УДК514.1:519.6
DOI: 10.25206/1813-8225-2024-192-29-34
EDN: ORIVTV

В. Ю. ЮРКОВ

Омский государственный
технический университет,
г. Омск

ИНТЕРВАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА В ИНЖЕНЕРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Описывается конструктивный подход к геометрическому моделированию интервальных множеств многомерного пространства. Под интервальными множествами понимаются линейные множества *k*-плоскостей с неопределенными, интервальными параметрами. Рассматривается задание таких множеств интервальным базисом, под которым понимается базис с неопределенностью координат вершин базисного *k*-симплекса. Геометрические модели таких множеств имеют комбинаторную структуру в виде областей пространства, ограниченных кусочно-линейными гиперповерхностями. Аналитические модели строятся в виде систем интервальных уравнений или в виде систем уравнений и интервальными параметрами. Каждое интервальное множество описывается интервальной функцией, связывающее параметры множества. Множество интервальных функций образует область в пространстве параметров. Анализ взаимного положения областей для нескольких интервальных множеств позволяет судить об их взаимном положении в пространстве. Описанный подход может быть применен к решению ряда теоретических и прикладных задач инженерной геометрии, примеры которых приведены. Теоретический материал статьи иллюстрируется интервальными множествами прямых, некоторые свойства которых описываются аналитически.

Ключевые слова: геометрическая модель, интервальное множество, параметрическое задание, *k*-плоскость, кусочно-линейная структура, интервальный параметр, гиперплоскость.

Введение. Геометрическое моделирование, анализ, синтез и оптимизация систем в условиях неопределенности является одной из основных задач современной инженерной геометрии. Важную роль в решении этих задач играет интервальная математика, позволяющая учитывать естественную неопределенность, свойственную многим реальным системам. Как самостоятельный раздел математики интервальная математика возникла достаточно давно [1, 2]. В настоящее время теоретические направления её развития заключаются в исследовании интервальных функций [3, 4], разрешимости интервальных уравнений и систем уравнений [5, 6], разработке интервальных подходов к обработке экспериментальных данных [7, 8] и др.

Началу геометрического направления теоретической интервальной математики, видимо, было положено Ю. Г. Стояном в 2006 г. В дальнейшем теоретические разработки его школы послужили основой для решения прикладных геометрических задач размещения, упаковки, раскройки и др. Тогда же были введены понятия интервальной прямой, интервальной плоскости, ..., интервального пространства. В настоящее время развитие этого направления инженерной геометрии приостановилось, вероятно, из-за отсутствия в России соответствующей научной школы. Такая оценка косвенно подтверждается отсутствием опубликованных научных работ данного геометрического направления. Близкие по направлению исследования [9–14].

Целью настоящей работы является исследование линейных интервальных геометрических множеств k-плоскостей на основе интервальной арифметики с уклоном в геометрическое моделирование систем. Часто встречаются случаи, когда стандартные методы моделирования не являются удовлетворительными из-за сложной структуры и неопределенности факторов и параметров [15]. В связи с этим в настоящее время развиваются и широко используются методы интервального моделирования и интервального анализа сложных систем [16–19]. Однако изучаются в основном алгебраические и вычислительные подходы к решению проблемы. В данной работе предлагается конструктивный подход к изучению и моделированию интервальных геометрических множеств.

Определения и обозначения. Интервальным параметром (ИП) будем называть вещественный числовой параметр, принимающий любые значения из замкнутого промежутка. Обозначение ИП: $[a] = [a^-, a^+] \leftrightarrow a^- \leq a \leq a^+$.

Интервальным множеством (ИМ) фигур будем называть любое множество, определенное хотя бы одним ИП. Обозначаться такие ИМ будут буквами $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, ... В данной работе будем рассматривать ИМ k-плоскостей n-мерного евклидова пространства. Обозначаться такие ИМ будут s-ИМk, где s — размерность ИМ, принимающая значения от 1 до $(k + 1)(n - k)$. Описывается такое множество разрешимой системой линейных интервальных уравнений

$$[\boldsymbol{A}] \cdot [\boldsymbol{X}] = \cdot [\boldsymbol{B}], \tag{1}$$

где $[\boldsymbol{A}] = ([a_{i,j}])$ — интервальная $(n - k) \cdot m$-матрица, где $[\boldsymbol{B}] = ([b_i])$ — интервальный m-вектор, $\boldsymbol{X} = (x_1, ...,$

x_n) — вектор аргументов. Здесь $n - k \le m \le \infty$. При $m > n - k$-система (1) должна быть разрешимой. Это необходимое, но не достаточное условие существования ИМk. Например, 1-ИМ1 представляет собой однопараметрическое ИМ прямых — часть пучка или линейчатой поверхности. В другом крайнем случае $2(n - 1)$-ИМ1 конструктивно представляет собой линейчатую n-мерную «трубку», в случае $n = 2$ — «бабочку». Если границы «трубки» аппроксимированы кусочно-линейными гиперповерхностями (отсеками гиперплоскостей), то ИМk будем называть **линейным**. С увеличением m и при сохранении условия разрешимости системы (1) n-«трубка» сужается и при $m \to \infty$ превращается в определенную k-плоскость.

В случае, если система (1) принимает вид

$$[a_i]\cdot[x_i] + [x_n] = [b_i],\ \cdot i = 1, \ldots, m,$$

соответствующее $2(n - 1)$-ИМ1 можно рассматривать двояко: как n-мерную «трубку», заданную своими проекциями на координатные плоскости или как интервальное множество гиперплоскостей, заданное своими интервальными следами на координатных плоскостях. О существовании в заданном ИМ интервального множества гиперплоскостей можно судить по критерию

$$\bigcap_i [b_i] \ne \varnothing .$$

Задание и структура интервальных множеств. Любая k-плоскость задается своим k-симплексом $\boldsymbol{S} = \{S_0, \ldots, S_k\}$, $S_i = (x_1, \ldots, x_n)_i$, который называется базисным k-симплексом. Предположим, что хотя бы одна вершина базисного k-симплекса, а в общем случае — все вершины, задается ИП (или хотя бы одним из n). То есть $[S_i] = ([x_1], \ldots, [x_n])_i$. Тогда $[S_i]$ представляет собой область n-мерного пространства, ограниченную гиперпараллелепипедом $S_i = [x_1]_i \times \ldots \times [x_n]_i$.

Предположим, что для всех значений $i \ne j$ $\boldsymbol{S_i} \cap \boldsymbol{S_j} = \varnothing$. Тогда $(k + 1)(n - k)$-ИМk задается множеством S_i и условием пересечения с каждым из них. Обратное утверждение неверно.

Поясним это утверждение на примере. Пусть $n = 2$, $k = 1$. Тогда имеем заданными $\boldsymbol{S_0} = [x_1]_0 \times [x_2]_0$, $\boldsymbol{S_1} = [x_1]_1 \times [x_2]_1$, $\boldsymbol{S_i} \cap \boldsymbol{S_j} = \varnothing$.

Кроме этого, эти множества упорядочены по каждой координате, то есть их проекции на координатные оси — интервалы расположены по возрастанию значений в одинаковом порядке по каждой оси. Образуется 2-ИМ1. В символической записи $[\boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{S_1}] = [0]$. Или

$$\begin{vmatrix} x_1 - [x_1]_0 & x_2 - [x_2]_0 \\ [x_1]_1 - [x_1]_0 & [x_2]_1 - [x_2]_0 \end{vmatrix} = [0].$$

Схема 2-ИМ1 приведена на рис. 1.

Если имеется заданная 2-ИМ1, то $\boldsymbol{S_0} = [AB]$, $\boldsymbol{S_1} = [CD]$ — отрезки прямых. Тогда в символической форме $[AB, CD] = [0]$ и в параметрической форме

$$[x_1]_0 = (1 - u_0)\, x_{iA} + u_0 x_{iB},$$

$$[x_1]_1 = (1 - u_1)\, x_{iC} + u_1 x_{iD},\ 0 \le u_{0,1} \le 1.$$

Если $x^+_{i,0} < x^-_{i,1}$, то 2-ИМ1 на рис. 1 эквивалентны по заданию ИМ1. Действительно, [AB] и [CD] можно рассматривать как диагонали прямоугольников $\boldsymbol{S_0}$ и $\boldsymbol{S_1}$.

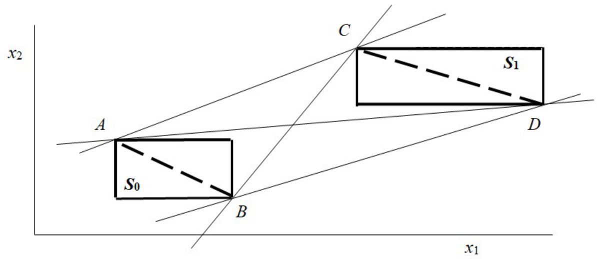

Рис. 1. 2-ИМ1 типа «бабочка» на плоскости

В общем случае ИМk может быть задано любым набором $\{\boldsymbol{S_0}, S_1, \ldots, S_S, a_{s+1}, \ldots, a_k\}, \ldots, \{\boldsymbol{S_0}, S_1, \ldots, S_S, [a]_{s+1}, \ldots, [a]_k\}, \ldots, \{\boldsymbol{S_0}, \ldots, \boldsymbol{S_k}\}$.

Структура таких ИМ следующая. Для $k = n - 1$ ИМk делит пространство на три открытые n-мерные области: «верхнюю», «внутреннюю» и «внешнюю», если задаться направлением вдоль какой-либо координатной оси. Обозначим границу между «верхней» и «внутренней» областями $\boldsymbol{\Gamma^+}$, а между «внутренней» и «нижней» — $\boldsymbol{\Gamma^-}$. Для $(k + 1)(n - k)$-ИМk $\boldsymbol{\Gamma^+ \cap \Gamma^- = \varnothing}$.

В общем случае ИМk образует n-мерную «трубку» с одной границей, отделяющей «внешнюю» область от «внутренней». Во всех случаях граница есть совокупность гиперплоскостей, опорных к соответствующему набору данных. Совокупность опорных гиперплоскостей образует кусочно-линейную структуру границ.

Структуру ИМk проще всего определить в $(k+1)$-мерном пространстве. Задав в системе координат $Ox_1 \ldots x_{k+1}$ базисные множества $S_i = (0, \ldots, 0, [x_i], 0, \ldots, 0)$, $i = 1, \ldots, k + 1$, уравнение ИМk можно записать в виде

$$\frac{x_1}{[a_1]} + \ldots + \frac{x_{k+1}}{[a_{k+1}]} = [1].$$

Тогда очевидно, что $\boldsymbol{\Gamma}$ образуется множеством k-плоскостей, заданных базисными k-симплексами:

$$\boldsymbol{S_1} = \left((x_1^+, 0, \ldots, 0), (0, x_2^+, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, x_{k+1}^+)\right),$$

$$\boldsymbol{S_2} = \left((x_1^+, 0, \ldots, 0), (0, x_2^+, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, x_{k+1}^-)\right),$$

$$\boldsymbol{S_{k+1}} = \left((x_1^-, 0, \ldots, 0), (0, x_2^-, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, x_{k+1}^-)\right).$$

Отметим важную особенность ИМ. ИМk может быть задана набором областей $\{\boldsymbol{S_0}, \ldots, \boldsymbol{S_m}\}$, $k + 1 \le m < \infty$.

В этом случае этот набор должен быть совместным, то есть должна существовать хотя бы одна k-плоскость, пересекающая все области.

Рассмотрим пример. Пусть $n = 2$, $k = 1$. Заданы $\boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{S_1}, \boldsymbol{S_2}$, которые упорядочены по возрастанию: $[x_1]_0 < [x_1]_1 < [x_1]_2$, $[[x_2]_0 < [x_2]_1 < [x_2]_2$. Тогда 2-ИМ1 в символической форме описывается системой интервальных уравнений $[AB, CD] = [0]$, $[EF, CD] = [0]$ (рис. 2). Если точкам отрезка AB приписать параметр $0 \le u \le 1$: $u_A = 0$, $uB = 1$, а точкам отрезка EF — параметр $0 \le v \le 1$: $v_E = 0$, $v_F = 1$, то 2-ИМ1 можно записать в параметрической форме

$$[x_i]_u = (1 - u)\, x_{iA} + u x_{iB},$$

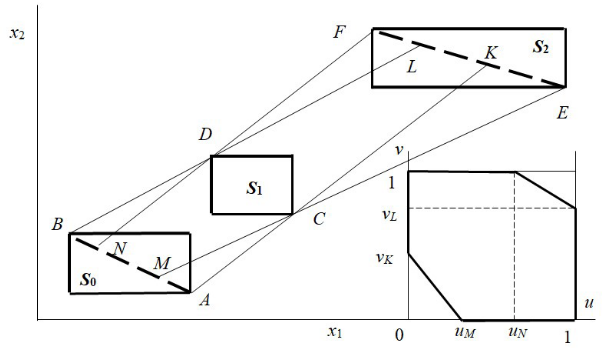

Рис. 2. Задание 2-ИМ1 совместными ИМ и область изменения параметров

$$[x_i]_v = (1 - [v])\, x_{iE} + [v] x_{iF},$$

$$[v] = \begin{cases} \left[-\dfrac{v_K}{u_M} u + v_K, 1\right], 0 \le u \le u_M, \\ [0, 1], u_M \le u \le u_N, \\ \left[0, \dfrac{(u-u_N)(v_L - 1)}{1-u_N} + 1\right], u_N \le u \le 1. \end{cases}$$

Частный случай пересечения интервальных множеств. Рассмотрим случай, когда несколько n-ИМ($n - 1$), пересекаясь, образуют n-ИМ($n - 1$). Пусть задано множество$\{\boldsymbol{S}_0, \ldots, \boldsymbol{S}_m\}$, $m > n$. Оно определяет $C_m^n n$-ИМ($n - 1$), если для любой пары $i \neq j$ $\boldsymbol{S}_i \cap \boldsymbol{S}_j = \varnothing$. Пусть все n-ИМ($n-1$) определяются уравнениями

$$[x_n] = \sum_{i=1}^{n-1} [a_i]_j x_i + [b]_j,\ 1 \le j \le C_m^n.$$

Обозначим эти n-ИМ($n - 1$) как $\boldsymbol{A}_j$. Можно доказать, что в пространстве параметров ($\boldsymbol{a}_i$, b) каждое $\boldsymbol{A}_j$ будет изображаться точкой некоторой области, ограниченной в подпространстве ($\boldsymbol{a}_i$) гиперпараллелепипедом ($[a_1] \times \ldots \times [a_{n-1}])_j$, а в пространстве ($\boldsymbol{a}_i$, b) — двумя гиперповерхностями $b^-(a_i)_j$ и $b^+(a_i)_j$. Эти гиперповерхности будут иметь кусочно-линейную структуру. Можно доказать теорему.

ТЕОРЕМА. Множества $\boldsymbol{S}_i$, $0 \le i \le m$, $m \ge n$, являются совместными, то есть определяют некоторое n-ИМ($n - 1$), тогда и только тогда, когда

$$\bigcap_j ([a_1] \ldots [a_{n-1}])_j = [a_1^0] \times \ldots \times [a_{n-1}^0] \neq \varnothing$$

и

$$\bigcap_j [b(a_i^0)]_j \neq \varnothing.$$

Предположим, что первое условие не выполняется для $[a_1]_1$ и $[a_1]_2$, которые определяются тремя базисными областями $\boldsymbol{S}_0$, $\boldsymbol{S}_1$ и $\boldsymbol{S}_2$. Это означает, что либо $[a_1]_1 \cap [a_1]_2 = \varnothing$, либо $[a_2]_1 \cap [a_2]_2 = \varnothing$, либо и то и другое вместе. Всего возможно восемь вариантов невыполнения первого условия. Каждый из этих вариантов означает отсутствие в плоскости (x_1, x_n) такого 2-ИМ1, которое было бы инцидентно проекциям $\boldsymbol{S}_0$, $\boldsymbol{S}_1$ и $\boldsymbol{S}_2$ на эту плоскость.

Если первое условие выполняется, то есть $[a_1]_1 \cap [a_1]_2 = [a_1{}^0] \neq \varnothing$, то это означает, что в плоскости (x_1, x_n) существуют 2-ИМ1, являющиеся интервальными следами n-ИМ($n - 1$) $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$ одновременно или их параллельными следами. Очевидно, что первый вариант возможен только при выполнении второго условия.

Направления дальнейших исследований. Опишем вкратце некоторые возможные направления исследований в области неопределенной, интервальной геометрии как прикладного, так и теоретического характера. В самых общих словах основной задачей инженерной геометрии в настоящее время является задача построения геометрических моделей систем с детерминированными параметрами. Однако существование многочисленных классов систем с неопределенностями позволяет предложить интервальную геометрию как основу для решения проблемы построения моделей таких систем. Например, в рамках этой проблемы могут быть предложены геометрические подходы к решению следующих задач: обработка данных с неопределенностью в наблюдениях, измерениях или вычислениях (интервальные множества многомерных поверхностей отклика), моделирование временных деформаций параметров системы (интервальное прогнозирование свойств систем), построение моделей для систем одного класса (согласование моделей по принципу интервального подобия) и др.

Возникающие при этом геометрические задачи могут быть решены при помощи следующих теоретических исследований в области интервальной геометрии:

— рассмотрение интервальных многомерных объектов как множеств геометрических детерминированных образов. Реализация такого подхода возможна аналитическими и вычислительными методами решения стандартных геометрических задач, дополненных алгоритмами перебора значений параметров из интервальных данных;

— задание интервальных объектов детерминированными параметрами и моделирование их точками некоторых связных областей в пространстве параметров. Форма и положение этих областей позволяет судить о свойствах и отношениях рассматриваемых объектов и решать прикладные задачи (задачи оптимизации или задачи инцидентности, к которым относятся, например, задачи размещения, покрытия, упаковки, компоновки и др.);

— исследование геометрических свойств интервальных отображений, в которых интервальные объекты могут рассматриваться как образы некоторых детерминированных геометрических объектов. Возможна постановка обратной задачи — задачи восстановления детерминированного деформированного объекта по заданному интервальному образу.

В качестве примера теоретического приложения рассмотрим одну из задач распознавания образов, заключающуюся в определении интервальной согласованности недетерминированных систем с интервальной неопределенностью. Параметры систем вычисляются по эмпирическим данным. Чтобы быть интервально согласованными все изучаемые системы должны удовлетворять следующим условиям:

— аналитические модели систем принадлежат одному и тому же классу, но могут иметь разные структуры и разные числовые параметры;

— для каждой системы в пространстве модели существует свое аппроксимирующее интервальное множество, со своей структурой и своими параметрами;

— внутри аппроксимирующего интервального множества никакая аналитическая зависимость выходного параметра от аргументов не противоречит исходным данным;

— все системы являются совместными в интервальном смысле, то есть их аппроксимирующие интервальные множества принадлежат одному классу, например, являются линейчатыми.

Под интервальной согласованностью систем понимается существование в каждом из аппроксимирующих интервальных множеств такой детерминированной аналитической зависимости выходного параметра от аргументов (геометрического объекта типа гиперповерхности), для которой в каждом из других аппроксимирующих интервальных множеств найдется подмножество аналитических зависимостей, совпадающих с первой с точностью до преобразования подобия.

Заключение. Как показал анализ литературы, интервальная математика и мягкие вычисления играют существенную роль в прикладных исследованиях. Возможность построения интервальной геометрии, основанной на интервальной арифметике, очевидна. Однако опубликованных научных работ в этом направлении крайне мало. В данной статье сделана попытка рассмотреть некоторые способы задания интервальных геометрических образов, а именно k-плоскостей, исследовать их структуру и некоторые свойства.

Интервальные геометрические образы позволяют строить геометрические модели систем в условиях неопределенной информации, которая характерна для большинства сложных систем.

Библиографический список

1. Moore R. E. Interval analyses. New York: Prentice-Hall, 1966. 400 p.
2. Калмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х. Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука: Сиб. отд-ние, 1986. 224 с.
3. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. Москва: Мир, 1987. 356 с.
4. Левин В. И. Теоретические основы исследования интервальных функций методами интервально-дифференциального исчисления // Системы управления, связи и безопасности. 2016. № 1. С. 335–350. EDN: VOTNGB.
5. Шарый С. П., Шарая И. А. Распознавание разрешимости интервальных уравнений и его приложения к анализу данных // Вычислительные технологии. 2013. Т.18, № 3. С. 80–109. EDN: QYPDSX.
6. Shary S. P. Solving the tolerance problem for interval linear equations // Interval Computation. 1994. № 2. P. 6–26.
7. Вощинин А. П. Интервальный анализ данных: развитие и перспективы // Заводская лаборатория. 2002. Т. 68, № 1. С. 118–126.
8. Левин В. И. Интервальные уравнения в задачах обработки данных // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2018. Т. 84, № 3. С. 73–78. DOI: 10.26896/1028-6861-2018-84-3-73-78. EDN: YTZRYA.
9. Юничева Н. Р., Юничева Р. Р. Построение множества решений системы интервальных алгебраических уравнений в задаче синтеза систем управления объектами с неточными данными // Информатика: проблемы, методология, технологии: материалы XVI Междунар. науч.-метод. конф. 2016. С. 258–261. EDN: WNTFSH.
10. Сафронов В. В., Ведерников Ю. В., Шахова О. А. Векторная оптимизация сложных технических систем при неопределенности исходных данных // Информационные технологии. 2001. № 2. С. 49–63.
11. Лакеев А. В., Носков С. И. О множестве решений линейного уравнения с интервально заданным оператором и правой частью // Сибирский математический журнал. 1994. Т. 35, № 5. С. 1074–1084. EDN: UJWFIA.
12. Лакеев А. В. Системы линейных интервальных уравнений с конечным множеством решений // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2009. № 3 (23). С. 42–48. EDN: KUFQGH.
13. Целых А. Н., Тимошенко Р. П. Некоторые теоретико-множественные операции над интервальными нечеткими множествами в моделях искусственного интеллекта // Новости искусственного интеллекта. 2000. № 3. С. 139–145.
14. Носков С. И. Точечная характеризация множеств решений интервальных систем линейных алгебраических уравнений // Информационные технологии и математическое моделирование в управлении сложными системами. 2018. № 1 (1). С. 8–13. EDN: YXRWEP.
15. Левин В. И. Интервальные методы оптимизации систем в условиях неопределенности. Пенза: Изд-во Пензенского технол. ин-та, 1999. 101 с.
16. Кумков С. И. Обработка экспериментальных данных ионной проводимости расплавленного электролита методами интервального анализа // Расплавы. 2010. № 3. С. 86–96. EDN: MKJTIL.
17. Скибицкий Н. В. Построение прямых и обратных статических характеристик объектов по интервальным данным // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2017. Т. 83, № 1-1. С. 87–98. EDN: XUYZGV.
18. Носков С. И., Врублевский И. П., Заянчуковская В. О. Применение интервального регрессионного анализа для моделирования объектов транспорта // Вестник Уральского государственного университета путей сообщения. 2020. № 3 (47). С. 45–52. DOI: 10.20291/2079-0392-2020-3-45-52. EDN: FGLKXR.
19. Юрков В. Ю. Основы системы развития и контроля визуально-алгоритмического мышления // Современное образование. 2019. № 1. С. 72–84. DOI: 10.25136/2409-8736.2019.1.26453.

ЮРКОВ Виктор Юрьевич, доктор технических наук, профессор (Россия), профессор кафедры «Конструирование и технология изделий легкой промышленности» Омского государственного технического университета, г. Омск.
SPIN-код: 2414-1438
AuthorID (РИНЦ): 173644
AuthorID (SCOPUS): 55857657200
ORCID: 0000-0003-2667-8103
Адрес для переписки: viktor_yurkov@mail.ru

Для цитирования

Юрков В. Ю. Интервальные множества в инженерной геометрии // Омский научный вестник. 2024. № 4 (192). С. 29–34. DOI: 10.25206/1813-8225-2024-192-29-34.

Статья поступила в редакцию 18.03.2024 г.

UDC 514.1:519.6
DOI: 10.25206/1813-8225-2024-192-29-34
EDN: ORIVTV

V. YU. YURKOV

**Omsk State Technical University,
Omsk, Russia**

INTERVAL SETS IN APPLIED GEOMETRY

Geometric modeling of interval sets of multidimensional space is considered. The interval set is determined as a set of *k*-planes of uncertain interval parameters. Interval parameters may be given by means of interval basis which are *k*-simplexes having vertex coordinates which are not fully presented (only up to range of values). Geometric images of the sets have combinatorial structure formed by some part of the space and bordered by a set of peace linear hyper-surfaces. Analytic model is a system of interval equations which may be transformed to equations with uncertain parameters. The set of interval parameters generate an interval function and geometric image of it is some domain in parametric space. Analyses of mutual position of all domains allows us to determine the behavior of interval sets. Some properties of interval line sets are considered in detail as examples of the proposed approach.

Keywords: geometric model, interval set, parametric determination, *k*-plane, piecewise linear structure, interval parameter, hyper-plane.

References

1. Moore R. E. Interval analyses. New York: Prentice-Hall, 1966. 400 p. (In Engl.).

2. Kalmykov S. A., Shokin Yu. I., Yuldashev Z. Kh. Metody interval'nogo analiza [Methods of interval analyses]. Novosibirsk, 1986. 224 p. (In Russ.).

3. Alefel'd G., Khertsberger Yu. Vvedeniye v interval'nyye vychisleniya [Introduction in interval computation]. Moscow, 1987. 356 p. (In Russ.).

4. Levin V. I. Teoreticheskiye osnovy issledovaniya interval'nykh funktsiy metodami interval'no-differentsial'nogo ischisleniya [Analysis of interval functions by methods of interval differential calculus] // Sistemy upravleniya, svyazi i bezopasnosti. *Systems of Control, Communication and Security.* 2016. No. 1. P. 335–350. EDN: VOTNGB. (In Russ.).

5. Sharyy S. P., Sharaya I. A. Raspoznavaniye razreshimosti interval'nykh uravneniy i ego prilozheniya k analizudannykh [Recognizing solvability of interval equations and its application to data analysis] // Vychislitel'nyye tekhnologii. *Computational Technologies.* 2013. Vol. 18, no. 3. P. 80–109. EDN: QYPDSX. (In Russ.).

6. Shary S. P. Solving the tolerance problem for interval linear equations // Interval Computation. 1994. No. 2. P. 6–26. (In Engl.).

7. Voshchinin A. P. Interval'nyy analiz dannykh: razvitiye i perspektivy [Data interval analyses: development and perspectives] // Zavodskaya laboratoriya. *Industrial Laboratory.* 2002. Vol. 68, no. 1. P. 118–126. (In Russ.).

8. Levin V. I. Interval'nyye uravneniya v zadachakh obrabotki dannykh [Interval equations in problems of data processing] // Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov. *Industrial Laboratory. Diagnostics of Materials.* 2018. Vol. 84, no. 3. P. 73–78. DOI: 10.26896/1028-6861-2018-84-3-73-78. EDN: YTZRYA. (In Russ.).

9. Yunicheva N. R., Yunicheva R. R. Postroyeniye mnozhestva resheniy sistemy interval'nykh algebraicheskikh uravneniy v zadache sinteza sistem upravleniya ob"yektami s netochnymi dannymi [Construction of the set of solutions of the system of interval algebraic equations in the problem of synthesis of control systems of objects with imprecise data] // Informatika: problemy, metodologiya, tekhnologii. *Informatics: Problems, Methodology, Technologies.* 2016. P. 258–261. EDN: WNTFSH. (In Russ.).

10. Safronov V. V., Vedernikov Yu. V., Shakhova O. A. Vektornaya optimizatsiay slozhnykh tekhnicheskikh system pri neopredelennosti iskhodnykh dannykh [Vector optimization of complex technical systems under undetermined input data] // Informatsionnyye tekhnologii. *Information Technology.* 2001. No. 2. P. 49–63. (In Russ.).

11. Lakeyev A. V., Noskov S. I. O mnozhestve resheniy lineynogo uravneniya s interval'no zadannym operatorom i pravoy chast'yu [On the solution set of a linear equation with the right-hand side and operator given by intervals] // Sibirskiy matematicheskiy zhurnal. *Siberian Mathematical Journal.* 1994. Vol. 35, no. 5. P. 1074–1084. EDN: UJWFIA. (In Russ.).

12. Lakeyev A. V. Sistemy lineynykh interval'nykh uravneniy s konechnym mnozhestvom resheniy [Systems of linear interval equations with finite set of solutions] // Sovremennyye tekhnologii. Sistemnyy analiz. Modelirovaniye. *Modern Technologies. System Analysis. Modelling.* 2009. No. 3 (23). P. 42–48. EDN: KUFQGH. (In Russ.).

13. Tselykh A. N., Timoshenko R. P. Nekotoryye teoretiko-mnozhestvennyye operatsii nad interval'nymi nechetkimi mnozhestvami v modelyakh iskusstvennogo intellekta [Some set-theoretic operations on interval fuzzy sets in artificial intelligence models] // Novosti iskusstvennogo intellekta. *Artificial Intelligence News.* 2000. No. 3. P. 139–145. (In Russ.).

14. Noskov S. I. Tochechnaya kharakterizatsiya mnozhestv resheniy interval'nykh sistem lineynykh algebraicheskikh uravneniy [Point characterization of solution sets of an interval system of linear algebraic equations] // Informatsionnyye tekhnologii i matematicheskoye modelirovaniye v upravlenii slozhnymi sistemami. *Information Technology and Mathematical Modeling in the Management of Complex Systems.* 2018. No. 1 (1). P. 8–13. EDN: YXRWEP. (In Russ.).

15. Levin V. I. Interval'nyye metody optimizatsii sistem v usloviyakh neopredelennosti [Interval method of system optimization in undetermined conditions]. Penza, 1999. 101 p. (In Russ.).

16. Kumkov S. I. Obrabotka eksperimental'nykh dannykh ionnoy provodimosti rasplavlennogo elektrolita metodami interval'nogo analiza [Working of experimental data of ionic

conduction molten electrolyte by methods of interval analysis] // Rasplavy. *Melts.* 2010. No. 3. P. 86–96. EDN: MKJTIL. (In Russ.).

17. Skibitskiy N. V. Postroyeniye pryamykh I obratnykh staticheskikh kharakteristik ob"yektov po interval'nym dannym [Construction of Direct and Inverse Static Characteristics of the Objects by Interval Data] // Zavodskaya laboratoriya. Diagnostika materialov. *Industrial Laboratory. Diagnostics of Materials.* 2017. Vol. 83, no. 1–1. P. 87–98. EDN: XUYZGV. (In Russ.).

18. Noskov S. I., Vrublevskiy I. P., Zayanchukovskaya V. O. Primeneniye interval'nogo regressionnogo analiza dlya modelirovaniy ob"yektov transporta [Application of interval regression analysis for modelling of transport objects] // Vestnik Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta putey soobshcheniya. *Herald of the Ural State University of Railway Transport.* 2020. No. 3 (47). P. 45–52. DOI: 10.20291/2079-0392-2020-3-45-52. EDN: FGLKXR. (In Russ.).

19. Yurkov V. Yu. Osnovy sistemy razvitiya I kontrolya vizual'no-algoritmicheskogo myshleniya [Framework of the system of development and control of visual-algorithmic thinking] // Sovremennoye obrazovaniye. *Modern Education.* 2019. No. 1. P. 72–84. DOI: 10.25136/2409-8736.2019.1.26453. (In Russ.).

YURKOV Viktor Yuryevich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of Design and Technology of Light Industry Product Manufacture Department, Omsk State Technical University, Omsk.
SPIN-code: 2414-1438
AuthorID (RSCI): 173644
AuthorID (SCOPUS): 55857657200
ORCID: 0000-0003-2667-8103
Correspondence address: viktor_yurkov@mail.ru

For citations

Yurkov V. Yu. Interval sets in applied geometry // Omsk Scientific Bulletin. 2024. No. 4 (192). P. 29–34. DOI: 10.25206/1813-8225-2024-192-29-34.

Received March 18, 2024.