

## ГЕНЕРАТОР ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

В статье проведен анализ существующих схем генераторов хаоса. Проведено численное и имитационное моделирование, направленное на выявление хаотической динамики. На основании известных концепций разработан генератор хаоса и построена имитационная модель. Дано математическое описание генератора и получены фазовые портреты. Представлены диаграммы хаотических колебаний модели Лоренца и модели Колпитца. Рассмотрена работа генератора Ван дер Поля и показаны хаотические процессы, возникающие при внешних гармонических колебаниях. Приведена модель Чуа, дано ее математическое описание и представлен анализ колебаний в режиме детерминированного хаоса.

**Ключевые слова:** хаос, генераторы хаоса, хаотические колебания, аттрактор, динамическая система, дифференциальные уравнения, фазовый портрет.

**I. Введение.** В современном мире, где стремительно развивается наука и технологии, генераторы хаоса играют значительную роль. Они помогают изучать и понимать сложные хаотические процессы, которые ранее были неизвестны или трудно изучаемы. Генераторы хаоса — это устройства, способные генерировать непредсказуемые, сложные и случайные последовательности. Это свойство позволяет исследователям использовать их для изучения и моделирования различных процессов. Они нашли применение во многих областях науки и технологий, таких как физика, математика, медицина, биология, криптография, инженерия и многих других.

Генераторы хаоса являются незаменимыми инструментами в области физики. Они применяются в изучении динамических систем, где предсказание будущего состояния этих систем сложно и требует сложных математических моделей. Например, в хаотических колебательных системах генераторы хаоса используются для моделирования и предсказания хаотической динамики. В таком случае это дает исследователям возможность понять, как физические параметры влияют на эти системы и как можно управлять ими. Это важно, например, для определения стабильности и надежности сложных технических систем, таких как энергетические сети или системы автоматического управления [1].

**II. Цель исследования.** Провести анализ существующих схем генераторов хаоса, провести численное и имитационное моделирование, направленное на выявление хаотической динамики. На основании известных концепций разработать схему и построить имитационную модель генератора хаотических колебаний. Представить математическое описание генератора и получить результаты численного решения уравнений.

**III. Теоретические исследования.** Рассмотрим известные реализации генераторов. Одним из наиболее интересных исследований в области изуче-

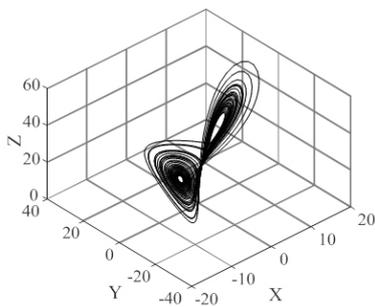
ния динамических систем является анализ математического аттрактора Лоренца. Данный аттрактор был впервые представлен американским математиком Эдвардом Лоренцем в 1963 году и считается одним из фундаментальных применений динамических систем в метеорологии и физике. Аттрактор Лоренца представляется в трехмерном пространстве и описывается системой дифференциальных уравнений (1) [2].

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - \beta z \end{cases} \quad (1)$$

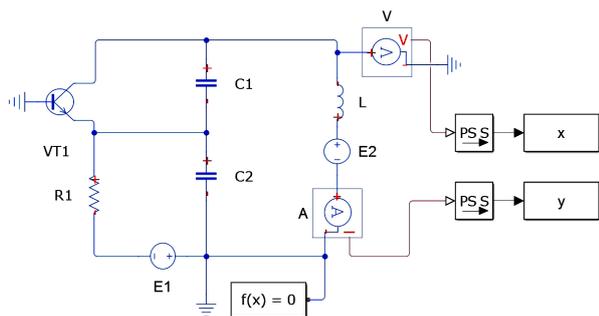
Эта система моделирует конвекционные потоки, которые могут возникать в атмосфере или других физических системах. Основная задача состоит в анализе динамики этой системы и исследовании поведения аттрактора Лоренца в разных условиях. Одним из примеров, иллюстрирующих аттрактор Лоренца, является изменение температуры воздуха в атмосфере.

Решим систему (1) и получим аттрактор в трехмерном пространстве.

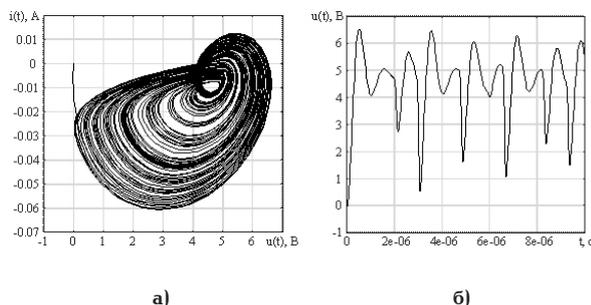
Таким образом, аттрактор Лоренца представляет компактное инвариантное множество в трехмерном фазовом пространстве (рис. 1), описывающий хаотическое поведение системы. В фазовом пространстве видна закрученная структура траекторий и внутри выделены две области. Система может находиться в каждой области в любой момент времени, а переход между ними непредсказуем и не зависит от времени. Эта система представляет большой интерес для математиков, физиков и метеорологов, так как она моделирует некоторые аспекты атмос-



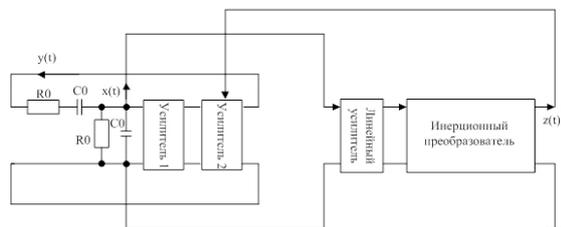
**Рис. 1. Аттрактор Лоренца в трехмерном пространстве. Результаты численного моделирования**



**Рис. 2. Реализация имитационной модели генератора Колпитца**



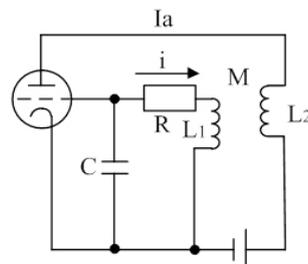
**Рис. 3. Фазовый портрет (а) и напряжение на коллекторе транзистора (б)**



**Рис. 4. Схема генератора Анищенко-Астахова**

ферных явлений и может помочь в изучении хаотических процессов в природе.

Рассмотрим и приведем электрические схемы, которые обладают хаотической динамикой. Начнем обзор со схемы генератора Колпитца. Достоинство генератора заключается в его простой схемной реализации. Схема Колпитца позволяет генерировать



**Рис. 5. Схема генератора Ван дер Поля**

высокочастотные сигналы синусоидальной формы. Однако при определенных величинах активных и реактивных элементов в схеме возникают хаотические колебания. Составим имитационную модель генератора и проведем исследования ее работы. Имитационная модель генератора представлена на рис. 2 [3].

Схема генератора Колпитца состоит из трех основных элементов: катушки индуктивности, конденсаторов и биполярного транзистора. Хаотические колебания возникают при величинах  $C_1 = C_2 = 5$  нФ,  $L = 10$  мкГн,  $R_1 = 400$  Ом,  $E_1 = E_2 = 5$  В. Осциллограмма напряжения, снятая с коллектора транзистора, и фазовый портрет представлены на рис. 3.

Генератор демонстрирует хаотическое поведение при определенных указанных параметрах. Сложные хаотические колебания образуют странный аттрактор в фазовом пространстве. Таким образом, генератор Колпитца широко используется для радиочастотных сигналов. Генератор работает в разных диапазонах частот и подходит для изучения хаотических колебаний.

Рассмотрим генератор Анищенко-Астахова, который показан на рис. 4. Он состоит из осциллятора Микельсена и элемента инерции, и демонстрирует свойства хаотической динамики. Эти свойства позволяют ему генерировать сигналы с высокой степенью случайности и непредсказуемости. Одним из главных преимуществ данного генератора является его стабильность при изменении температуры. В отличие от других аналогичных систем, генератор Анищенко-Астахова сохраняет высокую стабильность своего сигнала даже при значительных колебаниях окружающей среды [4].

Благодаря своей хаотической динамике, генератор Анищенко-Астахова успешно применяется в различных областях. Он может использоваться в системах шифрования информации или рандомизации данных, где случайность и непредсказуемость сигнала являются важными аспектами. Также этот генератор может быть использован в системах передачи радиосигналов.

Проведем исследования генератора, который был изобретен голландским инженером-физиком Бальтазаром Ван дер Полем. Он предложил осциллятор с нелинейным затуханием. Им были зафиксированы на определенных частотах шумы вблизи собственных частот колебаний, они достигались путем введения нелинейного и инерционного активного сопротивления. Классический осциллятор Ван дер Поля — генератор с дополнительной нелинейной инерционной обратной связью показан на рис. 5. Опишем уравнения генератора. В них присутствуют два параметра: параметр инерцион-

ности нелинейного преобразователя и параметр сигнала. Значение параметра инерционности определяет характер генерируемых сигналов. При небольшом значении данного параметра генератор создает простые сигналы, имеющие регулярную структуру. При увеличении значения параметра инерционности сигналы становятся все более сложными и хаотичными [5].

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = m \cdot x + y - x \cdot z \\ \frac{dy}{dt} = -x \\ \frac{dz}{dt} = -g \cdot z + g \cdot I(x) \cdot x^2 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{где } I(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Добавим в схему источник вынужденных колебаний и решим систему.

Осциллятор с вынужденными колебаниями описывается следующим уравнением [6]

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x - A_m \cdot \sin(\omega t) = 0 \quad (3)$$

Решим уравнение (2) и покажем работу генератора с вынужденными колебаниями и без них (рис. 6).

В процессе решения уравнения использовались следующие коэффициенты:  $\mu = 3$ ,  $A_m = 20$ ,  $\omega = 4,5$ . Время расчета составило 100 сек с шагом  $\Delta t = 0,01$  сек. Модель позволяет получить динамический хаос в случаях, когда значение параметра инерционности превышает единицу. Таким образом, можно расширить спектр сгенерированных сигналов и получить более широкие возможности по управлению их структурой.

Приведем схему генератора Чуа (рис. 7). Это электронное устройство, которое может генерировать хаотические колебания. Он основан на операционном усилителе и включает в себя ёмкости, индуктивности.

Математическая модель генератора Чуа может быть описана системой дифференциальных уравнений [7]:

$$\begin{cases} \frac{dU_c}{dt} = \alpha(U_b - U_c - f(U_c)) \\ \frac{dU_b}{dt} = U_c - U_b + U_d \\ \frac{dU_d}{dt} = -\beta \cdot U_b \end{cases} \quad (4)$$

Здесь  $U_c$ ,  $U_b$  и  $U_d$  представляют собой напряжения на ёмкости, индуктивности и внешнем элементе соответственно. Параметры  $\alpha$  и  $\beta$  определяют характеристики генератора Чуа.

Принцип работы генератора Чуа основан на нелинейной крутопадающей характеристике с отрицательным дифференциальным сопротивлением. При определенных значениях параметров  $\alpha$  и  $\beta$  на выходе генератора Чуа появляются хаотические колебания высокой частоты. Генератор представляет собой трехмерную динамическую систему с возможностью генерации сигналов разной слож-

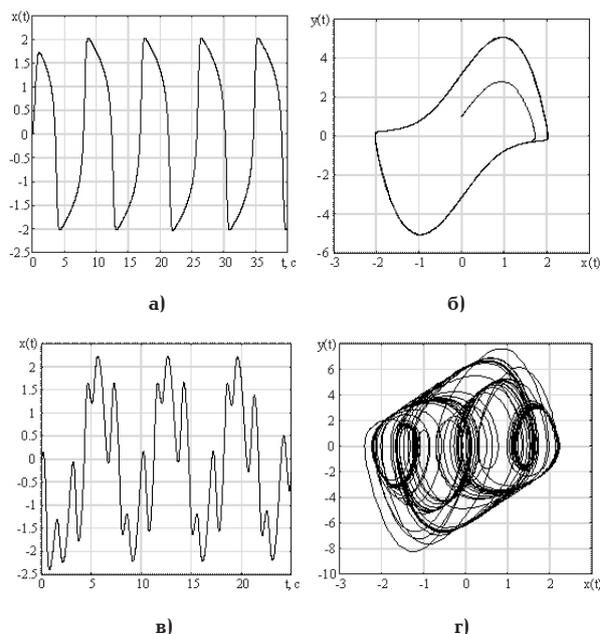


Рис. 6. Демонстрация работы генератора с помощью численного решения уравнения (2): а) диаграмма колебаний без вынужденных колебаний; б) фазовый портрет для случая без вынужденных колебаний; в), г) диаграмма и фазовый портрет для случая с вынужденными колебаниями

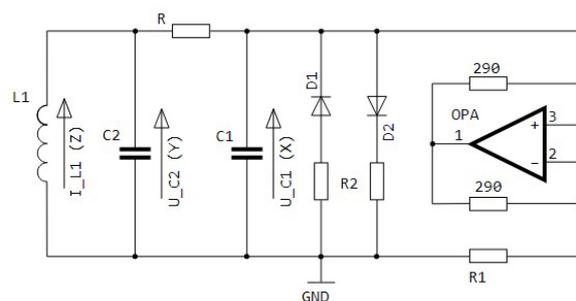


Рис. 7. Генератор Чуа

ности и хаотичности. Когда напряжение подается на конденсаторы и катушку индуктивности, возникает неустойчивость и начинаются хаотические колебания. Нелинейный резистор с отрицательным сопротивлением и крутопадающей характеристикой усиливает эту неустойчивость и делает колебания более сложными.

Он имеет свои преимущества и недостатки, которые можно учитывать при разработке систем связи и контроля. Генератор Чуа является одной из наиболее известных электронных цепей, применяемых для создания хаотических колебаний. Схема была предложена Леоном Чуа в 1983 году и быстро стала популярной среди исследователей и электронных инженеров.

Генератор Чуа также обладает свойством самоподобия, т.е. структура и форма сигналов повторяются на разных временных и пространственных масштабах. Это свойство позволяет использовать генератор Чуа в симуляции хаотических систем и анализе динамических систем. Его сложное и хаотичное поведение находит применение в разных областях и может сыграть важную роль в развитии науки и технологий.

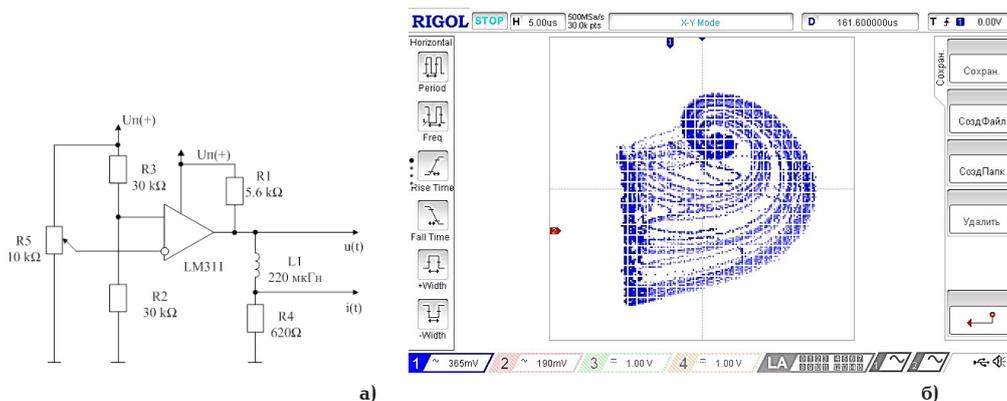


Рис. 8. Принципиальная схема разработанного генератора (а) и фазовый портрет хаотических колебаний, полученный в ходе экспериментов (б)

**IV. Разработка генератора хаотических колебаний.** Исходя из сравнительного анализа приведённых схем и моделей, была разработана математическая и физическая модель генератора хаотических колебаний, основанного на сравнении двух сигналов [8]. В качестве элемента сравнения использован аналоговый компаратор. На рис. 8 представлена принципиальная схема генератора и фазовый портрет хаотических колебаний.

На выход аналогового компаратора подключена активно-индуктивная нагрузка, что позволяет осуществить сглаживание импульсов выходного тока. Хаотическая генерация возникает в момент равенства входных сигналов постоянного напряжения. Предположительно это вызвано действием тепловых шумов, которые усиливаются микросхемой.

Составим математическое описание предложенной схемы и покажем результаты вычислений. Разработаем математическую модель, описывающую динамику рассматриваемого процесса с указанным предположением. Флуктуации теплового шума, действующие на входе компаратора, можно записать с помощью выражения:

$$y(t) = G(t) \cdot k |A_{m1} \cdot \sin(\omega t + \varphi_1)| + A_{m2} \cdot \sin(\omega t + \varphi_2) + m, \quad (5)$$

где  $G(t)$  — белый гауссовский шум,  $k$  — масштабный коэффициент,  $m$  — постоянная составляющая сигнала.

Выходное напряжение компаратора найдем следующим образом:

$$U_{\text{вых}} = \begin{cases} 1, & y(t) > x \\ 0, & y(t) < x \end{cases}, \quad (6)$$

где  $x$  — порог срабатывания.

Воспользуемся приведенными выражениями, составим имитационную модель и продемонстрируем ее работу. На рис. 9 показана модель и диаграмма сигнала с выхода компаратора.

Из рис. 9 видно, что выходной сигнал имеет одинаковую амплитуду во всем диапазоне временного промежутка, однако частота этого сигнала изменяется хаотическим образом. Для сглаживания импульсного выходного сигнала и получения изображения фазового портрета в виде странного аттрактора добавим в модель активные и реактивные компоненты. Завершенная модель разработанного генератора показана на рис. 10.

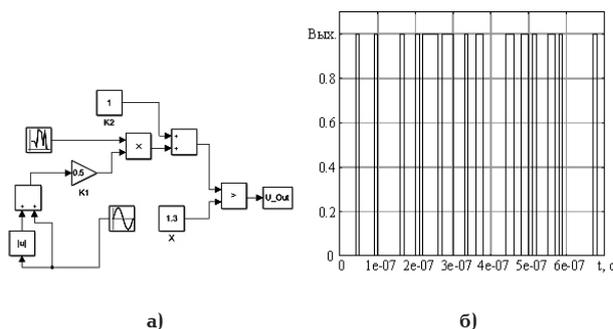


Рис. 9. Имитационная модель (а) и сигнал на выходе элемента сравнения (б)

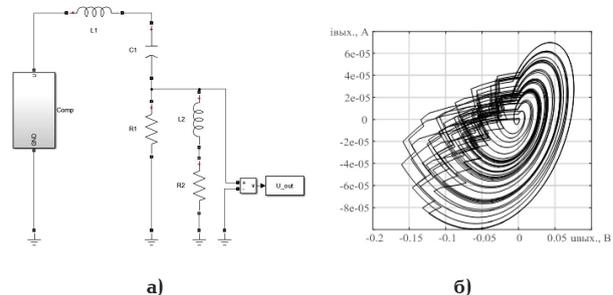


Рис. 10. Модель генератора (а) и фазовый портрет (б)

Форма фазового портрета, полученного на физической модели, и форма фазового портрета, полученного с помощью имитационной модели, практически совпадают. Это подтверждает предположение о том, что тепловой шум приводит к переключению состояния компаратора и таким образом усиливается. В таком случае на выходе микросхемы генерируются близкий к прямоугольной форме выходной частоте сигнала источника теплового шума [9, 10]. Колебания получены при  $L1 = 2 \text{ мкГн}$ ,  $C1 = 40 \text{ нФ}$ ,  $R1 = 6 \text{ Ом}$ ,  $L2 = 220 \text{ мкГн}$ ,  $R2 = 620 \text{ Ом}$ .

**V. Вывод.** Предложен генератор хаотических колебаний на аналоговом компараторе. Генератор способен формировать хаотические колебания в широкой полосе частот. Форма фазового портрета имеет один завиток и схожа со странным аттрактором, полученным с помощью схемы Колпитца. В разработанном генераторе причиной хаотических колебаний предположительно является тепловой шум, усиливающийся компаратором. По резуль-

татам эксперимента составлена имитационная модель, которая включает в себя источник теплового шума, образованный гауссовским распределением. Хаотические колебания возникают в случае, если величина теплового шума будет больше порогового значения компаратора. Такой генератор найдет свое применение в устройствах генерирования широкополосных хаотических сигналов [11]. Таким образом, генераторы хаотических колебаний являются важной частью современных систем. Они представляют собой устройства, способные создавать электрические сигналы определенной формы и частоты.

#### Библиографический список

1. Кузнецов С. П. Простые электронные генераторы хаоса и их схемотехническое моделирование // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 3. С. 35–61. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-3-35-61. EDN: RWBUFH.
2. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic Flow // Journal of the Atmospheric Sciences. 1963. Vol. 20. P. 130–141. DOI: 10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2.
3. Colpitts E. H. Oscillation generator. US patent 1624537; filed February 01st, 1918; published April 12th, 1927.
4. Анищенко В. С., Астахов В. С., Вадивасова Т. Е. Генератор Анищенко-Астахова как одна из базовых моделей детерминированного хаоса // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2005. Т. 5, № 1. С. 54–68. EDN: JVHXIV.
5. Balth Van der Pol. On relaxation-oscillations // Philosophical Magazine and Journal of Science. 1926. Vol. 2 (11). P. 978–992. DOI: 10.1080/14786442608564127.
6. Hartley R. V. L. Oscillation-generator. US patent 1356763; filed June 01st, 1915; published October 26th, 1920.
7. Chua L. O., Komuro M., Matsumoto T. The double scroll family // IEEE Transactions on Circuits & Systems. 1986. Vol. 33 (11). P. 1072–1118. DOI: 10.1109/TCS.1986.1085869.
8. Федянин В. В., Федоров В. К., Пестрикова И. Е. [и др.]. Программа реализации генератора хаоса на компараторе: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Москва: ФИПС, 2024. № 2024615852.
9. Аношенкова Е. В., Захаров И. Л., Пестрикова И. Е. Моделирование беспорядочных процессов в нелинейных элек-

тронных цепях с несколькими генераторами // Омский научный вестник. 2016. № 6 (150). С. 105–108. EDN: XBVXQZ.

10. Федянин В. В., Федоров В. К., Федоров Д. В. [и др.] Трехфазные режимы частотно-регулируемого асинхронного электропривода при широтно-импульсной модуляции с несущей частотой в режиме детерминированного хаоса // Динамика систем, механизмов и машин. 2018. Т. 6, № 3. С. 114–119. DOI: 10.25206/2310-9793-2018-6-3-114-119.

11. Федоров В. К., Пестрикова И. Е., Федоров И. В. [и др.] Максимальная энтропия и принцип наименьшего действия для электротехнических систем в режиме детерминированного хаоса // Измерение. Мониторинг. Управление. Контроль. 2021. № 2 (36). С. 5–14. DOI: 10.21685/2307-5538-2021-2-1.

**ФЕДЯНИН Виктор Викторович**, кандидат технических наук, доцент кафедры «Электрическая техника» Омского государственного технического университета (ОмГТУ), г. Омск.

SPIN-код: 1728-1697

ORCID: 0000-0003-3126-9865

AuthorID (SCOPUS): 57194235343

ResearcherID: O-9899-2015

Адрес для переписки: k13201@rambler.ru

**ФЕДОРОВ Владимир Кузьмич**, доктор технических наук, профессор (Россия), профессор кафедры «Электроснабжение промышленных предприятий» ОмГТУ, г. Омск.

SPIN-код: 2389-6978

AuthorID (РИНЦ): 512746

AuthorID (SCOPUS): 57194237212

**ПЕСТРИКОВА Ирина Евгеньевна**, ассистент кафедры «Электрическая техника» ОмГТУ, г. Омск.

SPIN-код: 7948-8208

AuthorID (РИНЦ): 622404

Адрес для переписки: pik9@yandex.ru

#### Для цитирования

Федянин В. В., Федоров В. К., Пестрикова И. Е. Генератор хаотических колебаний // Омский научный вестник. 2024. № 3 (191). С. 93–98. DOI: 10.25206/1813-8225-2024-191-93-98.

Статья поступила в редакцию 17.04.2024 г.

© В. В. Федянин, В. К. Федоров, И. Е. Пестрикова

## CHAOTIC OSCILLATION GENERATOR

The article analyzes existing schemes of chaos generators. Numerical and simulation modeling is carried out aimed at identifying chaotic dynamics. Based on well-known concepts, a chaos generator is developed and a simulation model is built. A mathematical description of the generator is given and phase portraits are obtained. Diagrams of chaotic oscillations of the Lorentz model and the Colpitts model are presented. The operation of the Van der Pol generator is considered and the chaotic processes that arise during external harmonic oscillations are shown. Chua's model is presented, its mathematical description is given, and an analysis of oscillations in the deterministic chaos regime is presented.

**Keywords:** chaos, chaos generators, chaotic oscillations, attractor, dynamic system, differential equations, phase portrait.

### References

1. Kuznetsov S. P. Prostyye elektronnyye generatory khaosa i ikh skhemotekhnicheskoye modelirovaniye [Simple electronic chaos generators and their circuit simulation] // *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Prikladnaya nelineynaya dinamika. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. 2018. Vol. 26, no. 3. P. 35–61. DOI: 10.18500/0869-6632-2018-26-3-35-61. EDN: RWBUFH. (In Russ.).
2. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic Flow // *Journal of the Atmospheric Sciences*. 1963. Vol. 20. P. 130–141. DOI: 10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2. (In Engl.).
3. Colpitts E. H. Oscillation generator. US patent 1624537; filed February 01st, 1918; published April 12th, 1927. (In Engl.).
4. Anishchenko V. S., Astakhov V. S., Vadivasova T. E. Generator Anishchenko-Astakhova kak odna iz bazovykh modeley determinirovannogo khaosa [Anishchenko-Astakhov generator as one of the basic models of deterministic chaos] // *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Fizika. Izvestiya of Saratov University. Physics*. 2005. Vol. 5, no. 1. P. 54–68. EDN: JVHXIV. (In Russ.).
5. Balth Van der Pol. On relaxation-oscillations // *Philosophical Magazine and Journal of Science*. 1926. Vol. 2 (11). P. 978–992. DOI: 10.1080/14786442608564127. (In Engl.).
6. Hartley R. V. L. Oscillation-generator. US patent 1356763; filed June 01st, 1915; published October 26th, 1920. (In Engl.).
7. Chua L. O., Komuro M., Matsumoto T. The double scroll family // *IEEE Transactions on Circuits & Systems*. 1986. Vol. 33 (11). P. 1072–1118. DOI: 10.1109/TCS.1986.1085869. (In Engl.).
8. Fedyanin V. V., Fedorov V. K., Pestrikova I. E. [et al.]. Programma realizatsii generatora khaosa na komparatore: svidetel'stvo o gosudarstvennoy registratsii programmy dlya EVM [Program of realization of the chaos generator on the comparator: certificate of state registration of the computer program]. Moscow, 2024. No. 2024615852. (In Russ.).
9. Anoshenkova E. V., Zakharov I. L., Pestrikova I. E. Modelirovaniye besporядochnykh protsessov v nelineynykh elektronnykh tsepyakh s neskol'kimi generatorami [Modeling of chaotic processes in nonlinear electronic circuits with multiple generators] // *Omskiy nauchnyy vestnik. Omsk Scientific Bulletin*. 2016. No. 6 (150). P. 105–108. EDN: XBVBXQZ. (In Russ.).
10. Fedyanin V. V., Fedorov V. K., Fedorov D. V. [et al.]. Trekhfaznyye rezhimy chastotno-reguliruyemogo asinkhronnogo elektroprivoda pri shirotno-impul'snoy modulyatsii s nesushchey chastotoy v rezhime determinirovannogo khaosa [Three-phase modes of frequency-controlled asynchronous electric drive under pulse-width modulation with carrier frequency in the deterministic chaos mode] // *Dinamika sistem, mekhanizmov i mashin. Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines*. 2018. Vol. 6, no. 3. P. 114–119. DOI: 10.25206/2310-9793-2018-6-3-114-119. (In Russ.).
11. Fedorov V. K., Pestrikova I. E., Fedorov I. V. [et al.]. Maksimal'naya entropiya i printsip naimen'shego deystviya dlya elektrotekhnicheskikh sistem v rezhime determinirovannogo khaosa [Maximum entropy and the principle of least action for electrical systems in the mode of deterministic chaos] // *Izmereniye. Monitoring. Upravleniye. Kontrol'. Measuring. Monitoring. Management. Control*. 2021. No. 2 (36). P. 5–14. DOI: 10.21685/2307-5538-2021-2-1. (In Russ.).

**FEDYANIN Viktor Viktorovich**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of Electrical Engineering Department, Omsk State Technical University (OmSTU), Omsk.  
SPIN-code: 1728-1697  
ORCID: 0000-0003-3126-9865  
AuthorID (SCOPUS): 57194235343  
ResearcherID: O-9899-2015  
Correspondence address: k13201@rambler.ru

**FEDOROV Vladimir Kuzmich**, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of Electrical Supply of Industrial Enterprises Department, OmSTU, Omsk.  
SPIN-code: 2389-6978  
AuthorID (RSCI): 512746  
AuthorID (SCOPUS): 57194237212

**PESTRIKOVA Irina Evgenyevna**, Assistant of Electrical Engineering Department, OmSTU, Omsk.  
SPIN-code: 7948-8208  
AuthorID (RSCI): 622404  
Correspondence address: pik9@yandex.ru

### For citations

Fedyanin V. V., Fedorov V. K., Pestrikova I. E. Chaotic oscillation generator // *Omsk Scientific Bulletin*. 2024. No. 3 (191). P. 93–98. DOI: 10.25206/1813-8225-2024-191-93-98.

Received April 17, 2024.

© V. V. Fedyanin, V. K. Fedorov, I. E. Pestrikova