

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ ЦИКЛИЧЕСКОЙ И КАНАЛОВОЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ НА ОСНОВЕ НЕЛИНЕЙНОГО ВРАЩЕНИЯ

Настоящая статья является продолжением цикла работ авторов по вопросам формообразования поверхностей нелинейного вращения. Геометрическая схема формообразования поверхностей этого класса включает в себя: ось нелинейного вращения, представляющую собой гладкую, в общем случае пространственную кривую, и образующую линию, также гладкую пространственную кривую. При вращении образующей линии относительно криволинейной оси каждая точка образующей описывает окружностную траекторию в соответствующей нормальной плоскости оси вращения. В результате формируется поверхность нелинейного вращения, представляющая собой нормальную циклическую поверхность. В настоящей работе, с целью развития ранее полученных авторами результатов исследования в области формообразования поверхностей нелинейного вращения, рассмотрено решение обратной задачи формообразования и дано математическое обоснование возможности формообразования каналовой поверхности на основе решений прямой и обратной задач. В работе приведены числовые примеры формообразования рассматриваемых поверхностей, сопровождаемые математическими моделями поверхностей, их компьютерной реализацией. Результаты исследований могут быть полезными при разработке САПР, предусматривающих проектирование поверхностных форм изделий на основе циклических и каналовых поверхностей в машиностроении, строительстве, архитектуре и других практических областях.

**Ключевые слова:** нелинейное вращение, математическая модель, гладкость функции, формообразование, циклическая поверхность, обратная задача, каналовая поверхность.

**Введение.** В предыдущих работах авторов [1, 2] были рассмотрены вопросы теории формообразования нормальных циклических поверхностей на основе нелинейного вращения. Последнее может быть рассмотрено как обобщение линейного вращения, известного в геометрии и кинематике и характеризующегося наличием в пространстве прямолинейной оси вращения с окружностными траекториями точек пространства, формируемыми в пучке плоскостей, перпендикулярных оси вращения. Прямая линия пространства в линейном вращении остается прямой линией, а расстояние и угол являются инвариантными параметрами этого вращения. В случае же нелинейного вращения осью вращения служит гладкая кривая линия, при этом окружностные траектории точек пространства распределяются по нормальным плоскостям криволинейной оси и образуют нелинейный пучок плоскостей, а центры вращений точек пространства — это точки пересечения криволинейной оси и ее нормальных плоскостей. Прямая линия в нелинейном

вращении теряет свою прямолинейность, а расстояние и угол не являются инвариантными параметрами этого вращения.

Авторам известно несколько работ, посвященных вопросам теории и практических приложений нелинейного вращения. В работах [3, 4] выполнено построение обобщенных поверхностей вращения на основе введения функции взаимосвязи геометрий линии центров вращения и линии радиусов. В качестве траектории вращательного движения точек пространства используется кривая второго порядка, представленная в виде кусочной рациональной кривой Безье. Авторами указанных работ оставлены нерассмотренными вопросы влияния геометрии и взаимного расположения указанных линий на геометрию формируемой обобщенной поверхности вращения. В работах [5, 6] введено понятие «квазивращение», как обобщение понятия «вращение». При этом в качестве оси вращения использованы кривые второго порядка. Результаты исследований были успешно приложены авторами

указанных работ к формообразованию алгебраических кривых и поверхностей высоких порядков и выполнено практическое применение исследований в параметрической архитектуре.

В настоящей работе для решения новых задач формообразования поверхностей нелинейного вращения (ПНВ) используется предложенная авторами ранее [1, 2] геометрическая схема формообразования этих поверхностей, базовыми элементами которой служат: криволинейная ось вращения и криволинейная образующая линия. В работе рассмотрены решения следующих задач формообразования:

1. Обратная задача, в которой требуется по заданной криволинейной оси вращения и заданному следу образующей линии ПНВ в нормальной плоскости этой оси, определить саму ПНВ.

2. Определение каналовой поверхности (КП) на основе геометрической схемы формообразования ПНВ.

Решение первой задачи позволяет раскрыть нюансы и особенности формообразования ПНВ, представляющей собой, по существу, нормальную циклическую поверхность (НЦП). Решение же второй задачи демонстрирует единство математических моделей формообразования НЦП и КП и универсальность предлагаемой геометрической схемы формообразования этих поверхностей, что позволяет утверждать существование единого подхода к формообразованию двух разнотипных классов поверхностей.

Следует отметить обширное множество отечественных и зарубежных публикаций по вопросам геометрии формообразования КП [7–11]. Очевидно, теоретический интерес к этим поверхностям обусловлен, прежде всего, их разноплановой практической востребованностью:

1) в качестве сглаживающих поверхностей сложных поверхностных конструкций [12, 13];

2) в задачах телесной трассировки при проектировании авиационной техники [14–16];

3) в компьютерной графике (компьютерные игры и анимация) [17];

4) в CAD (Computer Aided Geometric Design) [7, 12, 13, 18] и др. областях науки, техники и промышленности.

**Математические модели поверхностей, образуемых на основе нелинейного вращения.** Рассмотрим решения двух задач формообразования поверхностей, отмеченных во введении. В основу этих решений положены теоретические закономерности вращения геометрических объектов относительно пространственной криволинейной оси, рассмотренные в работах [1, 2].

**1. Решение обратной задачи формообразования ПНВ.** Постановка задачи: определить ПНВ по заданной ее пространственной криволинейной оси вращения и заданному следу образующей линии искомой поверхности в нормальной плоскости оси.

Уравнение оси вращения в неподвижной декартовой системе координат  $Oxuz$  имеет вид:

$$q: \bar{Q}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\};$$

$$t \in [t_0, t_n] \subset \mathbf{R}; \bar{Q}'(t) = \frac{d\bar{Q}}{dt} \neq 0.$$

Уравнение следа  $g_g$  образующей линии искомой ПНВ в локальной системе координат подвижного трехгранника  $(\tau, \nu, \beta)$  оси  $q$  следующее:

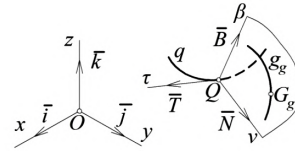


Рис. 1. Исходные данные для решения обратной задачи формообразования ПНВ

$$g_g: \bar{r}_g(\mu) = \{\tau = 0, \nu_g(\mu), \beta_g(\mu)\};$$

$$\mu \in [\mu_0, \mu_n] \subset \mathbf{R}; \bar{r}_g'(\mu) = \frac{d\bar{r}_g}{d\mu} \neq 0.$$

В работе [2] был рассмотрен алгоритм формообразования ПНВ по заданным базовым элементам геометрической схемы формообразования — оси вращения  $Q(t)$  и образующей линии  $G(l)$ , совершающей вращение относительно оси. Было отмечено, что в процессе формообразования ПНВ в текущей нормальной плоскости  $(\nu, \beta)$  оси  $\bar{Q}(t)$  образуется некоторая линия  $g_g$ , представляющая собой след образующей линии  $G(l)$  в процессе ее вращения. Образование этого следа при заданной образующей  $G(l)$  назовем прямой задачей формообразования. Обратной будет задача определения образующей линии и самой ПНВ по заданной оси  $\bar{Q}(t)$  и заданному следу  $g_g \subset (\nu, \beta)$  (рис. 1).

Выполняя переход от подвижной декартовой системы координат  $Q\tau\nu\beta$  к неподвижной  $Oxuz$ , получим следующее уравнение:

$$\bar{G}(t, \mu) = A^{-1}(t) \cdot \bar{r}_g(\mu) + \bar{Q}(t), \quad (1)$$

где приняты обозначения:  $A^{-1}(t)$  — матрица перехода от подвижной декартовой системы координат к неподвижной:

$$A^{-1}(t) = \begin{bmatrix} x_T & x_N & x_B \\ y_T & y_N & y_B \\ z_T & z_N & z_B \end{bmatrix},$$

$$\bar{T}(t) = \{x_T, y_T, z_T\} = \frac{\bar{Q}(t)}{|\bar{Q}'(t)|},$$

$$\bar{Q}'(t) = \{x'(t), y'(t), z'(t)\}$$

$$\bar{B}(t) = \{x_B, y_B, z_B\} = \frac{\bar{Q}'(t) \times \bar{Q}''(t)}{|\bar{Q}'(t) \times \bar{Q}''(t)|},$$

$$\bar{Q}''(t) = \frac{d^2\bar{Q}(t)}{dt^2},$$

$$\bar{N}(t) = \{x_N, y_N, z_N\} = \bar{B} \cdot \bar{T}.$$

Чтобы уравнение (1) описывало в неподвижном пространстве образ  $\bar{G}_g$  линии  $\bar{r}_g$ , принадлежащей нормальной плоскости  $(\nu, \beta)$ , необходима функциональная связь параметров  $\mu$  и  $t$ . Эта связь не обеспечивается исходными условиями рассматриваемой задачи. Поэтому введем некоторую функцию  $f(t)$ , устанавливающую гомеоморфное соответствие числовых отрезков  $[\mu_0, \mu_n]$  и  $[t'_0, t'_n] \subset [t_0, t_n]$ . При этом на функцию  $f(t)$  должно быть наложено условие  $f'(t) = \frac{df}{dt} \neq 0$ , обеспечивающее ее гладкость.

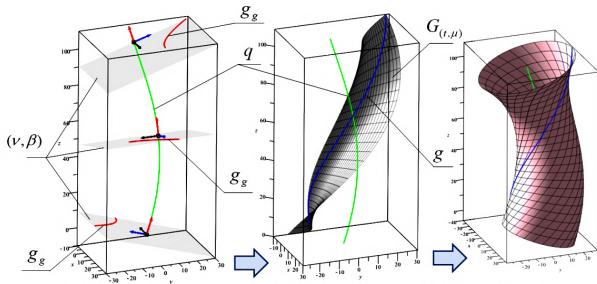


Рис. 2. Исходные данные и результаты вычислений: образующая линия  $g$  и ПНВ на её основе

С введением такой функции уравнение (1) принимает вид:

$$\bar{G}_g(t) = A^{-1}(t) \cdot \bar{r}_g(f(t)) + \bar{Q}(t). \quad (2)$$

Уравнение (2) описывает в системе координат  $Oxuz$  пространственную кривую  $g$  — образ следа  $g_g$ , принадлежащего нормальной плоскости  $(v, \beta)$  линии  $q$ . Очевидно, рассматриваемая обратная задача имеет не единственное решение. Очевидно также, что линия (2) служит образующей линией для формообразования ПНВ. Рассмотрим пример.

**Пример 1.** Криволинейная ось вращения  $q$  и след  $g_g$  заданы соответственно уравнениями:  $\bar{Q}(t) = \{10 \cos(\pi \cdot t), 10 \sin(\pi \cdot t), 100t\}$ ,  $t \in [0, 1]$  в неподвижной системе координат  $Oxuz$  и  $\bar{r}_g(\mu) = \{\tau = 0, v = -20\mu + 20, \beta = 20\mu^2 + 10\}$ ,  $\mu \in [0, 1]$  в подвижной локальной системе координат  $Q\tau v\beta$ . Требуется построить ПНВ.

**Решение.** Исходные данные позволяют получить на основании выражения (1) уравнение поверхности  $\bar{G}(t, \mu)$ :

$$\bar{G}(t, \mu) = \begin{bmatrix} S_x \cdot \sin(\mu \cdot \pi) + S_y \cdot \cos(\mu \cdot \pi) \\ -S_x \cdot \cos(\mu \cdot \pi) + S_y \cdot \sin(\mu \cdot \pi) \\ \frac{10(\pi(2t^2 + 1) + 10\mu k)}{k} \end{bmatrix},$$

где  $k = \sqrt{\pi^2 + 100}$ ,  $S_x = \frac{100(2t^2 + 1)}{k}$ ,  $S_y = 10(2t - 1)$ ,  $\mu \in [0, 1]$ ,  $t \in [0, 1]$ .

Зададим некоторую функцию  $\mu = f(t)$  так, чтобы выполнялось условие  $f'(t) \neq 0$ , например,  $\mu = t^2$ . По уравнению (2) определим пространственную кривую  $g$  — образ следа  $g_g$  (рис. 2)

$$g: \bar{G}_g(t) = \begin{bmatrix} D_x \cdot \sin(t \cdot \pi) + D_y \cdot \cos(t \cdot \pi) \\ -D_x \cdot \cos(t \cdot \pi) + D_y \cdot \sin(t \cdot \pi) \\ \frac{10(\pi(2t^2 + 1) + 10tk)}{k} \end{bmatrix},$$

где  $k = \sqrt{\pi^2 + 100}$ ,  $D_x = \frac{100(2t^4 + 1)}{k}$ ,  $D_y = 10(2t^2 - 1)$ ,  $t \in [0, 1]$ .

Последующее формообразование ПНВ основано на вращении кривой линии  $g$  относительно криволинейной оси  $q$  и выполняется на основе алгоритма, приведенного в работе [1]. При помощи приведенных в работе [2] уравнений определяются координатно-параметрические уравнения ПНВ:

$$\bar{W}(t, \lambda) = (x(t, \lambda), y(t, \lambda), z(t, \lambda)),$$

$$t \in [0, 1], \lambda \in [0, 1].$$

Развернутая форма этих уравнений ввиду их большой громоздкости в работе не приводится. Визуализация результатов вычислений по полученным уравнениям приведена на рис. 2.

## 2. Формообразование канальной поверхности.

В нелинейном вращении точка пространства описывает круговую траекторию, принадлежащую нормальной плоскости  $(v, \beta)$  криволинейной оси вращения  $q$ , при этом центр траектории есть точка оси вращения, через которую проходит нормальная плоскость. Из этих условий следует уравнение

$$\bar{Q}'(t) \cdot (\bar{G}(l) - \bar{Q}(t)) = 0, \quad (3)$$

где  $\bar{G}(l)$  — векторное уравнение образующей, описывающей в нелинейном вращении ПНВ, каждая точка которой описывает соответствующую круговую траекторию. Из уравнения (3) следует зависимость  $l = f(t)$ , при этом, как показано в работе [2], выполняется условие  $f'(t) = \frac{df}{dt} \neq 0$ , обеспечивающее гладкость этой функции в каждой точке числового отрезка  $[t_0, t_n]$ .

Как известно, канальной называется поверхность, огибающая однопараметрическое множество сфер. Это определение канальной поверхности было дано в 1805 г. французским геометром, основателем начертательной геометрии Г. Монжем (1746 — 1818).

Сформируем сферу радиуса  $R(t)$  в неподвижной системе координат:

$$\bar{R}(t) = \bar{G}_r(t) - \bar{Q}(t), \quad \bar{G}_r(t) = \bar{G}_r(f(t)), \quad R(t) = |\bar{R}(t)|. \quad (4)$$

Пусть  $\bar{G}$  — радиус-вектор произвольной точки этой сферы. Запишем однопараметрическое семейство сфер  $\Phi(t): (\bar{G} - \bar{Q}(t))^2 - R(t)^2 = 0$ . Сформируем огибающую однопараметрического семейства сфер:

$$\begin{aligned} \Phi(t): & (\bar{G} - \bar{Q}(t))^2 - R(t)^2 = 0, \\ \Phi'(t): & (\bar{G} - \bar{Q}(t)) \cdot \bar{Q}'(t) + R(t) \cdot R'(t) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Система уравнений (5) определяет характеристическую окружность  $c(t)$  как линию пересечения плоскости  $\Phi'(t)$  и текущей сферы семейства  $\Phi(t)$ . Следуя методике [7], дадим геометрическую интерпретацию системе (5). Для этого введем обозначение  $\bar{G} - \bar{Q}(t) = \bar{U}(t)$ . Тогда, учитывая второе уравнение системы (5), запишем:  $\bar{U}(t) \cdot \bar{U}'(t) = |\bar{U}(t)| \cdot |\bar{U}'(t)| \cdot \cos \alpha$ . В таком случае систему уравнений (5) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi(t): & \bar{U}(t)^2 - R(t)^2 = 0, \\ \Phi'(t): & |\bar{U}(t)| \cdot |\bar{U}'(t)| \cdot \cos \alpha - R(t) \cdot R'(t) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Определим характеристическую окружность  $c(t)$  (рис. 3). Из вышеизложенного следует, что  $R(t) = |\bar{G} - \bar{Q}(t)| = |\bar{U}(t)|$ . В таком случае из второго уравнения системы (6) следует, что  $|\bar{U}'(t)| \cdot R(t) \cdot \cos \alpha = R(t) \cdot R'(t)$ . Введя обозначение  $R(t) \cdot \cos \alpha = \rho(t)$ , из предыдущего равенства получаем:

$$\rho(t) = \pm \frac{R(t) \cdot R'(t)}{|\bar{U}'(t)|} = \pm \frac{R(t) \cdot R'(t)}{\sqrt{\bar{Q}'(t)^2}}. \quad (7)$$

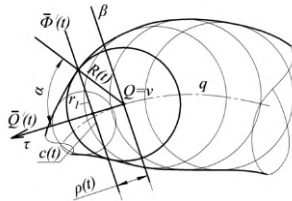


Рис. 3. К интерпретации огибающей однопараметрического семейства сфер

$\rho(t)$  определяет расстояние от центра  $Q$  локальной системы координат  $Q\tau\beta$  до плоскости  $\Phi'(t)$ , содержащей характеристическую окружность  $c(t)$ . Уравнение (6) позволяет определить радиус характеристической окружности:

$$r_1(t) = R(t) \cdot \sqrt{\frac{\overline{Q}'(t)^2 - R'(t)^2}{\overline{Q}'(t)^2}}. \quad (8)$$

Очевидно, выражение  $\overline{Q}'(t)^2 - R'(t)^2 \geq 0$  определяет необходимое и достаточное условие формообразования действительной каналовой поверхности, рассматриваемой как непрерывное однопараметрическое множество характеристических окружностей  $\{c(t)\}$  действительного радиуса  $r_1(t) \geq 0$ .

Рассмотрим получение векторно-параметрического уравнения каналовой поверхности. Параметрические уравнения характеристической окружности  $c(t)$  в локальной декартовой системе координат  $Q\tau\beta$  для  $t = t_Q$  будут иметь следующий вид:

$$\tau_c(t = t_Q) = \pm \rho(t = t_Q) = \pm \frac{R(t_Q) \cdot R'(t_Q)}{\sqrt{\overline{Q}'(t_Q)^2}},$$

$$v_c(t = t_Q) = r_1(t_Q) \cdot \cos(\lambda \cdot 2\pi),$$

$$\beta_c(t = t_Q) = r_1(t_Q) \cdot \sin(\lambda \cdot 2\pi),$$

где  $t = t_Q \in [t_0, t_n]$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ .

$$|\overline{R}(t)| = \frac{25\sqrt{734761 t^6 - 833120 t^5 + 1636966 t^4 + 1172000 t^3 + 996241 t^2 + 496000 t + 250000}}{127t + 250},$$

при этом введена функциональная зависимость параметров  $l = f(t)$  [2]:

$$f(t) = \frac{\sqrt{5t(127t + 250)(41t^2 + 75)}}{127t + 250}.$$

Затем по уравнению (8) определяем радиус характеристической окружности:

$$r_1(t) = \frac{25A}{2(127t + 250)} \times \frac{1}{B \cdot A^2(127t + 250)^4} \left( \begin{array}{l} -2176905836 \ 18365225 \cdot t^{12} + \\ + 7645765462 \ 63204 \cdot Bt^{10} - 9153266151 \ 06983250 t^{11} + \\ + 5153360952 \ 612320 \cdot Bt^9 - 2324386815 \ 44756975 t^{10} + \\ + 1265363660 \ 3256824 \cdot Bt^8 - 2016356219 \ 13274750 t^9 + \\ + 1536554825 \ 6904000 \cdot Bt^7 - 3235510212 \ 204132025 t^8 + \\ + 1606686507 \ 1177924 \cdot Bt^6 + 4410363171 \ 957631250 t^7 + \\ + 1824799404 \ 5468000 \cdot Bt^5 - 6335928337 \ 902343750 t^6 + \\ + 8665303152 \ 500000 \cdot Bt^4 + 5644477210 \ 132968750 t^5 + \\ + 3366558750 \ 000000 \cdot Bt^3 - 4183207343 \ 671875000 t^4 + \\ + 5866640625 \ 000000 \cdot Bt^2 + 2413252382 \ 812500000 t^3 + \\ + 1875000000 \ 00000 \cdot Bt - 1006987871 \ 337890625 t^2 + \\ + 3906250000 \ 000000 \cdot B + 3287768554 \ 68750000 t - 5493164062 \ 5000000 \end{array} \right)^{\frac{1}{2}},$$

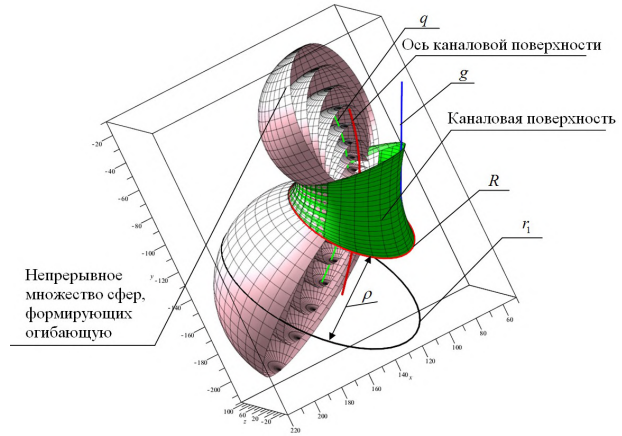


Рис. 4. Визуализация каналовой поверхности (пример 2, прямая задача)

В общем виде уравнение окружности  $c(t = t_Q)$  в локальной системе координат  $Q\tau\beta$  имеет вид:  $\overline{R}_c(t = t_Q, \lambda) = \{\tau_c(t = t_Q), v_c(t = t_Q, \lambda), \beta_c(t = t_Q, \lambda)\}$ . Уравнение каналовой поверхности в общем виде можно записать так:

$$\overline{G}(t, \lambda) = A^{-1}(t) \cdot \overline{R}_c(t, \lambda) + \overline{Q}(t), \quad (9)$$

где  $A^{-1}(t)$  — матрица обратного перехода.

**Пример 2 (прямая задача).** Задана криволинейная ось вращения  $q$  уравнением  $\overline{Q}(t) = \{50t^2 + 100, -100t - 60, 40t^2\}$ ,  $t \in [0, 1]$ . Образующая линия  $g$  задана уравнением  $\overline{G}(l) = \{50l^2 + 50, -100l^2 - 60, l^2\}$ ,  $l \in [0, 1]$ . Требуется построить каналовую поверхность.

*Решение.* Уравнение каналовой поверхности определяется в соответствии с алгоритмом, приведенным выше. Вначале определим выражение для радиусов сфер в неподвижной системе координат по уравнению (4):

где приняты обозначения:

$$A = \sqrt{734761t^6 - 833120t^5 + 1636966t^4 - 1172000t^3 + 996241t^2 - 496000t + 250000}, \quad B = |41t^2 + 25|.$$

Используя общее выражение (9), определяем уравнение каналовой поверхности, которое ввиду громоздкости не приводится. Визуализация результатов вычислений, выполненных по полученному уравнению, приведена на рис. 4.

### Пример 3 (обратная задача).

Криволинейная ось вращения  $q$  и след  $g_g$  заданы соответственно уравнениями  $\bar{Q}(t) = \{10 \cos(\pi \cdot t), 10 \sin(\pi \cdot t), 100t\}$ ,  $t \in [0,1]$  в неподвижной системе координат  $Oxuz$  и  $\bar{r}_g(\mu) = \{\tau = 0, v = -20\mu + 20, \beta = 20\mu^2 + 10\}$ ,  $\mu \in [0,1]$  в нормальной плоскости  $(v, \beta)$ . Требуется построить каналовую поверхность.

$$r_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi^2 + 100}} \left( R(\mu) \left( \frac{1}{A\mu^2} (B\mu^6 - 32B\mu^4 + 16B\mu^3 - 16B\mu^2 + \pi^2 + 16B\mu - 4B + 100A\mu^2) \right) \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$A = 4\mu^4 + 8\mu^2 - 8\mu + 5, \quad B = (400\mu^4 + 800\mu^2 - 800\mu + 500)^2.$$

По общему выражению (9) определяем уравнение каналовой поверхности. Её развёрнутое уравнение ввиду его громоздкости также не приводится. Визуализация результатов вычислений по полученному уравнению приведена на рис. 5.

**Заключение.** В результате исследования закономерностей образования поверхностей нелинейного вращения построена общая математическая модель известных в геометрии и ее практических приложениях двух классов поверхностей: нормальных циклических и каналовых. В этой модели геометрическая схема формообразования каналовой поверхности представляет собой наиболее общую схему, основанную на классическом определении этой поверхности. В случае нормальной циклической поверхности выполнено решение обратной задачи формообразования, которое в совокупности с решением для этой поверхности прямой задачи, изложенным в предыдущих работах авторов, создает теоретический базис формообразования поверхностей класса нормальных циклических. Представленные числовые примеры формообразования поверхностей обоих классов подтверждают работоспособность и универсальность предложенной математической модели.

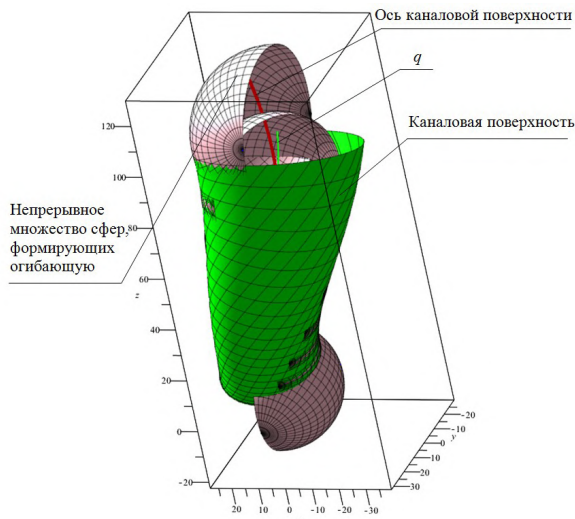


Рис. 5. Визуализация каналовой поверхности (пример 3, обратная задача)

**Решение.** Уравнение каналовой поверхности определяется также в соответствии с алгоритмом, приведенным выше. В обратной задаче построения поверхности ПВН задаётся функциональная зависимость  $\mu = f(t)$ . На основе выражения (4) получаем уравнение радиусов сфер в неподвижной системе координат

$$R(\mu) = 10\sqrt{4\mu^4 + 8\mu^2 - 8\mu + 5}.$$

По уравнению (8) определяем радиус характеристической окружности:

Математическая модель и соответствующие ей алгоритмы формообразования могут быть использованы при разработке специализированных САПР, предусматривающих разработку поверхностных конструкций на основе циклических и каналовых поверхностей в различных областях науки, техники и промышленности.

### Библиографический список

1. Панчук К. Л., Мясоедова Т. М., Любчинов Е. В. Циклические поверхности, сопровождающие нелинейчатые квадратики вращения // Омский научный вестник. 2023. № 3 (187). С. 23–29. DOI: 10.25206/1813-8225-2023-187-23-29. EDN: ВАКВРА.
2. Панчук К. Л., Мясоедова Т. М. Поверхность нелинейного вращения // Омский научный вестник. 2023. № 4 (188). С. 5–12. DOI: 10.25206/1813-8225-2023-188-5-12. EDN: VFPCSL.
3. Григорьев М. И. Построение обобщенных поверхностей вращения // Семинар «DNA&CAGD». Избранные доклады. 2007. С. 1–7.
4. Григорьев М. И., Малозёмов В. Н. Составные кривые и поверхности Безье. Аналитический подход. Lambert Academic Publishing, 2010. 132 с. ISBN 978-3-8433-0323-1.
5. Беглов И. А., Рустамян В. В. Метод вращения геометрических объектов вокруг криволинейной оси // Геометрия и графика. 2017. № 3. С. 45–50. DOI: 10.12737/article\_59bfa4eb0bf488.99866490.
6. Beglov I. A. Computer geometric modeling of quasirotation surfaces // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1901. P. 16–17. DOI: 10.1088/1742-6596/1901/1/012057.
7. Peternell M., Pottmann H. Computing Rational Parametrizations of Canal Surfaces // Journal Symbolic Comput. 1997. Vol. 23, Issue 2-3. P. 255–266. DOI: 10.1006/jsc.1996.0087.
8. Xu Z., Feng R., Sun J. G. Analytic and Algebraic Properties of Canal Surfaces // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2006. Vol. 195, Issues 1-2. P. 220–228. DOI: 10.1016/j.cam.2005.08.002.
9. Öztürk G., Bulca B., Bayram B. K. [et al.]. On Canal Surfaces in  $E^3$  // Selçuk Journal of Applied Mathematics. 2010. Vol. 11, № 2. P. 103–108.
10. Kim Y. H., Liu H., Qian J. Some characterizations of canal surfaces // Bull. Korean Math. Soc. 2016. Vol. 53 (2). P. 461–477. DOI: 10.4134/BKMS.2016.53.2.461.
11. Кривошапко С. Н., Иванов В. Н. Энциклопедия аналитических поверхностей (более 500 поверхностей, 38 классов: математикам, инженерам, архитекторам). Москва: URSS, 2010. 556 с. ISBN 978-5-397-00985-0.

12. Farouki R. A., Sverrisor R. Approximation of Rolling-ball Blends for Freeform Parametric Surfaces // *Computer-Aided Design*. 1996. Vol. 28 (11). P. 871–878. EDN: AKQVYD.
13. Hartman E. *Geometry and Algorithms for Computer Aided Design*. Department of Mathematics Darmstadt University of Technology. Darmstadt, Germany, 2003. 160 p.
14. Ньи Н. Х., Чжо Т., Маркин Л. В. Исследование алгоритмов использования рецепторных геометрических моделей в задачах телесной трассировки авиационной техники // *Труды МАИ*. 2013. № 69. С. 1–25. URL: [www.mai.ru/upload/iblock/62a/62ad38934954abb6876b2d621d39098f.pdf](http://www.mai.ru/upload/iblock/62a/62ad38934954abb6876b2d621d39098f.pdf) (дата обращения: 12.03.2024).
15. Маркин Л. В. Геометрические модели автоматизированной компоновки летательных аппаратов // *Вестник МАИ*. 2015. Т. 22, № 1. С. 47–56. EDN: TNWXMФ.
16. Ньи Н. Х., Маркин Л. В., Соседко А. А. Применение рецепторных геометрических моделей в задачах автоматизированной компоновки авиационной техники // *Труды МАИ*. 2014. № 72. С. 1–26. URL: <http://www.mai.ru/upload/iblock/f17/f178d8a078b6927a66bd134f8a37e7ad.pdf> (дата обращения: 12.03.2024).
17. Ma Y., Tu C., Wang W. Computing the Distance between Canal Surfaces // *Advances in Geometric Modeling and Processing*. GMP 2010. Lecture Notes in Computer Science. 2010. Vol. 6130 / Eds. B. Mourrain, S. Schaefer, G. Xu. Springer, Berlin, Heidelberg. DOI: 10.1007/978-3-642-13411-1\_7.
18. Núñez-Valdés J., Ocaña Almagro I. Canal surfaces and its application to the CAGD // *American Journal of Engineering Research (AJER)*. 2021. Vol. 10, Issue 03. P. 19–31.

**ПАНЧУК Константин Леонидович**, доктор технических наук, доцент (Россия), профессор кафедры «Инженерная геометрия и САПР» Омского государственного технического университета (ОмГТУ), г. Омск.

SPIN-код: 5623-0008  
 AuthorID (РИНЦ): 501163  
 ORCID: 0000-0001-9302-8560  
 AuthorID (SCOPUS): 55857766100  
 ResearcherID: S-2788-2017  
 Адрес для переписки: Panchuk\_KL@mail.ru  
**МЯСОЕДОВА Татьяна Михайловна**, кандидат технических наук, доцент кафедры «Инженерная геометрия и САПР» ОмГТУ, г. Омск.  
 SPIN-код: 6056-6455  
 AuthorID (РИНЦ): 686836  
 ORCID: 0000-0002-9641-9417  
 AuthorID (SCOPUS): 57201776004  
 ResearcherID: E-7505-2014  
 Адрес для переписки: mtm44mtm44@mail.ru  
**ЛЮБЧИНОВ Евгений Владимирович**, кандидат технических наук, доцент кафедры «Инженерная геометрия и САПР» ОмГТУ, г. Омск.  
 SPIN-код: 8144-6370  
 AuthorID (РИНЦ): 917932  
 ORCID: 0000-0003-2499-4866  
 AuthorID (SCOPUS): 57199399265  
 ResearcherID: D-1882-2019  
 Адрес для переписки: Lubchinov.E.V@yandex.ru

#### Для цитирования

Панчук К. Л., Мясоедова Т. М., Любчинов Е. В. Математическая модель формообразования циклической и каналовой поверхностей на основе нелинейного вращения // *Омский научный вестник*. 2024. № 4 (192). С. 14–21. DOI: 10.25206/1813-8225-2024-192-14-21.

Статья поступила в редакцию 11.06.2024 г.  
 © К. Л. Панчук, Т. М. Мясоедова, Е. В. Любчинов

## MATHEMATICAL MODEL OF THE FORMATION OF CYCLIC AND CHANNEL SURFACES BASED ON NONLINEAR ROTATION

This work is a continuation of the series of works by the authors devoted to the issues of shaping surfaces of nonlinear rotation. The geometric scheme for the formation of surfaces of this class includes: an axis of nonlinear rotation, which is a smooth, generally spatial curve, and a forming line, also a smooth spatial curve. When the generating line rotates relative to the curvilinear axis, each point of the generating line describes a circumferential trajectory in the corresponding normal plane of the rotation axis. As a result, a surface of nonlinear rotation is formed, which is a normal cyclic surface. In this work, in order to develop the research results previously obtained by the authors in the field of shaping surfaces of nonlinear rotation, the solution to the inverse problem of shaping is considered and a mathematical justification is given for the possibility of shaping a channel surface based on solutions to the direct and inverse problems. The work provides numerical examples of the formation of the surfaces under consideration, accompanied by mathematical models of surfaces, their computer implementation and visualization. The research results can be useful in the development of CAD systems that involve the design of surface forms of products based on cyclic and channel surfaces in mechanical engineering, construction, architecture and other practical fields.

**Keywords:** nonlinear rotation, mathematical model, smoothness of function, shaping, cyclic surface, inverse problem, channel surface.

### References

1. Panchuk K. L., Myasoyedova T. M., Lyubchinov E. V. Tsiklicheskiye poverkhnosti, soprovozhdayushchiye nelineyachatyye kvadriki vrashcheniya [Cyclic surfaces accompanying non-ruled quadrics of rotation] // Omskiy nauchnyy vestnik. *Omsk Scientific Bulletin*. 2023. No. 3 (187). P. 23–29. DOI: 10.25206/1813-8225-2023-187-23-29. EDN: BAKBPA. (In Russ.).
2. Panchuk K. L., Myasoyedova T. M. Poverkhnost' nelineynogo vrashcheniya [The surface of non-linear rotation] // Omskiy nauchnyy vestnik. *Omsk Scientific Bulletin*. 2023. No. 4 (188). P. 5–12. DOI: 10.25206/1813-8225-2023-188-5-12. EDN: VFCPSL. (In Russ.).
3. Grigor'yev M. I. Postroyeniye obobshchennykh poverkhnostey vrashcheniya [Construction of generalised rotation surfaces] // Seminar «DNA&CAGD». *Izbrannyye doklady. Seminar «DNA&CAGD». Izbrannyye Doklady*. 2007. P. 1–7. (In Russ.).
4. Grigor'yev M. I., Malozemov V. N. Sostavnyye krivyye i poverkhnosti Bez'ye. Analiticheskiy podkhod [Compound curves and Bézier surfaces. Analytical approach]. Lambert Academic Publishing, 2010. 132 p. ISBN 978-3-8433-0323-1. (In Russ.).
5. Beglov I. A., Rustamyan V. V. Metod vrashcheniya geometricheskikh ob'yektov vokrug krivolineynoy osi [Method of rotation of geometrical objects around the curvilinear axis] // *Geometriya i grafika. Geometry and Graphics*. 2017. No. 3. P. 45–50. DOI: 10.12737/article\_59bfa4eb0bf488.99866490. (In Russ.).
6. Beglov I. A. Computer geometric modeling of quasirotation surfaces // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. Vol. 1901. P. 16–17. DOI: 10.1088/1742-6596/1901/1/012057. (In Engl.).
7. Peternell M., Pottmann H. Computing Rational Parametrizations of Canal Surfaces // *Journal Symbolic Comput.* 1997. Vol. 23, Issue 2–3. P. 255–266. DOI: 10.1006/jsco.1996.0087. (In Engl.).
8. Xu Z., Feng R., Sun J. G. Analytic and Algebraic Properties of Canal Surfaces // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2006. Vol. 195, Issues 1–2. P. 220–228. DOI: 10.1016/j.cam.2005.08.002. (In Engl.).
9. Öztürk G., Bulca B., Bayram B. K. [et al.]. On Canal Surfaces in  $E^3$  // *Selçuk Journal of Applied Mathematics*. 2010. Vol. 11, no. 2. P. 103–108. (In Engl.).
10. Kim Y. H., Liu H., Qian J. Some characterizations of canal surfaces // *Bull. Korean Math. Soc.* 2016. Vol. 53 (2). P. 461–477. DOI: 10.4134/BKMS.2016.53.2.461. (In Engl.).
11. Krivoshapko S. N., Ivanov V. N. Entsiklopediya analiticheskikh poverkhnostey (boleye 500 poverkhnostey, 38 klassov: matematikam, inzheneram, arkhitektozam) [Encyclopaedia of Analytical Surfaces (over 500 surfaces, 38 classes: for mathematicians, engineers, architects)]. Moscow, 2010. 556 p. ISBN 978-5-397-00985-0. (In Russ.).
12. Farouki R. A., Sverrisor R. Approximation of Rolling-ball Blends for Freeform Parametric Surfaces // *Computer-Aided Design*. 1996. Vol. 28 (11). P. 871–878. EDN: AKQVYD. (In Engl.).
13. Hartman E. *Geometry and Algorithms for Computer Aided Design*. Department of Mathematics Darmstadt University of Technology. Darmstadt, Germany, 2003. 160 p. (In Engl.).
14. Nyi N. H., Kyaw H., Markin L. V. Issledovaniye algoritmov ispol'zovaniya retseptornykh geometricheskikh modeley v zadachakh telesnoy trassirovki aviatsionnoy tekhniki [The study

of algorithms using receptor geometric model in the problems of physical route tracing in aviation technology] // *Trudy MAI. Trudy MAI*. 2013. No. 69. P. 1–25. URL: [www.mai.ru/upload/iblock/62a/62ad38934954abb6876b2d621d39098f.pdf](http://www.mai.ru/upload/iblock/62a/62ad38934954abb6876b2d621d39098f.pdf) (accessed: 12.03.2024). (In Russ.).

15. Markin L. V. Geometricheskiye modeli avtomatizirovannoy komponovki letatel'nykh apparatov [Geometric Models of Automated Layout Aircrafts] // *Vestnik MAI. Aerospace MAI Journal*. 2015. Vol. 22, no. 1. P. 47–56. EDN: TNWXMf. (In Russ.).

16. Nyi N. H., Markin L. V., Sosedko A. A. Primeneniye retseptornykh geometricheskikh modeley v zadachakh avtomatizirovannoy komponovki aviatsionnoy tekhniki [Implementation of receptor geometric models in the problems of automated layout design in aviation technology] // *Trudy MAI. Trudy MAI*. 2014. No. 72. P. 1–26. URL: <http://www.mai.ru/upload/iblock/f17/f178d8a078b6927a66bd134f8a37e7ad.pdf> (accessed: 12.03.2024). (In Russ.).

17. Ma Y., Tu C., Wang W. Computing the Distance between Canal Surfaces // *Advances in Geometric Modeling and Processing. GMP 2010. Lecture Notes in Computer Science*. 2010. Vol. 6130 / Eds. B. Mourrain, S. Schaefer, G. Xu. Springer, Berlin, Heidelberg. DOI: 10.1007/978-3-642-13411-1\_7. (In Engl.).

18. Núñez-Valdés J., Ocaña Almagro I. Canal surfaces and its application to the CAGD // *American Journal of Engineering Research (AJER)*. 2021. Vol. 10, Issue 03. P. 19–31. (In Engl.).

**PANCHUK Konstantin Leonidovich**, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Professor of Engineering Geometry and CAD Department, Omsk State Technical University (OmSTU), Omsk.  
SPIN-code: 5623-0008  
AuthorID (RSCI): 501163

ORCID: 0000-0001-9302-8560  
AuthorID (SCOPUS): 55857766100  
ResearcherID: S-2788-2017

Correspondence address: Panchuk\_KL@mail.ru  
**MYASOEDOVA Tatyana Mikhaylovna**, Candidate of Technical Sciences, Senior Lecturer of Engineering Geometry and CAD Department, OmSTU, Omsk.

SPIN-code: 6056-6455  
AuthorID (RSCI): 686836  
ORCID: 0000-0002-9641-9417  
AuthorID (SCOPUS): 57201776004  
ResearcherID: E-7505-2014

Correspondence address: mtm44mtm44@mail.ru  
**LYUBCHINOV Evgeniy Vladimirovich**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of Engineering Geometry and CAD Department, OmSTU, Omsk.

SPIN-code: 8144-6370  
AuthorID (RSCI): 917932  
ORCID: 0000-0003-2499-4866  
AuthorID (SCOPUS): 57199399265  
ResearcherID: D-1882-2019

Correspondence address: Lubchinov.E.V@yandex.ru

#### For citations

Panchuk K. L., Myasoedova T. M., Lyubchinov E. V. Mathematical model of the formation of cyclic and channel surfaces based on nonlinear rotation // *Omsk Scientific Bulletin*. 2024. No. 4 (192). P. 14–21. DOI: 10.25206/1813-8225-2024-192-14-21.

Received June 11, 2024.

© K. L. Panchuk, T. M. Myasoedova, E. V. Lyubchinov