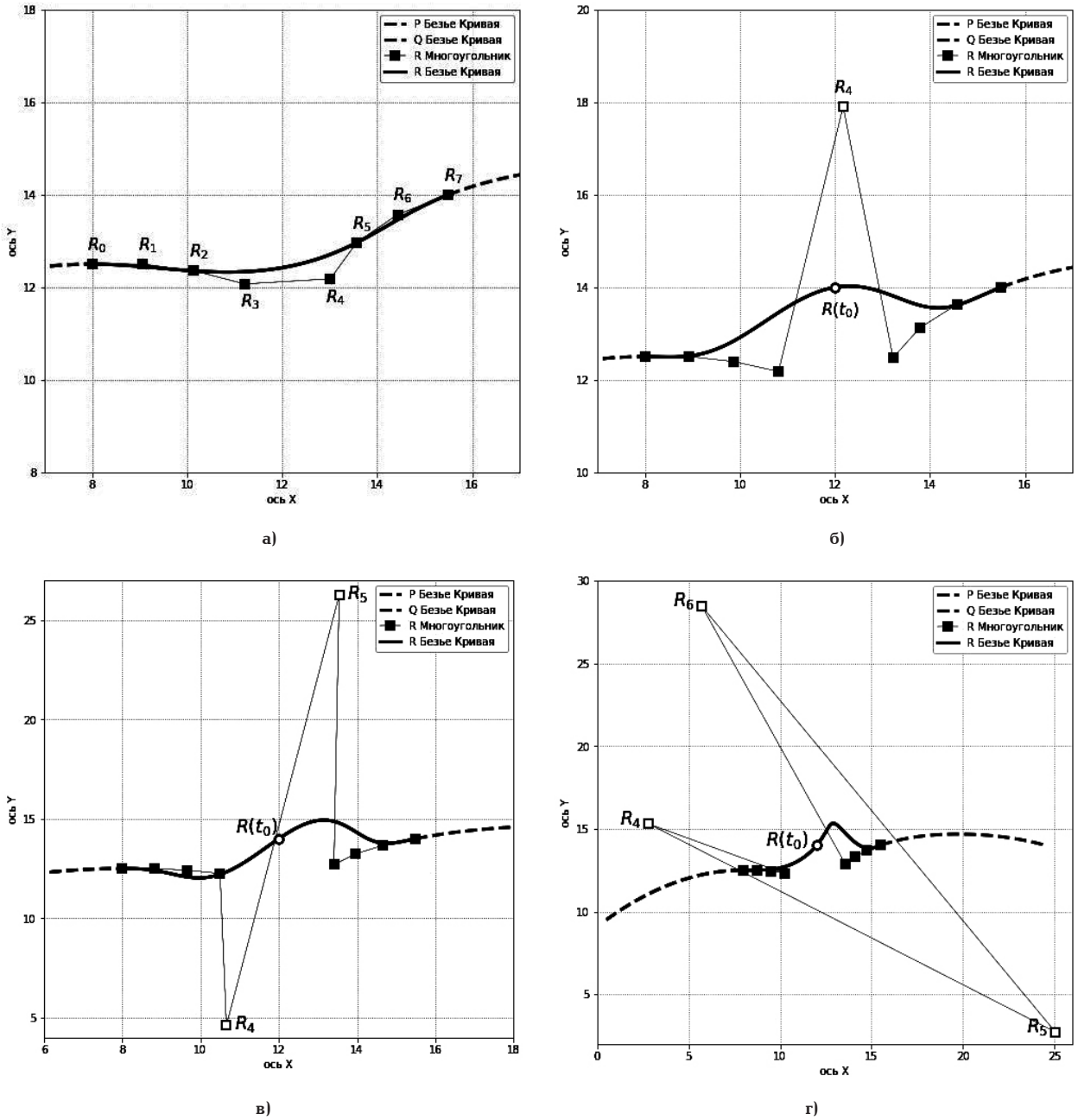


Рис. 1. Гладкое соединение с непрерывностью C^3: а — без дополнительных ограничений; б — ограничения (20); в — ограничения (20–21); г — ограничения (20–22)

Fig. 1. Smooth connection with C^3 continuity: а — without additional constraints; б — constraints (20); в — constraints (20–21); г — constraints (20–22)

Результаты и обсуждение

Изложенные выше математические подходы были применены для решения некоторых задач.

На рис. 1а приведено гладкое соединение двух исходно заданных кубических кривых Безье $P(u)$ и $Q(v)$ с непрерывностью C^3 в точках сопряжения. На рис. 1б-г показано влияние дополнительных ограничений на соединительную линию при сохранении непрерывности C^3 в точках сопряжения.

Дополнительные ограничения заданы для $t_0 = 0{,}5$ и имеют следующий вид:

$$R^{(0)}(0{,}5) = (12;14), \quad (20)$$

$$R^{(1)}(0{,}5) = (8{,}1;1{,}4), \quad (21)$$

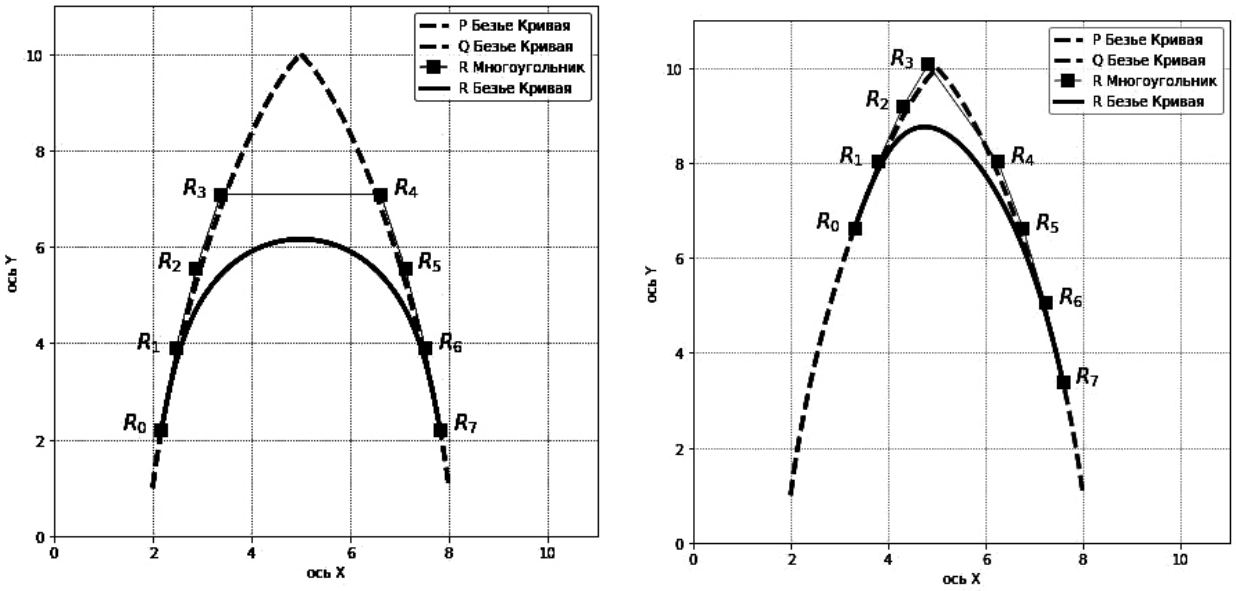
$$R^{(2)}(0{,}5) = (-5;-39). \quad (22)$$

Как следует из анализа рис. 1, дополнительные ограничения могут существенно изменять форму соединительной кривой.

На рис. 2 приводится пример применения предлагаемых методов для задачи скругления угла, образованного двумя кривыми Безье 3-й степени, с сохранением непрерывности C^3 в точках сопряжения исходных кривых со скруглением (соединительной кривой).

Выводы

В работе представлен математический подход для решения задач гладкого сопряжения кривых Безье в граничных и внутренних точках области определения параметрической переменной. В точке сопряжения сохраняется непрерывность как самой функции, так и всех ее производных до порядка, равного степени заданных кривых Безье.



а) б)

Рис. 2. Скругление угла, образованного кривыми Безье, с сохранением непрерывности C^3:
а — симметричное скругление; б — несимметричное скругление
Fig. 2. Curvature of the angle formed by Bezier curves, with preservation of C^3 continuity:
a — symmetric curving; б — asymmetric curving

Задача о сопряжении расширяется наложением дополнительных ограничений в виде прохождения сопряженной кривой через заданную точку и задания производных в этой точке, что позволяет управлять формой кривой после сопряжения.

Важным приложением решения задачи о сопряжении во внутренних точках для развития функциональных возможностей CAD-систем является возможность скруглять углы, образованные пересечением кривых Безье произвольной степени.

Разработанные алгоритмы могут быть рекомендованы для имплементирования в CAD-модуль СПЖЦ «САРУС» [16].

Примечания

[1]В работе термины гладкость порядка r в точке сопряжения и непрерывность C^r в точке сопряжения понимаются эквивалентными. Гладкость порядка r и непрерывность C^r в точке сопряжения означают, что для сопрягаемых параметрических функций в точке сопряжения выполняется равенство производных порядка i, $i = \overline{0,r}$.

Список источников/References

1. Chatzivasileiadi A., Wardhana N. M., Jabi W. [et al.]. Characteristics of 3D solid modeling software libraries for non-manifold modeling. *Computer-Aided Design and Applications.* 2019. Vol. 16, no 3. P. 496—518. DOI: 10.14733/cadaps.2019.496-518.

2. Ившин К. С., Башарова А. А. Принципы современного трехмерного моделирования в промышленном дизайне // Архитектон: известия вузов. 2012. № 3 (39). С. 11. EDN: PCUINV.

Ivshin K. S., Basharova A. F. Printsipy sovremennogo trekhmernogo modelirovaniya v promyshlennom dizayne [Principles of modern three-dimensional modeling in industrial design]. Arkhitekton: izvestiya vuzov. *Architecton: News of Universities.* 2012. No. 39. P. 101—113. EDN: PCUINV. (In Russ.).

3. Короткий В. А. Незакономерные кривые в инженерной геометрии и компьютерной графике // Научная визуализация. 2022. Т. 14, № 1. С. 1—17. DOI: 10.26583/sv.14.1.01. EDN: RMXYPH.

Korotkiy V. A. Nezakonomernye krivye v inzhenernoy geometrii i komp'yuternoy grafike [Irregular curves in engineering geometry and computer graphics]. Nauchnaya vizualizatsiya. *Scientific Visualization.* 2022. Vol. 14, no. 1. P. 1—17. DOI: 10.26583/sv.14.1.01. EDN: RMXYPH. (In Russ.).

4. Панчук К. Л., Мясоедова Т. М. Описание дискретно заданного плоского контура составной линией из дробно-рациональных кривых Безье второго порядка // Программные системы и вычислительные методы. 2019. № 3. С. 49—60. DOI: 10.7256/2454-0714.2019.3.30637. EDN: SYKZXG.

Panchuk K. L., Myasoedova T. M. Opisanie diskretno zadannogo ploskogo kontura sostavnoy liniey iz drobno-ratsional'nykh krivykh Bez'e vtorogo poryadka [Description of a discretely specified planar contour by a compound line of second-order fractional-rational Bezier curves]. Programmnye sistemy i vychislitel'nye metody. *Program Systems and Computational Methods.* 2019. No. 3. P. 50—59. DOI: 10.7256/2454-0714.2019.3.30637. EDN: SYKZXG. (In Russ.).

5. Борисенко В. В. Построение оптимального сплайна Безье // Фундаментальная и прикладная математика. 2016. Т. 21, № 3. С. 57—72.

Borisenko V. V. Postroenie optimal'nogo splajna Bez'e [Construction of optimal Bezier splines]. Fundamental'naya i prikladnaya matematika. *Fundamental and Applied Mathematics.* 2016. Vol. 21, no. 3. P. 57—72. (In Russ.).

6. Fitter H. N. [et al.] A review on approaches for handling Bezier curves in CAD for Manufacturing // *Procedia Engineering.* 2014. Vol. 97. P. 1155—1166. DOI: 10.1016/j.proeng.2014.12.394.

7. Любчинов Е. В., Панчук К. Л. О гладкости стыковки линий и поверхностей при циклографическом моделировании поверхностных форм автомобильных дорог // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2020. Т. 20, № 1. С. 52—62. DOI: 10.14529/build200106. EDN: GCZCOI.

Lyubchinov E. V., Panchuk K. L. O gladkosti stykovki linij i poverhnostej pri ciklograficheskom modelirovanii poverhnostnyh form avtomobil'nyh dorog [On the smoothness of compound of the lines and surfaces in cyclographic modeling of surface forms of

roads]. Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Stroitel'stvo i arhitektura. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Construction Engineering and Architecture.* 2020. Vol. 20, no. 1. P. 52—62. DOI: 10.14529/build200106. EDN: GCZCOI. (In Russ.).

8. Короткий В. А. Конструктивные алгоритмы формирования составных кубических кривых Безье в пространстве и на плоскости // Омский научный вестник. 2022. № 2 (182). С. 10—16. DOI: 10.25206/1813-8225-2022-182-10-16. EDN: ZAYBGU.

Korotkiy V. A. Konstruktivnye algoritmy formirovaniya sostavnykh kubicheskikh krivykh Bez'e v prostranstve i na ploskosti [Constructive algorithms for forming compound cubic Bezier curves in space and on plane]. Omskiy nauchnyy vestnik. *Omsk Scientific Bulletin.* 2022. No. 2 (182). P. 10—16. DOI: 10.25206/1813-8225-2022-182-10-16. EDN: ZAYBGU. (In Russ.).

9. Ромакин В. А. Сглаживание ломаных линий составными сплайнами Безье // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2022. Т. 11, № 4. С. 37—50. DOI: 10.14529/cmse220403. EDN: LRUKLU.

Romakin V. A. Sglazhivanie lomanykh liniy sostavnymi splaynami Bez'e [Polyline smoothing with compound Bezier splines]. Vestnik YuUrGU. Seriya: Vychislitel'naya matematika i informatika. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering.* 2022. Vol. 11, no. 4. P. 37—50. DOI: 10.14529/cmse220403. EDN: LRUKLU. (In Russ.).

10. Lu L. Explicit algorithms for multiwise merging of Bézier curves. *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 2015. Vol. 278. P. 138—148. DOI: 10.1016/j.cam.2014.10.002.

11. Lu L., Jiang C. An iterative algorithm for G2 multiwise merging of Bézier curves. *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 2016. Vol. 296. P. 352—361. DOI: 10.1016/j.cam.2015.10.007.

12. Lu L. An explicit method for G3 merging of two Bézier curves. *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 2014. Vol. 260. P. 421—433. DOI: 10.1016/j.cam.2013.10.030.

13. Zhu P., Wang G. Optimal approximate merging of a pair of Bézier curves with G2-continuity. *Journal of Zhejiang University: SCIENCE A.* 2009. Vol. 10, no. 4. P. 554—561. DOI: 10.1631/jzus.A0820301.

14. Gospodarczyk P., Woźny P. Merging of Bézier curves with box constraints. *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 2016. Vol. 296. P. 265—274. DOI: 10.1016/j.cam.2015.10.005.

15. Ганчук С. Н., Кривошеев О. В., Маврин С. В., Рыжов С. А. Аппроксимация сопряжения кривых Безье с сохранением порядка гладкости и дополнительными ограничениями // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2024. Т. 24, № 1. С. 59—69. DOI: 10.14529/build240108. EDN: GSDRNS.

Ganchuk S. N., Krivosheev O. V., Mavrin S. V., Ryzhov S. A. Approksimaciya sopryazheniya krivyh Bez'e s sohraneniem poryadka gladkosti i dopolnitel'nymi ogranicheniyami [Approximation of Bézier curve conjugation with smoothness order preservation and additional constraints]. Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Stroitel'stvo i arhitektura. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Construction Engineering and Architecture.* 2024. Vol. 24, no. 1. P. 59—69. DOI: 10.14529/build240108. EDN: GSDRNS. (In Russ.).

16. Отечественная система полного жизненного цикла «Сарус» обеспечит импортонезависимость и безопасность // САПР и графика. 2023. № 12 (328). С. 68—71. EDN: IEOKZT.

Otechestvennaya sistema polnogo zhiznennogo cikla «Sarus» obespechit importonezavisimost' i bezopasnost' [Domestic full life cycle system «Sarus» will ensure import-independence and safety]. SAPR i grafika. *CAD and Graphics.* 2023. No. 12 (328). P. 68—71. EDN: IEOKZT. (In Russ.).

17. Ганчук С. Н., Старкова А. С., Кривошеев О. В., Маврин С. В., Рыжов С. А. Полностью гладкая аппроксимация произвольного набора кривых Безье. Часть 1: кривые Безье и постановка задачи // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2024. Т. 21, № 11. С. 3—8. DOI: 10.14489/vkit.2024.11.pp.003-008. EDN: FSHVLF.

Ganchuk S. N., Starkova A. S., Krivosheev O. V., Mavrin S. V., Ryzhov S. A. Polnost'yu gladkaya approksimaciya proizvol'nogo nabora krivyh Bez'e. Chast' 1: krivye Bez'e i postanovka zadachi [Completely smooth approximation of an arbitrary set of Bezier curves. Part 1: Bezier curves and problem statement]. Vestnik komp'yuternyh i informacionnyh tekhnologij. *Herald of Computer and Information Technologies.* 2024. Vol. 21, no. 11. P. 3—8. DOI: 10.14489/vkit.2024.11.pp.003-008. EDN: FSHVLF. (In Russ.).

18. Ганчук С. Н., Маврин С. В., Семина В. В., Старкова А. С. Гладкое сопряжение двух плоских кривых Безье // Вестник Липецкого государственного технического университета. 2024. № 1 (54). С. 5—11. DOI: 10.53015/23049235_2024_1_5. EDN: XDIDVX.

Ganchuk S. N., Mavrin S. V., Semina V. V., Starkova A. S. Gladkoe sopryazhenie dvuh ploskih krivyh Bez'e [Smooth conjugation of two flat Bezier curves]. Vestnik Lipeckogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. *Bulletin of Lipetsk State Technical University.* 2024. No. 1 (54). P. 5—11. (In Russ.).

КРИВОШЕЕВ Олег Викторович, кандидат технических наук, заместитель директора Российского федерального ядерного центра — Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики (РФЯЦ—ВНИИЭФ) по технологиям полного жизненного цикла, г. Саров; директор Института цифровых технологий, главный конструктор систем полного жизненного цикла, заведующий кафедрой «Цифровые технологии» Саровского физико-технического института — филиала Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», г. Саров.
SPIN-код: 4120-9990
AuthorID (РИНЦ): 1131619
Адрес для переписки: OLvkrivosheev@rosatom.ru
МАВРИН Сергей Валентинович, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник РФЯЦ—ВНИИЭФ, г. Саров; доцент кафедры «Цифровые технологии» Саровского физико-технического института — филиала Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», г. Саров.
AuthorID (РИНЦ): 604297
Адрес для переписки: s.mavrin@yandex.ru
СТАРКОВА Алина Сергеевна, системный аналитик РФЯЦ—ВНИИЭФ, г. Саров.
Адрес для переписки: a.starkova48@yandex.ru

Прозрачность финансовой деятельности: авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах и методах. Конфликт интересов отсутствует.

Статья поступила в редакцию 16.12.2024; одобрена после рецензирования 27.01.2025; принята к публикации 29.04.2025.

KRIVOSHEEV Oleg Viktorovich, Candidate of Technical Sciences, Deputy Director of the Russian Federal Nuclear Center — All-Russian Research Institute of Experimental Physics (RFNC—VNIIEF) for Full Life Cycle Technologies, Sarov; Director of the Digital Technologies Institute, Chief Designer

of the Full Life Cycle Systems, Head of the Digital Technologies Department, Sarov Institute of Physics and Technology — Branch of the National Research Nuclear University "MEPhI", Sarov.
SPIN-code: 4120-9990
AuthorID (RSCI): 1131619
Correspondence address: OLvkrivosheev@rosatom.ru
MAVRIN Sergey Valentinovich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, RFNC—VNIIEF, Sarov; Associate Professor of the Digital Technologies Department, Sarov Institute of Physics and Technology — Branch of the National Research Nuclear University "MEPhI", Sarov.
AuthorID (RSCI): 604297
Correspondence address: s.mavrin@yandex.ru
STARKOVA Alina Sergeevna, System Analyst, RFNC—VNIIEF, Sarov.
Correspondence address: a.starkova48@yandex.ru

Financial transparency: the authors have no financial interest in the presented materials or methods. There is no conflict of interest.

The article was submitted 16.12.2024; approved after reviewing 27.01.2025; accepted for publication 29.04.2025.