

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГРАНИЦ РАБОЧЕГО ПРОСТРАНСТВА ПЛАНАРНОГО ТРЕХЗВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА

Проведено исследование границ рабочего пространства трехзвенного планарного манипулятора, заданного аналитическими уравнениями. Предложена новая геометрическая трактовка этих уравнений. На ее основе установлено, что рабочее пространство представляет собой двухпараметрические множества эксцентрических и концентрических окружностей. При отображении таких окружностей в четырехмерное пространство получены два вида гиперповерхностей, которые являются геометрической моделью рабочего пространства манипулятора. Дискриминантами этих гиперповерхностей на гиперплоскости являются две двумерные поверхности. Получены как аналитическое описание этих поверхностей, так и их компьютерные модели. В результате установлено, что границами рабочего пространства на плоскости механизма являются дискриминанты таких поверхностей. Для подтверждения достоверности полученных результатов в качестве примера на дискриминантных поверхностях решена обратная задача кинематики — определены значения обобщенных координат в точках границ рабочего пространства манипулятора для заданных их декартовых координат.

Ключевые слова: геометрическое моделирование, компьютерная модель, манипулятор, центр схвата, рабочее пространство манипулятора, гиперповерхность, дискриминанта, трехзвенный планарный манипулятор.

Введение. Планарные двух- и трехзвенные манипуляторы нашли широкое применение, в частности, на сборочных линиях при установке мелких деталей для электронных компонентов, в качестве испытательных стендов при исследовании трехзвенных манипуляторов [1], а также в медицине и других отраслях промышленности. Основной характеристикой манипулятора, которая указывается в паспорте манипулятора, является рабочее пространство [2], так как оно влияет на конструкцию манипулятора, размещение в рабочей среде и планирование траекторий. В последние десятилетия многочисленные исследования рабочего пространства и его границ лишь подтверждают эту значимость.

Граничные кривые (для 2D-манипуляторов роботов), а также поверхности (для 3D-манипуляторов роботов) рабочего пространства робота были изучены графическими, аналитическими или численными методами, а также с использованием программного обеспечения.

В настоящее время наиболее исследованным, вследствие простоты его конструкции, является рабочее пространство двухзвенного планарного манипулятора.

Границы двухзвенного планарного манипулятора представляют собой дуги окружностей [2], в работе [3] это кольцо, определяемое двумя концентрическими окружностями радиуса $|l_1 + l_2|$ и $|l_1 - l_2|$ с центрами в начале координат (l_1 и l_2 — длины зве-

ньев). Внутренний круг может вырождаться в особую точку, когда два звена имеют одинаковую длину [3]. Подробнее границы двухзвенного планарного манипулятора исследованы в работе [4].

Хотя в области исследования границ трехзвенного манипулятора существует множество работ, до сих пор остаются открытые проблемы в характеристиках границы [5].

Сeccarelli M. (1995) [6] был предложен алгоритм определения границ, использующий алгебраическую формулировку. Предварительная классификация типов кольцевых пустот и геометрические особенности были представлены в Ottaviano et al. (1999) [7]. Анализ бугров в границах рабочего пространства был предложен также в (Burdick, 1995; Saramago et al., 2002) [8, 9].

В статье [7] представлено алгебраическое решение задачи по установлению граничного рабочего пространства 3D-манипулятора в декартовом пространстве. Показано, что граничная кривая поперечного сечения может быть описана полиномом 16-го порядка. Исследованы геометрические особенности этой кривой [7].

В работе Bastien J. [10] граница манипулятора состоит из дуг окружностей, которые определяются геометрической интерпретацией вырожденной матрицы Якоби. В статье [11] используется аналитическое решение для определения рабочего пространства робота с использованием Matlab.

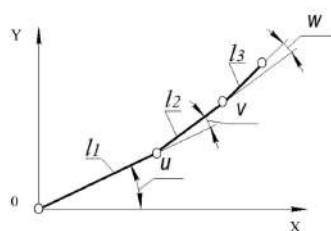


Рис. 1. Расчетная схема

К сожалению, аналитические методы не подходят с инженерной точки зрения из-за их сложности в расчетах.

Снайман и Плесси (2000) использовали численный метод определения границ [12]. В работе [13] исследование направлено на определение положения и ориентации базы манипулятора относительно заранее заданной рабочей среды. Численные методы размещения робота основаны на определении точной границы рабочего пространства. Задача решается без применения алгоритма обратной кинематики с использованием некоторой «меры ловкости». В качестве примера рассмотрен плоский манипулятор с тремя степенями свободы.

В ряде статей [14–16] был использован метод Монте-Карло, бета-распределение и программа Unigraphics для создания формы и объема рабочего пространства робота. В статье [13] в среде программы Unigraphics получено рабочее пространство путем вращения граничных кривых вокруг оси. В статье [14] для более сложных роботов использовался метод твердотельного моделирования Solidworks. Суть метода состоит, во-первых, в применении численного метода для создания плоских граничных кривых пространственного робота в своей основной рабочей плоскости, а затем 3D-форма и объем рабочего пространства робота генерируются программным обеспечением Unigraphics.

В статье [17] получена классификация для всех возможных плоских 3R-манипуляторов (где R — вращательная пара) в зависимости от соотношений длин звеньев. Выделено три класса манипуляторов.

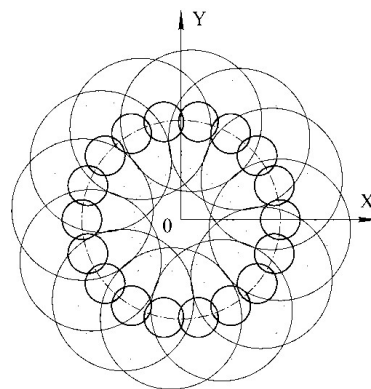
Практический интерес представляет нахождение бугров и пустот внутри рабочей области [7].

Наличие бугров и пустот можно обнаружить по анализу геометрических особенностей граничных поверхностей и кривых. Эффективным инструментом для достижения этих целей является разработка соответствующих геометрических моделей и компьютерных технологий.

Актуальными являются исследования, направленные на развитие методов геометрического и компьютерного моделирования рабочего пространства манипуляторов применительно к их использованию в среде интегрированных систем компьютерной графики.

Целью настоящей работы является исследование рабочего пространства планарных трехзвенных манипуляторов средствами геометрического и компьютерного моделирования с возможностью решения как прямой, так и обратной задач кинематики механизмов этих манипуляторов.

1. Теория. Для решения поставленной задачи выполним исследования кинематической схемы (рис. 1) планарного трехзвенного манипулятора. На этом рисунке заданы длины звеньев l_1 , l_2 и l_3 , а также углы поворота звеньев u , v и w (обобщенные координаты).

Рис. 2. Семейства экцентрических окружностей для различных значений параметра w : $w = 0^\circ$, $w = 180^\circ$

Аналитические зависимости, связывающие координаты центра схвата с обобщенными координатами манипулятора, определяются системой уравнений

$$\begin{aligned} x &= l_1 \cdot \cos(u) + l_2 \cdot \cos(u + v) + \\ &+ l_3 \cdot \cos(u + v + w) \\ y &= l_1 \cdot \sin(u) + l_2 \cdot \sin(u + v) + \\ &+ l_3 \cdot \sin(u + v + w). \end{aligned} \quad (1)$$

Проведенные исследования уравнений (1) позволили установить, что они задают семейство экцентрических окружностей, центры которых расположены на окружности радиусом $R_0 = l_1$ с центром в начале системы координат (рис. 2). Радиусы этих окружностей определяются зависимостью

$$R_i = \sqrt{(l_2)^2 + (l_3)^2 + 2(l_2)(l_3) \cos(w)} \quad (2)$$

Для каждого фиксированного значения u предлагается рассматривать семейства окружностей на плоскости (рис. 2) как проекции окружностей некоторого многообразия из четырехмерного пространства [18, 19]. Пусть каждая из окружностей этого семейства смещена параллельно плоскости XU на величину, пропорциональную параметрам v и u . Тогда семейство таких окружностей определит гиперповерхность в четырехмерном пространстве, которая записывается уравнениями

$$\begin{aligned} x &= l_1 \cdot \cos(u) + l_2 \cdot \cos(u + v) + \\ &+ l_3 \cdot \cos(u + v + w) \\ y &= l_1 \cdot \sin(u) + l_2 \cdot \sin(u + v) + \\ &+ l_3 \cdot \sin(u + v + w) \\ z &= C_2 \cdot v \\ t &= C_1 \cdot u, \end{aligned} \quad (3)$$

где C_1 и C_2 — некоторые константы.

Эта поверхность задает рабочее пространство трёхзвенного планарного манипулятора. Для определения границ этого пространства выполним отображение гиперповерхности (3) ортогональным проецированием вдоль оси Z на гиперплоскость XUT . В этом случае в точках дискриминанты гиперповерхности узлы обобщенных координат манипулятора устанавливается зависимость:

$$F(u, v, w) = \begin{vmatrix} x_u & y_u & t_u \\ x_v & y_v & t_v \\ x_w & y_w & t_w \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

После вычисления и подстановки выражений для частных производных в уравнение (4) и преобразований, получим

$$w = 0 \text{ и } w = \pm 180^\circ. \quad (5)$$

Значения параметра w совместно с уравнениями (3) определяют две двумерные поверхности:

$$x = l_1 \cdot \cos(u) + (l_2 + l_3) \cdot \cos(u + v) \quad (6)$$

$$y = l_1 \cdot \sin(u) + (l_2 + l_3) \cdot \sin(u + v)$$

$$t = t(u)$$

и

$$x = l_1 \cdot \cos(u) + (l_2 - l_3) \cdot \cos(u + v) \quad (7)$$

$$y = l_1 \cdot \sin(u) + (l_2 - l_3) \cdot \sin(u + v)$$

$$t = t(u).$$

Эти поверхности задают границы рабочего пространства манипулятора в зависимости от обобщенных координат u и v . Модели полученных поверхностей приведены на рис. 3.

Выполнив преобразование уравнений (6), получим

$$\begin{aligned} [x - l_1 \cdot \cos(u)]^2 + \\ + [y - l_1 \cdot \sin(u)]^2 = (l_2 + l_3)^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнение (8) определяет семейство эксцентрических окружностей радиусом $l_2 + l_3$ с центрами: $x_0 = l_1 \cdot \cos(u)$, $y_0 = l_1 \cdot \sin(u)$ на окружности радиусом l_1 .

В свою очередь уравнения (7) определяют семейство эксцентрических окружностей радиусом $l_2 - l_3$ с центрами: $x_0 = l_1 \cdot \cos(u)$, $y_0 = l_1 \cdot \sin(u)$ на окружности радиусом l_1 .

Огибающие этих окружностей задают границы рабочего пространства манипулятора на плоскости XU в зависимости от значений параметра u .

2. Дискриминанты гиперповерхностей, задающих границы рабочего пространства. Границами рабочего пространства манипулятора являются дискриминанты (двумерные поверхности) указанных выше гиперповерхностей на гиперплоскости. Для нахождения границ рабочего пространства в плоскости манипулятора нужно найти дискриминанты полученных двумерных поверхностей.

2.1. Дискриминанта гиперповерхности, образованной семейством эксцентрических окружностей. Для установления границ рабочего пространства в плоскости манипулятора выполним отображение поверхностей (6) и (7) ортогональным проецированием на координатную плоскость XU . В точках дискриминант этих поверхностей выполняется условие

$$F(u, v) = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = 0. \quad (9)$$

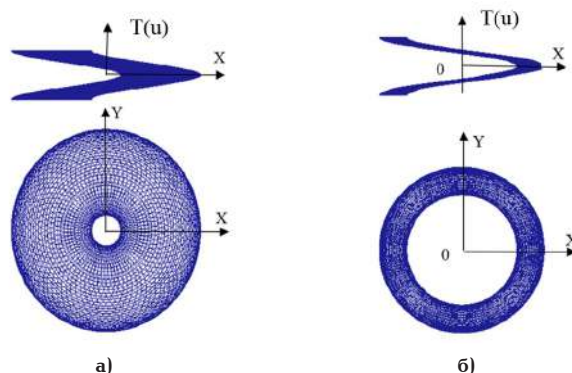


Рис. 3. Дискриминантные поверхности на гиперплоскости XU для а) $w = 0^\circ$, б) $w = \pm 180^\circ$

После подстановки выражений для частных производных переменных x и y из (6) в уравнение (9) и преобразований получим в точках дискриминанты значения параметра v : $v = 0^\circ$ и $v = \pm 180^\circ$. Тогда уравнения (6) и (7) для значения $v = 0^\circ$ имеют вид

$$\begin{aligned} x &= (l_1 + l_2 + l_3) \cdot \cos(u) \\ y &= (l_1 + l_2 + l_3) \cdot \sin(u) \end{aligned} \quad (10)$$

$$t = t(u),$$

$$\begin{aligned} x &= (l_1 + l_2 - l_3) \cdot \cos(u) \\ y &= (l_1 + l_2 - l_3) \cdot \sin(u) \end{aligned} \quad (11)$$

$$t = t(u),$$

а для $v = \pm 180^\circ$ будут

$$\begin{aligned} x &= (l_1 - l_2 - l_3) \cdot \cos(u) \\ y &= (l_1 - l_2 - l_3) \cdot \sin(u) \end{aligned} \quad (12)$$

$$t = t(u),$$

$$\begin{aligned} x &= (l_1 - l_2 + l_3) \cdot \cos(u) \\ y &= (l_1 - l_2 + l_3) \cdot \sin(u) \end{aligned} \quad (13)$$

$$t = t(u).$$

В результате уравнения (10)–(13) определяют цилиндрические винтовые линии. Проекциями этих линий на координатную плоскость XU являются четыре concentric окружности радиусами $R_{\max} = (l_1 + l_2 + l_3)$, $R_{\min} = (l_1 - l_2 - l_3)$, $R_1 = (l_1 - l_2 + l_3)$, $R_2 = (l_1 + l_2 - l_3)$. Дуги этих окружностей являются участками границы рабочего пространства в зависимости от диапазона изменения параметра u .

Для определения границ рабочего пространства манипулятора в зависимости от обобщенной координаты v выполним отображение гиперповерхности (3) ее ортогональным проецированием вдоль оси T .

В этом случае уравнение, устанавливающее связь обобщенных координат, будет

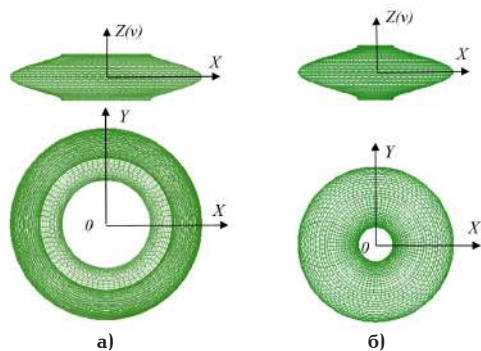


Рис. 4. Дискриминантные поверхности на гиперплоскости XYZ: а) $k = 0$; б) $k = \pm 1$

$$F(u, v, w) = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix} = 0. \quad (14)$$

После подстановки зависимостей для частных производных в уравнение (14) и преобразований уравнение связи параметров v и w будет:

$$v = \pi \cdot k + (-1)^k \times \arcsin\left(\frac{l_2}{l_1} \cdot \sin(-w)\right) - w, \quad (15)$$

где $k = 0, \pm 1$.

Полученное уравнение (15) совместно с уравнениями (3) определяют две двумерные поверхности.

Модели этих поверхностей показаны на рис. 4.

Проекцией одной из поверхностей (рис. 4а) является семейство концентрических окружностей с центром в начале системы координат:

$$x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + 2l_1 \cdot l_2 \times \cos\left(\arcsin\left(\frac{l_2}{l_1} \cdot \sin(-w)\right) - w\right) + 2l_2 \cdot l_3 \cdot \cos(w) + 2l_1 \cdot l_3 \cdot \cos\left(\arcsin\left(\frac{l_2}{l_1} \cdot \sin(-w)\right)\right), \quad (16)$$

и радиусами

$$Ri = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + 2l_1 \cdot l_2 \times \cos\left(\arcsin\left(\frac{l_2}{l_1} \cdot \sin(-w)\right) - w\right) + 2l_2 \cdot l_3 \cdot \cos(w) + 2l_1 \cdot l_3 \cdot \cos\left(\arcsin\left(\frac{l_2}{l_1} \cdot \sin(-w)\right)\right)}.$$

Проекцией другой поверхности (рис. 4б) является семейство концентрических окружностей с центром в начале системы координат:

$$x^2 + y^2 = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + 2l_1 \cdot l_2 \times \cos\left(\pi - \arcsin\left(\frac{l_2}{l_1} \cdot \sin(-w)\right) - w\right) + 2l_2 \cdot l_3 \cdot \cos(w) + 2l_1 \cdot l_3 \times$$

$$\cos\left(\pi - \arcsin\left(\frac{l_2}{l_1} \cdot \sin(-w)\right)\right) \quad (17)$$

и радиусами

$$Ri = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + 2l_1 \cdot l_2 \times \cos\left(\pi - \arcsin\left(\frac{l_2}{l_1} \cdot \sin(-w)\right) - w\right) + 2l_2 \cdot l_3 \cdot \cos(w) + 2l_1 \cdot l_3 \cdot \cos\left(\pi - \arcsin\left(\frac{l_2}{l_1} \cdot \sin(-w)\right)\right)}.$$

Для определения границы рабочего пространства на координатной плоскости XY в зависимости от параметра v определим дискриминанты поверхностей (рис. 4) с учетом уравнения связи (15). В точках дискриминант выполняется условие

$$F(u, w) = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_w & y_w \end{vmatrix} = 0. \quad (18)$$

После подстановки выражений для частных производных в равенство (18) и преобразований получим

$$v'(l_1 \cdot \sin(v) - l_3 \cdot \sin(w)) = 0, \quad (19)$$

где

$$v' = \left(\begin{matrix} \pi \cdot k + (-1)^k \times \\ \times \arcsin\left(\frac{l_2}{l_1} \cdot \sin(-w)\right) - w \end{matrix} \right)' = \frac{-(-1)^k \cdot \frac{l_2}{l_1} \cdot \cos(-w)}{\sqrt{1 - \left(\frac{l_2}{l_1} \cdot \sin(-w)\right)^2}} - 1. \quad (20)$$

Решением уравнения (19) являются значения v и w : $v = 0^\circ$ и $w = 0^\circ$; $v = \pm 180^\circ$ и $w = 0^\circ$; $v = \pm 180^\circ$ и $w = \pm 180^\circ$; $w = \pm 180^\circ$ и $v = 0^\circ$.

Подставляя в уравнения (16) и (17) значения параметров v и w , получим четыре окружности:

$$x = (l_1 + l_2 + l_3) \cdot \cos(u) \\ y = (l_1 + l_2 + l_3) \cdot \sin(u) \cdot \quad (21)$$

$$z = z(v) = 0^\circ$$

$$x = (l_1 + l_2 - l_3) \cdot \cos(u) \\ y = (l_1 + l_2 - l_3) \cdot \sin(u) \cdot \quad (22)$$

$$z = z(v) = 0^\circ$$

$$x = (l_1 - l_2 - l_3) \cdot \cos(u) \\ y = (l_1 - l_2 - l_3) \cdot \sin(u) \cdot \quad (23)$$

$$z = z(v) = \pm 180^\circ$$

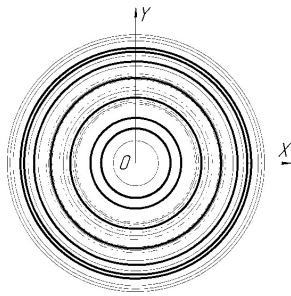


Рис. 5. Семейства концентрических окружностей для различных значений параметра w : $w = 0^\circ$, $w = 90^\circ$, $w = 180^\circ$

$$\begin{aligned} x &= (l_1 - l_2 + l_3) \cdot \cos(u) \\ y &= (l_1 - l_2 + l_3) \cdot \sin(u) \cdot \\ z &= z(v) = \pm 180^\circ \end{aligned} \quad (24)$$

2.2. Дискриминанта гиперповерхности, образованной семейством концентрических окружностей. Выполним еще одно преобразование уравнений системы (1), в результате которого получим

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + 2l_1 \cdot l_2 \times \\ &\times \cos(v) + 2l_1 \cdot l_3 \cdot \cos(v + w) + \\ &+ 2l_2 \cdot l_3 \cdot \cos(w). \end{aligned} \quad (25)$$

Это уравнение определяет двухпараметрическое семейство концентрических окружностей с центром в начале системы координат и радиусами (рис. 5)

$$Ri = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + 2l_1 \cdot l_2 \times \cos(v) + 2l_1 \cdot l_3 \times \cos(v + w) + 2l_2 \cdot l_3 \cdot \cos(w)}. \quad (26)$$

Тогда уравнения гиперповерхности в четырехмерном пространстве, образованной семейством концентрических окружностей, имеют вид

$$\begin{aligned} x &= l_1 \cdot \cos(u) + l_2 \cdot \cos(u + v) + l_3 \cdot \cos(u + v + w) \\ y &= l_1 \cdot \sin(u) + l_2 \cdot \sin(u + v) + l_3 \cdot \sin(u + v + w) \\ z &= C_2 \cdot w \\ t &= C_1 \cdot u, \end{aligned} \quad (27)$$

где C_1 и C_2 — некоторые константы.

Такая гиперповерхность, как и (3), задает рабочее пространство трехзвенного планарного манипулятора. Для определения границ этого пространства выполним отображение гиперповерхности (27) ортогональным проецированием вдоль оси T на гиперплоскость XYZ . В этом случае в точках дискриминанты гиперповерхности связь обобщенных координат манипулятора устанавливается, как и ранее, зависимостью (14).

После подстановки выражений для соответствующих частных производных в (14) и преобразований получим:

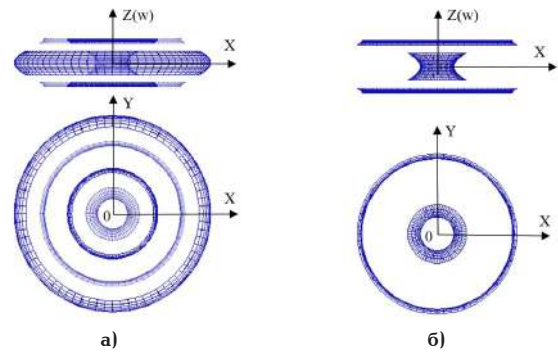


Рис. 6. Дискриминантные поверхности на гиперплоскости XYZ : а) $k = 0$; б) $k = \pm 1$

$$w = \pi \cdot k + (-1)^k \cdot \arcsin\left(\frac{l_2}{l_3} \cdot \sin(-v)\right) - v, \quad (28)$$

где $k = 0, \pm 1$.

Значения параметра w совместно с уравнениями (27) определяют две двумерные поверхности.

Эти поверхности задают границы рабочего пространства манипулятора в зависимости от обобщенной координаты w .

Модели полученных поверхностей приведены на рис. 6.

Выполнив преобразование уравнений (27) с учетом (28), получим

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + 2l_1 \times \\ &\times l_3 \cdot \cos\left(\arcsin\left(\frac{l_2}{l_3} \cdot \sin(-v)\right)\right) + \\ &+ 2l_1 \cdot l_2 \cdot \cos(v) + 2l_2 \cdot l_3 \times \\ &\times \cos\left(\arcsin\left(\frac{l_2}{l_3} \cdot \sin(-v)\right) - v\right). \end{aligned} \quad (29)$$

В результате уравнение (29) описывает однопараметрическое семейство концентрических окружностей с центром в точке $(0,0)$ и радиусами

$$Ri = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + 2l_1 \cdot l_3 \times \cos\left(\arcsin\left(\frac{l_2}{l_3} \cdot \sin(-v)\right)\right) + 2l_1 \cdot l_2 \cdot \cos(v) + 2l_2 \cdot l_3 \cdot \cos\left(\arcsin\left(\frac{l_2}{l_3} \cdot \sin(-v)\right) - v\right)}.$$

Выполнив аналогично предыдущему, но для $k = 1$, преобразования системы уравнений (27), получим:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + 2l_1 \cdot l_3 \times \\ &\times \cos\left(\pi - \arcsin\left(\frac{l_2}{l_3} \cdot \sin(-v)\right)\right) + \\ &+ 2l_1 \cdot l_2 \cdot \cos(v) + 2l_2 \cdot l_3 \times \\ &\times \cos\left(\pi - \arcsin\left(\frac{l_2}{l_3} \cdot \sin(-v)\right) - v\right). \end{aligned} \quad (30)$$

Тогда уравнение (30) задает семейство концентрических окружностей с центром $(0,0)$ и радиусами

$$Ri = \sqrt{\begin{aligned} & l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + 2l_1 \cdot l_3 \times \\ & \times \cos\left(\pi - \arcsin\left(\frac{l_2}{l_3} \cdot \sin(-v)\right)\right) + \\ & + 2l_1 \cdot l_2 \cdot \cos(v) + \\ & + 2l_2 \cdot l_3 \cdot \cos\left(\pi - \arcsin\left(\frac{l_2}{l_3} \cdot \sin(-v)\right) - v\right). \end{aligned}}$$

Огибающие этих окружностей задают границы рабочего пространства манипулятора на плоскости XU в зависимости от значений параметра w .

Для нахождения границы рабочего пространства на координатной плоскости XU в зависимости от параметра w определим дискриминанты поверхностей (рис. 6) с учетом уравнения связи (28). В точках дискриминант выполняется равенство (9), из которого получим

$$w'(l_3 \cdot \sin(w) - l_1 \cdot \sin(v)) = 0. \quad (31)$$

Решением уравнения (31) являются значения v и w : $v = 0^\circ$ и $w = 0^\circ$; $v = \pm 180^\circ$ и $w = 0^\circ$; $v = \pm 180^\circ$ и $w = \pm 180^\circ$; $w = \pm 180^\circ$ и $v = 0^\circ$

Подставляя в уравнения (27) значения параметров v и w , получим четыре окружности:

$$\begin{aligned} x &= (l_1 + l_2 + l_3) \cdot \cos(u) \\ y &= (l_1 + l_2 + l_3) \cdot \sin(u) \\ z &= z(w) = 0^\circ \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} x &= (l_1 + l_2 - l_3) \cdot \cos(u) \\ y &= (l_1 + l_2 - l_3) \cdot \sin(u) \\ z &= z(w) = 0^\circ \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} x &= (l_1 - l_2 - l_3) \cdot \cos(u) \\ y &= (l_1 - l_2 - l_3) \cdot \sin(u) \\ z &= z(w) = \pm 180^\circ \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} x &= (l_1 - l_2 + l_3) \cdot \cos(u) \\ y &= (l_1 - l_2 + l_3) \cdot \sin(u) \\ z &= z(w) = \pm 180^\circ. \end{aligned} \quad (35)$$

Выполненное отображение гиперповерхности (27) ортогональным проецированием вдоль оси Z позволило установить, что ее дискриминанта совпадает с дискриминантой гиперповерхности (3).

3. Результаты компьютерных экспериментов.

Так как обобщенные координаты в промышленных манипуляторах изменяются в определенных границах, то изложенные выше результаты применим для моделирования рабочего пространства в конкретных диапазонах изменения этих координат. Компьютерные модели выполнены по разработанным авторами алгоритмам и программам в среде САД-системы [20].

Для рассмотренной выше дискриминанты (6) гиперповерхности (3) построим модели рабочего про-

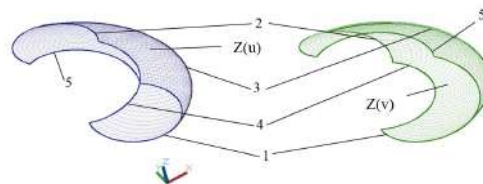


Рис. 7. Модели дискриминант U - и V -поверхностей рабочего пространства манипулятора для $w = 0^\circ$, $-80^\circ \leq u \leq 80^\circ$, $-120^\circ \leq v \leq 120^\circ$

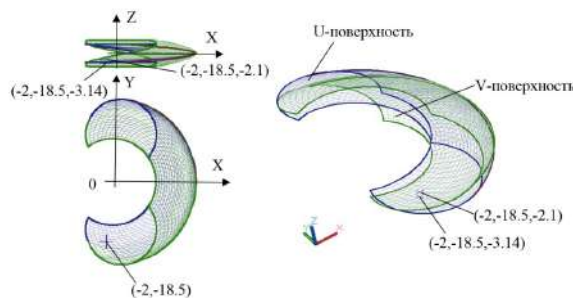


Рис. 8. Определение обобщенных координат (u, v, w) рабочего пространства на моделях дискриминант U - и V -поверхностей для $w = 0^\circ$, $-80^\circ \leq u \leq 80^\circ$, $-120^\circ \leq v \leq 120^\circ$

странства при изменении параметров u и v . Они определяются моделями двух дискриминант и представлены на рис. 7 и 8. Границами дискриминанты (6) являются дуги окружностей поз. 1–5, при этом дуге 1 соответствует параметр $v = -80^\circ$, 2 – $v = 80^\circ$, 3 – $w = 0^\circ$, 4 – $w = -120^\circ$, 5 – $w = 120^\circ$.

Для решения обратной задачи кинематики манипулятора воспользуемся предложенной геометрической интерпретацией рабочего пространства. Модели сечений гиперповерхности (3), определяющей рабочее пространство манипулятора, приведены в [19]. На горизонтальной проекции моделей дискриминант U - и V -поверхностей, задав точку 1 (рис. 8) с координатами $(x, y) = (-2; -18,5)$, получим на дискриминантах U - и V -поверхностей третью координату $z(u) = 2u \cdot \frac{3,14}{180^\circ} = -2,1$; $z(v) = 2v \cdot \frac{3,14}{180^\circ} = -3,14$; или $u = -60^\circ$, $v = -90^\circ$.

Закключение. Проведенные исследования границ рабочего пространства трехзвенного планарного манипулятора, заданного аналитическими зависимостями, позволили получить ряд новых результатов. Так, на основе предложенной геометрической трактовки этих зависимостей установлено, что рабочее пространство в плоскости манипулятора состоит из двух множеств окружностей. Одно из них представляет собой двухпараметрическое множество эксцентрических, а второе — двухпараметрическое множество концентрических окружностей. Выполненные отображения таких окружностей в четырехмерное пространство позволили получить два вида гиперповерхностей. Дискриминантами этих гиперповерхностей на две гиперплоскости являются двумерные поверхности. Получено как аналитическое описание этих поверхностей, так и их компьютерные модели. В результате определены границы рабочего пространства на плоскости механизма. Они являются дискриминантами двумерных поверхностей при их ортогональном отображении на координатную плоскость манипу-

лятора. Для решения обратной задачи кинематики манипулятора на дискриминантных поверхностях определены значения обобщенных координат в точках границ рабочего пространства манипулятора для заданных их декартовых координат.

Библиографический список

- Duka A. V. Neural network based inverse kinematics solution for trajectory tracking of a robotic arm // *Procedia Technology*. 2014. Vol. 12. P. 20–27. DOI: 10.1016/j.protcy.2013.12.451.
- Зенкевич С. Л., Ющенко А. С. Основы управления манипуляционными роботами. Москва: Изд-во МГТУ, 2004. 478 с.
- Zar T., Lin P. W., Win S. Y. Workspace Analysis of Two-link Planar Manipulator // *International Journal of Science and Engineering Applications*. 2019. Vol. 8. P. 380–383. DOI: 10.7753/IJSEA0808.1028.
- Ляшков А. А., Шевелева Т. А. Моделирование рабочего пространства планарного двухзвенного манипулятора средствами компьютерной графики // *Автоматизация в промышленности*. 2023. № 12. С. 46–50. DOI: 10.25728/avtпром.2023.12.08. EDN: ORUSIA.
- Ottaviano E., Husty M., Ceccarelli M. Identification of the Workspace Boundary of a General 3-R Manipulator // *Journal of Mechanical Design*. 2006. Vol. 128 (1). DOI: 10.1115/1.2120807.
- Ceccarelli M. A synthesis algorithm for three-revolute manipulators by using an algebraic formulation of workspace boundary // *Journal of mechanical design*. Vol. 117 (2A). P. 298–302. URL: <https://www.dmg-lib.org/dmglib/streambook/index.jsp?bookid=23666009> (дата обращения: 11.02.2024).
- Ottaviano E., Ceccarelli M., Lanni C. A Characterization of Ring Void in Workspace of Three-Revolute Manipulators // *Proceedings 10th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*. 1999. Vol. 3. P. 1039–1044.
- Burdick J. W. A Classification of 3R Regional Manipulator Singularities and Geometries // *Proceedings. 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 1991. Vol. 3. P. 2670–2675. DOI: 10.1109/ROBOT.1991.132033.
- Lanni C., Saramago S., Ceccarelli M. Optimum Design of General 3R Manipulators by Using Traditional and Random Search Optimization Techniques // *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences*. 2002. Vol. 24. P. 293–301.
- Bastien J. Description analytique complète des limites de l'espace de travail pour un manipulateur en série plan // *Comptes Rendus Mécanique*. 2018. Vol. 346. P. 13–25. DOI:10.1016/j.crme.2017.10.004.
- Goyal K., Sethi D. An analytical method to find workspace of a robotic manipulator // *Journal of Mechanical Engineering*. 2010. Vol. 41 (1). DOI: 10.3329/jme.v41i1.5359.
- Serweryouns S., Hasan D. S. Kinematic Workspace Modelling of Two Links Robotic Manipulator // *Anbar Journal of Engineering Science*. 2020. Vol. 4. P. 101–106. DOI: 10.37649/aengs.2020.171281.
- Abdel-Malek K., Yu W. Placement of Robot Manipulators to Maximize Dexterity // *International Journal of Robotics and Automation*. 2004. Vol. 19 (1). DOI: 10.2316/Journal.206.2004.1.206-2029.
- Cao Y., Qi S. P., Lu K. [et al.]. An integrated method for workspace computation of robot manipulator // *Proceedings of International Joint Conference on Computational Sciences and Optimization*. 2009. Vol. 1. P. 309–312. DOI:10.1109/CSO.2009.161.
- Cao Y., Zang H., Wu L., Lu T. An engineering oriented method for the three dimensional workspace generation of robot manipulator // *Journal of Information and Computational Science*. 2011. Vol. 8, no. 1. P. 51–61.
- Cao Y., Lu K., Zang Y. Accurate Numerical Methods for Computing 2D and 3D Robot Workspace // *International Journal of Advanced Robotic Systems*. Vol. 8, Issue 6. 2011. DOI: 10.5772/45686.
- Guo W. Z., Gao F., Mekid S. A new analysis of workspace performances and orientation capability for 3-dof planar manipulators // *International Journal of Robotics and Automation*. 2010. Vol. 25, № 2. P. 89–101. DOI: 10.2316/Journal.206.2010.2.206-3326.
- Thom R. Sur la theorie des envelopes // *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. 1962. Vol. 41, № 2. P. 177–192.
- Ляшков А. А., Шевелева Т. А. Моделирование рабочего пространства планарного двухзвенного манипулятора средствами компьютерной графики // *Онтология проектирования*. 2024. Т. 14, № 1. С. 71–81. DOI: 10.18287/2223-9537-2024-14-1-71-81.
- Ляшков А. А., Шевелева Т. А. Программа компьютерного моделирования трехмерной гиперповерхности, являющейся моделью рабочего пространства плоского трёхзвенного механизма: программа для ЭВМ. Москва: ФИПС, 2022. № 2022685586.

ШЕВЕЛЕВА Татьяна Анатольевна, аспирант кафедры «Инженерная геометрия и САПР» Омского государственного технического университета (ОмГТУ), г. Омск.

SPIN-код: 5059-6717

ORCID: 0009-0002-2577-8348

Адрес для переписки: tatyana0781@mail.ru

ЛЯШКОВ Алексей Ануфриевич, доктор технических наук, доцент (Россия), профессор кафедры «Инженерная геометрия и САПР» ОмГТУ, г. Омск.

SPIN-код: 2377-7912

ORCID: 0000-0003-0100-8584

AuthorID (SCOPUS): 55237710400

ResearcherID: C-2426-2017

Адрес для переписки 3dogibmod@mail.ru

Для цитирования

Шевелева Т. А., Ляшков А. А. Моделирование границ рабочего пространства планарного трёхзвенного манипулятора // *Омский научный вестник*. 2024. № 3 (191). С. 73–81. DOI: 10.25206/1813-8225-2024-191-73-81.

Статья поступила в редакцию 14.05.2024 г.

© Т. А. Шевелева, А. А. Ляшков

MODELING THE BOUNDARIES OF THE WORKING SPACE OF A PLANAR THREE-LINK MANIPULATOR

A study of the boundaries of the working space of a three-link planar manipulator, specified by analytical equations, is carried out. A new geometric interpretation of these samples is proposed. On its basis, it is established that outer space consists of two-parameter volumes of eccentric and concentric circles. When transforming such environments into four-dimensional space, two types of hypersurfaces are obtained, which represent a geometric model of the manipulator's workspace. The discriminants of these hypersurfaces on the hyperplane are two two-dimensional surfaces. Both an analytical description of these surfaces and their computer models are obtained. As a result, it is established that the boundaries of the working space on the plane of the mechanism are the discriminants of such surfaces. To confirm the reliability of the results obtained, as an example, an inverse kinematics problem is solved on discriminant surfaces — the values of generalized coordinates at the boundary points of the manipulator's workspace are determined for their given Cartesian coordinates.

Keywords: geometric modeling, computer model, manipulator, gripper center, manipulator workspace, hypersurface, discriminant, three-link planar manipulator.

References

1. Duka A. V. Neural network based inverse kinematics solution for trajectory tracking of a robotic arm // *Procedia Technology*. 2014. Vol. 12. P. 20–27. DOI: 10.1016/j.protcy.2013.12.451. (In Engl.).
2. Zenkevich S. L., Yushchenko A. S. *Osnovy upravleniya manipulyatsionnymi robotami [Fundamentals of manipulative robot control]*. Moscow, 2004. 478 p. (In Russ.).
3. Zar T., Lin P. W., Win S. Y. Workspace Analysis of Two-link Planar Manipulator // *International Journal of Science and Engineering Applications*. 2019. Vol. 8. P. 380–383. DOI: 10.7753/IJSEA0808.1028. (In Engl.).
4. Lyashkov A. A., Sheveleva T. A. Modelirovaniye rabocheho prostranstva planarnogo dvukhzvennogo manipulyatora sredstvami komp'yuternoy grafiki [Modeling the workspace of a three-link planar manipulator] // *Avtomatizatsiya v promyshlennosti. Automation in Industry*. 2023. No. 12. P. 46–50. DOI: 10.25728/avtprom.2023.12.08. EDN: ORUSIA. (In Russ.).
5. Ottaviano E., Husty M., Ceccarelli M. Identification of the Workspace Boundary of a General 3-R Manipulator // *Journal of Mechanical Design*. 2006. Vol. 128 (1). DOI: 10.1115/1.2120807. (In Engl.).
6. Ceccarelli M. A synthesis algorithm for three-revolute manipulators by using an algebraic formulation of workspace boundary // *Journal of mechanical design*. Vol. 117 (2A). P. 298–302. URL: <https://www.dmg-lib.org/dmglib/streambook/index.jsp?bookid=23666009> (accessed: 11.02.2024). (In Engl.).
7. Ottaviano E., Ceccarelli M., Lanni C. A Characterization of Ring Void in Workspace of Three-Revolute Manipulators // *Proceedings 10th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*. 1999. Vol. 3. P. 1039–1044. (In Engl.).
8. Burdick J. W. A Classification of 3R Regional Manipulator Singularities and Geometries // *Proceedings. 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 1991. Vol. 3. P. 2670–2675. DOI: 10.1109/ROBOT.1991.132033. (In Engl.).
9. Lanni C., Saramago S., Ceccarelli M. Optimum Design of General 3R Manipulators by Using Traditional and Random Search Optimization Techniques // *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences*. 2002. Vol. 24. P. 293–301. (In Engl.).
10. Bastien J. Description analytique complète des limites de l'espace de travail pour un manipulateur en série plan // *Comptes Rendus Mécanique*. 2018. Vol. 346. P. 13–25. DOI:10.1016/j.crme.2017.10.004. (In Engl.).
11. Goyal K., Sethi D. An analytical method to find workspace of a robotic manipulator // *Journal of Mechanical Engineering*. 2010. Vol. 41 (1). DOI: 10.3329/jme.v41i1.5359. (In Engl.).
12. Serveryouns S., Hasan D. S. Kinematic Workspace Modelling of Two Links Robotic Manipulator // *Anbar Journal of Engineering Science*. 2020. Vol. 4. P. 101–106. DOI: 10.37649/aengs.2020.171281. (In Engl.).
13. Abdel-Malek K., Yu W. Placement of Robot Manipulators to Maximize Dexterity // *International Journal of Robotics and Automation*. 2004. Vol. 19 (1). DOI: 10.2316/Journal.206.2004.1.206-2029. (In Engl.).
14. Cao Y., Qi S. P., Lu K. [et al.]. An integrated method for workspace computation of robot manipulator // *Proceedings of International Joint Conference on Computational Sciences and Optimization*. 2009. Vol. 1. P. 309–312. DOI: 10.1109/CSO.2009.161. (In Engl.).
15. Cao Y., Zang H., Wu L., Lu T. An engineering oriented method for the three dimensional workspace generation of robot manipulator // *Journal of Information and Computational Science*. 2011. Vol. 8, no. 1. P. 51–61. (In Engl.).

16. Cao Y., Lu K., Zang Y. Accurate Numerical Methods for Computing 2D and 3D Robot Workspace // International Journal of Advanced Robotic Systems. 2011. Vol. 8, Issue 6. DOI: 10.5772/45686. (In Engl.).

17. Guo W. Z., Gao F., Mekid S. A new analysis of workspace performances and orientation capability for 3-DOF planar manipulators // International Journal of Robotics and Automation. 2010. Vol. 25, no. 2. P. 89–101. DOI: 10.2316/Journal.206.2010.2.206-3326. (In Engl.).

18. Thom R. Sur la theorie des envelopes // Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 1962. Vol. 41, no. 2. P. 177–192. (In Engl.).

19. Lyashkov A. A., Sheveleva T. A. Modelirovaniye rabochego prostranstva planarnogo dvukhzvennogo manipulyatora sredstvami komp'yuternoy grafiki [Modeling the workspace of a three-link planar manipulator] // Ontologiya proyektirovaniya. *Ontology of Designing*. 2024. Vol. 14, no. 1. P. 71–81. DOI: 10.18287/2223-9537-2024-14-1-71-81. (In Russ.).

20. Lyashkov A. A., Sheveleva T. A. Programma komp'yuternogo modelirovaniya trekhmernoy giperpoverkhnosti, yavlyayushcheyasya model'yu rabochego prostranstva ploskogo trakhzvennogo mekhanizma [A program for computer modeling of a three-dimensional hypersurface, which is a model of the working space of a flat three-link mechanism]. Moscow, 2022. No. 2022685586. (In Russ.).

SHEVELEVA Tatyana Anatolyevna, Graduate Student of Engineering Geometry and CAD Department, Omsk State Technical University (OmSTU), Omsk.

SPIN-code: 5059-6717

ORCID: 0009-0002-2577-8348

Correspondence address: tatyana0781@mail.ru

LYASHKOV Aleksey Anufriyevich, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Professor of Engineering Geometry and CAD Department, OmSTU, Omsk.

SPIN-code: 2377-7912

ORCID: 0000-0003-0100-8584

AuthorID (SCOPUS): 55237710400

ResearcherID: C-2426-2017

Correspondence address: dogibmod@mail.ru

For citations

Sheveleva T. A., Lyashkov A. A. Modeling the boundaries of the working space of a planar three-link manipulator // Omsk Scientific Bulletin. 2024. No. 3 (191). P. 73–81. DOI: 10.25206/1813-8225-2024-191-73-81.

Received May 14, 2024.

© T. A. Sheveleva, A. A. Lyashkov