

## КАЧЕСТВЕННАЯ МОДИФИКАЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ ОРИЕНТИРОВАННЫХ МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ В C3D FAIRCURVEMODELER

В статье приводится подробный алгоритм улучшения команды C3D FairCurveModeler построения пространственной кривой класса  $F$  с аппроксимацией посредством рациональной кубической сплайновой кривой ( $NURBzS$ -кривой) и с аппроксимацией посредством  $B$ -сплайновой кривой высокой степени. Улучшение достигается за счёт оптимизации структуры пространственного Геометрического Определителя Эрмита при определении его на пространственной виртуальной кривой ( $V$ -кривой), построенной на множестве  $K2П$  (конических кривых) двойного соприкосновения. Структура Геометрического Определителя Эрмита улучшается в операции определения касательной в опорной точке путем переопределения направления касательной с учетом пространственных направлений касательных в концевых точках сегмента  $K2П$  при построении множества  $K2П$  двойного соприкосновения.

Для демонстрации модифицированного метода в работе показывается:

- 1) улучшение качества конической спирали, моделируемой штатной командой `_Helix CAD`-систем ZWCAD, BricsCAD, AutoCAD с помощью команды C3D FairCurveModeler построения  $NURBzS$ -кривой;
- 2) построение  $B$ -сплайновой кривой 8-й степени на точках конической спирали командой C3D FairCurveModeler и сравнение с аналогичными построениями в CAD-системах, 'AliasDesignStudio', NX, декларирующих возможность построения кривых высокого качества (класса  $A$ ).

**Ключевые слова:** пространственная сплайновая кривая, C3D FairCurveModeler, геометрическое ядро C3D, C3D FairCurveModeler,  $K2П$ , конические кривые, кривые класса  $A$ , кривые класса  $F$ .

**Введение.** Сплайны активно используются и развиваются в инженерной геометрии [1–10]. В данной работе авторы предлагают алгоритм улучшения изогометрического построения пространственной глобальной сплайновой кривой, основанной на построении плоской виртуальной кривой ( $V$ -кривой) высокого качества. Проблема изогометрического построения кривых впервые была поставлена в работе [11]. В качестве примеров дальнейшей работы по изогометрической (в англоязычной литературе как «shapereserving») аппроксимации сплайнами можно привести работы [12–14].

В работе [15] приведены формулы работы с рациональными сплайновыми кривыми Безье ( $NURBzS$ -кривыми) (вычисления / уплотнения, повышения степени, перехода от представле-

ния конической кривой в виде соприкасающегося треугольника и инженерного дискриминанта к  $NURBzS$ -представлению и наоборот), формулы изогометрической аппроксимации Геометрического Определителя (ГО) Эрмита второго порядка фиксации посредством  $NURBzS$ -кривой. Эти формулы вошли в золотой фонд методов геометрического ядра C3D [16] и были использованы для разработки приложений CAD-систем [17].

Однако метод изогометрической аппроксимации для построения пространственного ГО Эрмита второго порядка фиксации посредством кубической  $NURBzS$ -кривой не обеспечивает непрерывности кручения (рис. 1, слева), где  $NURBzS$ -кривая — это последовательность сегментов плоских рациональных кубических кривых Безье.

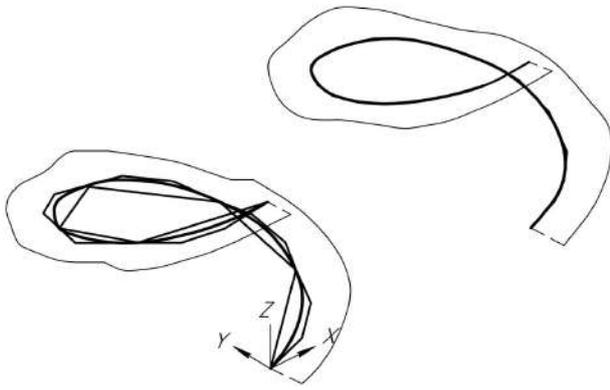


Рис. 1. Метод аппроксимации ГО Эрмита второго порядка фиксации посредством кубической  $NURBzS$ -кривой (слева) и посредством  $NURBzS$ -кривой 6-й степени (справа) [14]

В работе [15] предлагается улучшение алгоритма аппроксимации пространственной кривой.

Общий алгоритм следующий. Предварительно пространственная ломаная «укладывается» на плоскость с сохранением углов между звеньями. Затем строится плоская  $V$ -кривая высокого качества (кривая класса  $C5$  [5]). На каждом цикле генерации точек  $V$ -кривой формируется множество кривых второго порядка (К2П) двойного соприкосновения. На последнем цикле генерации и формируется ГО Эрмита второго порядка фиксации в виде опорной ломаной с фиксированными касательными и векторами кривизны в каждой опорной точке. Множество К2П двойного соприкосновения дают в каждой узловой точке  $V$ -кривой вектор касательной и значение кривизны. На плоском ГО Эрмита строится плоская сплайновая кривая Безье. Затем плоская сплайновая кривая Безье переносится на пространственную исходную ломаную. Плоский сегмент переносится в плоский сегмент пространственного треугольника [15].

Смежные дуги пространственной кубической  $NURBzS$ -кривой после реконструкции на пространственную исходную ломаную находятся в разных плоскостях. Для построения пространственной кривой с непрерывным кручением в работе [15] предлагается следующая схема. С помощью функции повышения степени (ElevateDegree) производится переход от кубической  $NURBzS$ -кривой к эквивалентному представлению  $NURBzS$ -кривой 6-й степени. Для обеспечения непрерывности кручения у смежных дуг смежные тройки управляющих точек проецируются в одну плоскость. Эта плоскость может быть биссекторной плоскостью, проходящей через общий касательный отрезок смежных  $B$ -полигонов. По графикам кривизны (рис. 1, тонкая линия) можно судить о качестве построения кривых. Кривая, построенная посредством  $NURBzS$ -кривой 6-й степени, которая расположена справа, является более качественной, чем кривая слева, построенная посредством кубической  $NURBzS$ -кривой. Но данное улучшение не является идеальным.

Цель разработки модифицированного метода — построение более качественных пространственных кривых с улучшенными показателями, такими как плавность изменения кривизны и кручения.

**1. Улучшение алгоритма построения пространственного ГО Эрмита.** Чтобы показать принцип улучшения алгоритма, приведем основные этапы

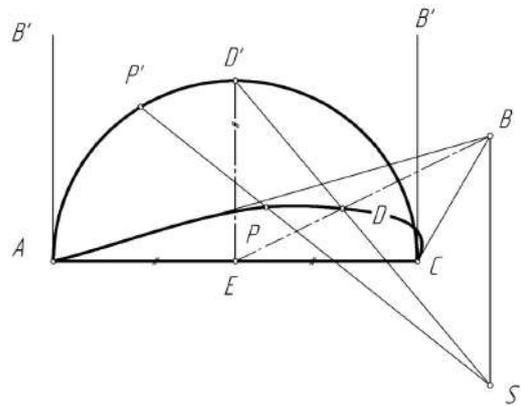


Рис. 2. Определение параметров конической кривой графоаналитическим способом

алгоритма построения кривой, которые даны в работе [18]:

1. Построение эскиза кривой, которая может быть задана различными способами, например, множеством точек.

2. Определение или построение геометрического определителя, заданного с помощью опорной или касательной ломаной. Форма ломаных должна однозначно определять форму кривой, то есть быть изогометрической.

3. Построение алгоритма генерации точек кривой на заданных параметрах геометрического определителя.

4. Выделение управляющих параметров геометрического определителя аппроксимирующей кривой и ее редактирование.

Итерационная схема построения  $V$ -кривой для уплотнения спецификации геометрического определителя следующая: 1) на опорной или касательной ломаной строится базис сплайна как множество дважды соприкасающихся К2П; 2) генерируются точки кривой на множестве дважды соприкасающихся К2П.

Алгоритмы вычисления параметров К2П являются геометрически ориентированными и основаны на методах начертательной геометрии [19, 20]. Эта операция реализуется в программе TangentToConic определения касательной и инженерного дискриминанта в промежуточной точке. Программа реализует графоаналитический алгоритм.

Суть геометрически ориентированного подхода поясняется следующей схемой. Пусть задан соприкасающийся треугольник с конической кривой и точка  $P$  на кривой (рис. 2).

Предварительно в соприкасающемся треугольнике  $ABC$  вводится аффинная система координат. В этой системе координат высота равнобедренного треугольника равна 1, длина основания равна 1. Вводится плоскость, перпендикулярная плоскости треугольника  $ABC$ . На прямой, проходящей через точку  $B$  параллельно введенной плоскости, устанавливается источник центрального проецирования  $S$  таким образом, что точка  $P$  проецируется на введенную плоскость в точку  $P'$ , принадлежащую окружности с диаметром  $AC$ . Боковые стороны треугольника проецируются на введенную плоскость в виде двух параллельных прямых. Сегмент конической кривой преобразуется в дугу полуокружности. Заданная точка  $P$  переходит в точку  $P'$  на полуокружности. Определяется в точке  $P'$  полуокружности касатель-

ная прямая. Затем обратными проективными преобразованиями касательная прямая к окружности переходит в касательную прямую в аффинной системе координат. Точка  $D'$  пересечения полуокружности с высотой переходит в точку  $D$  пересечения медианы с сегментом К2П в аффинном треугольнике. По точке  $D$  определяется инженерный дискриминант кривой и другие параметры квадратичной NURBzS-кривой.

В алгоритм построения пространственной V-кривой [15] на этапе построения множества К2П двойного соприкосновения в пункте определения касательной к конической кривой добавляется операция коррекции направления касательной с учетом пространственных направлений касательных в концевых точках сегмента конической кривой.

Модифицируется построение базиса сплайна. Базис сплайна на пространственной опорной ломаной  $\{T_i\}$  строится как множество дважды соприкасающихся К2П  $\{R_i\}$ .

Алгоритм представляет собой итерационное переопределение касательных прямых  $\{P_i\}$  в опорных точках  $\{T_i\}$ .

Первоначально в каждой опорной точке  $P_i$  направление пространственной касательной прямой параллельно хорде опорной ломаной и вектор касательной лежит в плоскости треугольника  $T_{i-1}, T_i, T_{i+1}$ .

Определяется направление касательной прямой  $P_i$  на плоскости треугольника  $T_{i-1}, T_i, T_{i+1}$  по схеме (рис. 2). Пространственные касательные  $P_{i-1}, P_{i+1}$  при этом проецируются на плоскость треугольника  $T_{i-1}, T_i, T_{i+1}$ . После определения касательной  $P_i$  в плоскости треугольника  $T_{i-1}, T_i, T_{i+1}$  выполняется коррекция направления касательной в опорной точке  $T_i$  с усреднением пространственных направлений касательных  $P_{i-1}, P_{i+1}$  в концевых точках  $T_{i-1}, T_{i+1}$  сегментов  $R_i$  К2П. Усреднение выполняется следующим образом. Определяется точка  $T_{i-1,i}$  псевдопересечения пространственной касательной прямой  $P_{i-1}$  с касательной прямой  $P_i$ , принадлежащей плоскости треугольника  $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}$ . Точка псевдопересечения лежит на середине отрезка, соединяющего ближайшие точки скрещивающихся прямых. Таким же образом определяется точка  $T_{i,i+1}$  псевдопересечения касательной прямой  $P_i$  с касательной прямой  $P_{i+1}$ . Пространственное направление касательной  $P_i$  в точке  $T_i$  определяется вектором  $T_{i-1,i}T_{i,i+1}$ .

В модифицированной программе вводится фрагмент 1, который изменяет направление искомой касательной р3 с учетом направлений исходных касательных в точках р1 и р2.

#### Фрагмент 1

```
//-----
// Определение касательного вектора к конике,
// инженерного дискриминанта.
// ---
MbResultType
TangentToConic ( const c3d::PointVector3D &
p1_d, // первая точка с касательной
const c3d::PointVector3D & p2_d, // вторая точка
с касательной
c3d::PointVector3D & p3_d, //
третья точка с искомой касательной
double& d0 ) // дискриминант
{
// Модификация для пространственной ломаной
// Касательная р3 лежит в плоскости треугольника опорных точек
```

```
// Поворот касательной по направлениям пространственных кривых
```

```
MbCartPoint3D pnt1, pnt2;
LineIntersectIn3D(p1_d.first, p1_d.second, t3, p3,
pnt1);
```

```
// определение точки пересечения pnt1 прямых
p1 и (t3, p3)
```

```
LineIntersectIn3D(t3, p3, p2_d.first, p2_d.second,
pnt2);
```

```
// определение точки пересечения pnt2 прямых
(t3, p3) и p2
```

```
MbVector3D tng3(pnt1, pnt2); // вектор, соединяющий
точки пересечения
```

```
tng3.Normalize(); // нормализация пространственного
вектора касательной
```

```
p3_d.second = tng3;
```

```
//Модификация END
```

**2. Аппроксимация пространственного ГО Эрмита посредством NURBzS.** При аппроксимации V-кривой на ГО Эрмита второго порядка фиксации посредством NURBzS-кривой локальный B-полигон сегмента плоской кубической рациональной кривой Безье определяется следующим образом [15, 16]. На участке  $T_{i-1}, T_i$  по заданным К2П  $R_{i-1}, R_i$  определяются квадратичные рациональные кривые Безье. Затем определяются плоские B-полигоны рациональных кубических кривой Безье путем повышения степени сегментов конических кривых в формате рациональных квадратичных кривых Безье. Определяется результирующий B-полигон путем усреднения исходных и на результирующем B-полигоне определяется рациональная кубическая кривая Безье, которая имеет кривизны в точках  $T_{i-1}, T_i$  совпадающие с кривизнами К2П  $R_{i-1}, R_i$ . Далее первое звено укладывается на пространственную касательную  $P_{i-1}$  в точке  $T_{i-1}$ , третье звено укладывается на касательную  $P_i$  в точке  $T_i$ . Ниже приводится фрагмент 2 программы

#### Фрагмент 2

```
//-----
// Построение сегмента кубической NURBzS
по концевым точкам, касательным
// и значениям кривизны
//---
voidGetNurbsCubicSegment( const
c3d::PointVector3D & p1, // Первая точка с касательным
вектором
const c3d::PointVector3D & p2, // Вторая точка с
касательным вектором
doubled_fix, // Инженерный дискриминант
double cvt_0, // Кривизна в первой точке
double cvt_1, // Кривизна во второй точке
MbVector3D v[], // GB-полигон
double u[] ) // узлы
//Модификация для пространственного ГО
MbVector3D v_r0_bp1, v_r3_bp2;
v_r0_bp1 = bp[1] - r0; // Вектор первого звена
на плоского B-полигона
v_r3_bp2 = bp[2] - r3; // Вектор третьего звена
на плоского B-полигона
double s_r0_bp1, s_r3_bp2;
s_r0_bp1 = v_r0_bp1.Length();
s_r3_bp2 = v_r3_bp2.Length();
r1 = r0 + s_r0_bp1 * p1.second; // Укладка первого
звена на первую касательную
r2 = r3 - s_r3_bp2 * p2.second; // Укладка третьего
звена на вторую касательную
```

Протестируем модифицированный метод. Для тестирования используется функционал приложения FairCurveModelerapp ZWCAD [21] / BricsCAD

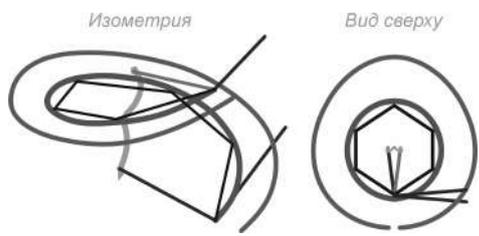


Рис. 3. NURBs-кривая, построенная по улучшенному алгоритму

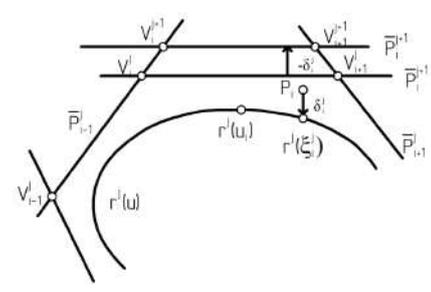


Рис. 6. Схема алгоритма приближения [15]

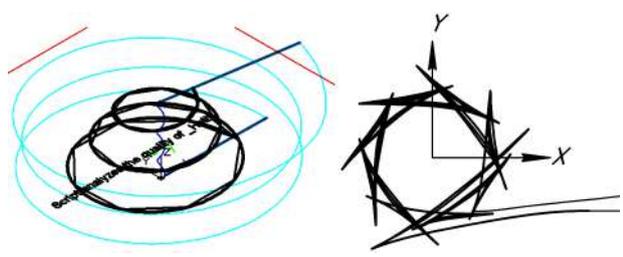


Рис. 4. Прimitives \_Helix в ZWCAD. Слева в изометрии, справа — вид сверху на эволюту (увеличено). Построены графики кривизны (тонкие линии большего диаметра) и эволюты на изометрии (в центре, волнистая тонкая линия)

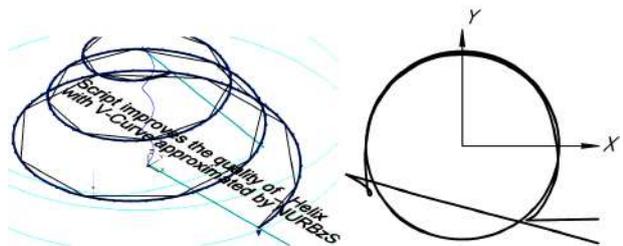


Рис. 5. Построена NURBs-кривая на точках примитива \_Helix. Построены графики кривизны (тонкая линия с большим диаметром) и эволюты (в центре изометрии, волнистая тонкая линия). Слева — изометрия, справа — вид сверху на эволюту (увеличено)

[22] / AutoCAD [23], разработанного в системе ToolKit C3D [24]. Вот как выглядит NURBs-кривая после улучшения алгоритма (рис. 3) по сравнению с кривой из работы [15] (рис. 1).

**2.1. Улучшение качества примитивов CAD-систем.** Проведем сравнительное тестирование с методом аппроксимации примитива \_Helix в ZWCAD, BricsCAD, AutoCAD:

1) построим примитив \_Helix в ZWCAD и протестируем качество (рис. 4).

Как видим по графикам кривизны, построенная кривая не удовлетворяет базовым требованиям к плавности;

2) попробуем улучшить качество штатной конической кривой. Снимем точки с примитива \_Helix и построим кривую с помощью команды построения V-кривой и аппроксимации NURBs-кривой (рис. 5).

Как видим, качество конической спирали существенно улучшилось.

**3. Аппроксимация пространственного ГО Эрмита посредством B-сплайновой кривой.** Второй метод изогеометрической аппроксимации пространственного ГО Эрмита — метод построения B-сплайновой кривой высокой четной степени. Метод был предложен в работе [25].

Предложенный алгоритм полностью ломает стереотипы построения глобальных B-сплайновых кривых и укладывается в новое направление разработки геометрически ориентированных алгоритмов построения кривых.

Применительно к плоскому ГО Эрмита алгоритм описывается следующим образом. Используется множество  $\{P_i\}_{i=0}^n$  и множество касательных  $\{P_i\}_{i=0}^n$  таким образом, что касательная ломаная  $\{V_i\}_{i=0}^{n+1}$ , определенная точками пересечения касательных, будет изогеометрична моделируемой кривой.

Формулируется задача изогеометрического построения на плоской ломаной инцидентную точкам  $\{P_i\}_{i=0}^n$  B-сплайновой кривой. Необходимо определить B-сплайновую кривую  $r(u)$  четной степени, изогеометрическую форме ломаной  $\{V_i\}_{i=0}^{n+1}$  и инцидентную точкам  $\{P_i\}_{i=0}^n : r(\xi_i) = P_i, i = 0, 1, \dots, n$  в точках  $\xi_i$  фиксированной сетки  $\Delta u: u_{i-1} < \xi < u_{i+1}, i = 1, \dots, n - 1; \xi_0 = u_0 \dots \xi_n = u_n$ .

Ключевым моментом в предлагаемом итерационном алгоритме является то, что область корректности решения ограничивается условием изогеометричности s-полигона форме касательной ломаной  $\{V_i\}_{i=0}^{n+1}$ .

Пусть на некотором j-ом шаге приближения в области корректности получен s-полигон  $\{V_i^j\}$  (рис. 6).

Невязка локального приближения на участке  $u_{i-1} < u < u_{i+1}$  определяется как кратчайшее расстояние  $\delta_i^j$  от точки  $P_i$  до B-сплайновой кривой:

$$\delta_i^j = r^j(\xi_i) - P_i, \quad u_{i-1} < \xi_i < u_{i+1}. \quad (1)$$

Точки  $V_i^j, V_{i+1}^j$  получаются как точки пересечения прямых  $\bar{P}_{i-1}^j, \bar{P}_i^j, \bar{P}_{i+1}^j$ , совпадающих со звеньями  $V_{i-1}^j V_i^j, V_i^j V_{i+1}^j, V_{i+1}^j V_{i+2}^j$ .

Переопределяются точки  $V_i^j, V_{i+1}^j$  параллельным смещением прямой  $\bar{P}_i^j$  на величину локальной невязки —  $\delta_i^j$ . Точки пересечения смещенной прямой  $\bar{P}_i^j$  с прямыми  $\bar{P}_{i-1}^j, \bar{P}_{i+1}^j$  определяют новые точки  $V_i^{j+1}, V_{i+1}^{j+1}$ . Модифицированный s-полигон  $V_{i-1}^j, V_i^{j+1}, V_{i+1}^{j+1}, V_{i+2}^j$  уменьшит локальную невязку  $\delta_i^j$ . Благодаря свойствам B-сплайнов, влияние точек  $V_i^{j+1}, V_{i+1}^{j+1}$  наиболее сильно на отрезке  $u_{i-1} < u < u_{i+1}$ , резко уменьшается за его пределами и становится нулевым за пределами отрезка  $u_{i-m/2} < u < u_{i+m/2}$ .

На основе этого свойства строится регуляризующий алгоритм последовательных приближений как последовательность параллельных смещений звеньев  $\bar{P}_i^j = V_i^j V_{i+1}^j$ , на величины —  $\delta_i^j, 0, 1, \dots, n$ .

Для построения пространственной B-сплайновой кривой алгоритм модифицируется следующим образом.

Точки конической спирали

- 150.0,0.0,0.0,1.0
- 129.701,70.3711,0.0,1
- 51.8511,133.94,0.0,1
- 52.6723,129.297,0.0,1
- 123.385,56.251,0.0,1
- 124.556, -42.4485,0.0,1
- 59.6071, -112.798,0.0,1
- 32.9665, -119.089,0.0,1
- 102.264, -61.9321,0.0,1
- 112.965,24.2747,0.0,1
- 63.2448,91.8666,0.0,1
- 16.4157,106.26,0.0,1
- 81.687,63.5706,0.0,1
- 99.0491, -9.4263,0.0,1
- 62.9406, -71.8042,0.0,1
- 3.33705, -91.4122,0.0,1
- 62.2939, -61.3918,0.0,1
- 83.4295, -1.8277,0.0,1
- 58.9667,53.2286,0.0,1
- 6.04994,75.183,0.0,1
- 44.677,55.7132,0.0,1
- 66.7552,9.31806,0.0,1
- 51.6838, -36.7037,0.0,1
- 11.6269, -58.2294,0.0,1
- 29.3689, -46.9359,0.0,1
- 49.0338, -17.2364,0.0,1

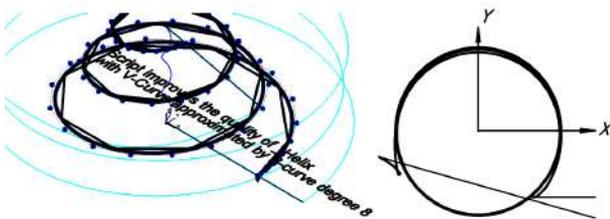


Рис. 7. FairCurveModeler. Аппроксимация конической спирали. График кривизны — тонкая линия, эволюта — тонкая линия в центре, волнистая. Слева — изометрия, справа — вид сверху на эволюту (увеличено)

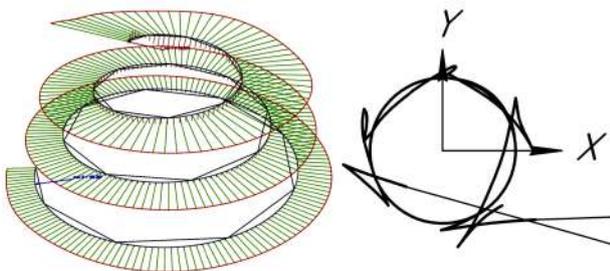


Рис. 8. 'AliasDesignStudio'. Аппроксимация конической спирали посредством B-сплайновой кривой степени 7. Слева — картинка из 'AliasDesignStudio', справа — вид сверху на эволюту (увеличено)

B-сплайновая кривая восстанавливается непосредственно на пространственном ГО Эрмита. Основным алгоритмом и в этом случае остается алгоритм приближения плоской кривой. Невязка (1)  $\delta_i^j = r^j(\xi_i^j) - P_i$  определяется как вектор расстояния от точки  $r^j(\xi_i^j)$  на пространственной B-сплайновой кривой до вершины  $P_i$  пространственной ломаной инцидентности  $P_i$ . Исходная пространственная касательная ломаная  $\{V_i\}_0^{n+1}$  и последующие ломаные управляющих точек  $\{V_i\}_{-k1}^{n+k2}$  по итерациям приближения определяются точками «псевдопересечения» скрещивающихся касательных прямых  $\{\bar{P}_i\}_{i=0}^n$ . Эти

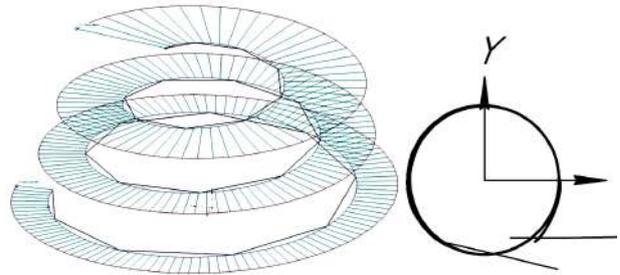


Рис. 9. NX. Аппроксимация конической спирали B-сплайновой кривой степени 8. Слева — картинка из NX, справа — вид сверху на эволюту (увеличено)

точки совпадают с серединой отрезка, которые соединяют ближайшие точки касательных прямых.

Проверим, как работает алгоритм на оптимизированном пространственном ГО Эрмита (рис. 1).

Выполним сравнительное тестирование с CAD-системами 'RhinoCeros 3D' [26], 'AliasDesignStudio' [27] и NX [28] демо-версий 2023–2024 гг.

В качестве исходных данных используем точки (Приложение 1), снятые с пространственного примитива \_Helix (конической спирали).

Построим B-сплайновую кривую степени 8 на этих точках в FairCurveModeler (рис. 7).

Эволюта практически идеальной формы, за исключением конечных участков. Это кривая класса F.

**3.1. Сравнение с 'AliasDesignStudio'.** Построим на тех же точках B-сплайновую кривую 7-й степени в 'AliasDesignStudio' (рис. 8). 7-я степень самая высокая в 'AliasDesignStudio'.

Это не кривая класса F.

**3.2. Сравнение с NX.** Построим на тех же точках B-сплайновую кривую 7-й степени в NX (рис. 9).

Надо отдать должное разработчикам NX. Эволюта практически идеальной формы, за исключением конечных участков. Тем не менее метод NX не является методом класса F. В следующей статье авторы покажут существенные ограничения CAD-систем, не позволяющие им претендовать на высокое звание топ системы.

**Выводы**

1. Улучшен алгоритм построения пространственной V-кривой путем коррекции направлений касательных на пространственной ломаной при построении множества К2П двойного соприкосновения.

2. Улучшен алгоритм аппроксимации V-кривой посредством NURBS-кривой. Показана возможность существенного улучшения качества примитива \_Helix (конической спирали) в CAD-системах ZWCAD, BricsCAD, AutoCAD.

3. За счет качественной модификации геометрически ориентированных методов достигнуто существенное улучшение качества B-сплайновой кривой высокой степени, которая аппроксимирует V-кривую. Сравнительное тестирование метода FairCurveModeler на примере построения B-сплайновой кривой высокой степени показывает существенное преимущество перед методами CAD-систем, таких как 'RhinoCeros 3D' и 'AliasDesignStudio'.

**Библиографический список**

- 1. Schoenberg I. J. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part B. On

- the problem of osculatory interpolation. a second class of analytic approximation formulae // *Quart. Appl. Math.* 1946. Vol. 4, № 2. P. 112–141. URL: <https://www.ams.org/journals/qam/1946-04-02/S0033-569X-1946-16705-2/S0033-569X-1946-16705-2.pdf> (дата обращения: 05.11.2023).
2. Schoenberg I. J. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part A. On the problem of smoothing or graduation. a first class of analytic approximation formulae // *Quart. Appl. Math.* 1946. Vol. 4, № 1. P. 45–99. URL: <https://www.ams.org/journals/qam/1946-04-01/S0033-569X-1946-15914-5/S0033-569X-1946-15914-5.pdf> (дата обращения: 05.11.2023).
3. Завьялов Ю. С. Методы сплайн функций / под ред. Н. Н. Яненко. Москва: Наука, 1980. 352 с.
4. Бор К. Практическое руководство по сплайнам / пер. с англ. В. К. Галицкого, С. А. Шестакова; под ред. В. И. Скурихина. Москва: Радио и связь, 1985. 304 с.
5. Завьялов Ю. С. Сплайны в инженерной геометрии. Москва: Машиностроение, 1985. 224 с.
6. Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве / пер. с англ. Г. П. Бабенко, Г. П. Воскресенского. Москва: Мир, 1982. 304 с.
7. Математика и САПР. В 2 кн. / пер с фр. Москва: Мир, 1980. 204 с. Кн. 1. ISBN 5-03-000417-3.
8. Математика и САПР. В 2 кн. / пер с фр. Москва: Мир, 1980. 260 с. Кн. 2. ISBN 5-03-000465-3.
9. Piegl L., Tiller W. The NURBS Book. 2nd ed. Springer Verlag, 1997. 660 p.
10. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики / пер. с англ. П. А. Монахова. Москва: Мир, 2001. 604 с. ISBN 5-03-002143-4.
11. Гребенников А. И. Метод сплайнов и решение некорректных задач теории приближений. Москва: Изд-во МГУ, 1983. 208 с.
12. Квасов Б. И. Методы изогометрической аппроксимации сплайнами. Москва: Физико-математическая литература. 2006. 416 с. ISBN 978-5-93972-416-6.
13. Karavelas M. I., Kaklis P. D. Spatial shape-preserving interpolation using  $v$  splines // *Numerical Algorithms*. 2000. № 23 (2). P. 217–250.
14. Karim S. A. A., Pang K. V. Shape Preserving Interpolation Using Spline Rational Cubic // *Journal of Applied Mathematics*. 2016. Vol. 2016 (3). P. 1–14. DOI: 10.1155/2016/4875358.
15. Муфтеев В. Г. Моделирование кривых высокого качества на основе V-кривых // *Прикладная геометрия*. 2007. № 9 (19). С. 25–74. EDN: ZXMXFL.
16. Муфтеев В., Максименко А. Функциональные кривые высокого качества — инновация в геометрическом моделировании от C3D Labs // *САПР и графика*. 2021. № 5 (295). С. 62–72. EDN: ZFNGJL.
17. Муфтеев В. Г., Максименко А. Э., Ахметшин Р. И. [и др.]. Прикладные САПР и приложения на основе геометрического ядра C3D для проектирования изделий с функциональными кривыми // *Графикон: тр. междунар. конф. по компьютерной графике и зрению*. 2021. № 31. С. 75–87. DOI: 10.20948/graphicon-2021-1-75-87. EDN: NWTYDG.
18. Муфтеев В. Г., Марданов А. Р. Моделирование кривых линий высокого качества // *Прикладная геометрия*. 2006. № 8 (18). С. 37–66. EDN: ZWKAKR.
19. Котов И. И. Начертательная геометрия (на принципах программированного обучения). Москва: Высшая школа, 1970. 384 с.
20. Котов И. И. Аппроксимация пяти- и шестипараметрическими кривыми // *Кибернетика графики и прикладная геометрия поверхностей*. Вып. 12. Труды Московского авиационного института имени С. Орджоникидзе. 1975. Вып. 331. С. 39–49.
21. Компания ZWSOFT. URL: <https://sapr-soft.ru/> (дата обращения: 05.11.2023).
22. BricsCAD. URL: <https://www.bricsys.com/> (дата обращения: 05.11.2023).
23. Autodesk AutoCAD// AutoCAD. URL: <https://www.autodesk.com/products/autocad/overview?term=1-YEAR&tab=subscription> (дата обращения: 05.11.2023).
24. C3D ToolKit. URL: <https://c3dlabs.com/en/products/c3d-toolkit/> (дата обращения: 05.11.2023).
25. Муфтеев В. Г., Марданов А. Р. Изогометрическое моделирование кривых линий и поверхностей высокого качества по базовым критериям плавности // *Информатика, кибернетика и вычислительная техника: сб. науч. тр. ДонГТУ*. 2009. Вып. 10 (153). С. 131–145.
26. Rhino Ceros 3D. <https://www.rhino3d.com/> (дата обращения: 05.11.2023).
27. Alias Design Studio// Autodesk. URL: <https://www.autodesk.com/products/alias-products/overview?term=1-YEAR&tab=subscription> (дата обращения: 05.11.2023).
28. NX CAD and CAM software //Siemens. URL: <https://plm.sw.siemens.com/en-US/nx/> (дата обращения: 05.11.2023).

**МУФТЕЕВ Валериян Гайнизаманович**, кандидат технических наук, ведущий математик-программист ООО «СЗД ЛАБС», г. Москва.

SPIN-код: 7361-8032

AuthorID (РИНЦ): 1006623

ORCID: 0000-0003-4352-3381

Адрес для переписки: [muftejev@mail.ru](mailto:muftejev@mail.ru)

**ЗИГАНШИНА Файруза Тахваловна**, кандидат физико-математических наук, доцент (Россия), и.о. ведущего кафедрой «Комплексный инжиниринг и компьютерная графика» Уфимского государственного нефтяного технического университета (УГНТУ), г. Уфа.

SPIN-код: 6326-3600

AuthorID (РИНЦ): 866017

AuthorID (SCOPUS): 57215302498

Адрес для переписки: [fairusa85@mail.ru](mailto:fairusa85@mail.ru)

**ГУМЕРОВ Вадим Ильдарович**, независимый исследователь, г. Уфа.

Адрес для переписки: [gumerov2008@mail.ru](mailto:gumerov2008@mail.ru)

**НАБИЕВ Рифкат Ильшатович**, кандидат технических наук, доцент кафедры «Эксплуатация наземного транспорта в нефтегазовой промышленности и строительстве (ЭНТ)» УГНТУ, г. Уфа.

SPIN-код: 4883-7004

AuthorID (РИНЦ): 391526

Адрес для переписки: [dizain55@yandex.ru](mailto:dizain55@yandex.ru)

**ЕФИМОВА Гульсия Маратовна**, старший преподаватель кафедры «Комплексный инжиниринг и компьютерная графика» УГНТУ, г. Уфа.

SPIN-код: 3898-7937

AuthorID (РИНЦ): 836063

Адрес для переписки: [gylsia@mail.ru](mailto:gylsia@mail.ru)

#### Для цитирования

Муфтеев В. Г., Зиганшина Ф. Т., Гумеров В. И., Набиев Р. И., Ефимова Г. М. Качественная модификация геометрически ориентированных методов построения пространственных кривых в C3D FairCurveModeler // *Омский научный вестник*. 2024. № 3 (191). С. 48–55. DOI: 10.25206/1813-8225-2024-191-48-55.

Статья поступила в редакцию 31.01.2024 г.

© В. Г. Муфтеев, Ф. Т. Зиганшина, В. И. Гумеров, Р. И. Набиев, Г. М. Ефимова

## QUALITATIVE MODIFICATION OF GEOMETRICALLY ORIENTED METHODS FOR CONSTRUCTING SPATIAL CURVES IN C3D FAIRCURVEMODELER

The article provides a detailed algorithm for improving the C3D FairCurveModeler commands for constructing a class *F* spatial curve with approximation by a rational cubic spline Bezier curve (*NURBzS*-curve) and with approximation by a high-degree *B*-spline curve. The improvement is achieved by optimizing the structure of the Hermite spatial Geometric Determinant when defining it on a spatial virtual curve (*V*-curve) created on a set of double-tap conical curves. The structure of the Hermite Geometric Determinant is improved by changing the direction of the tangents, taking into account the spatial directions of the tangents at the end points of the conic segments at the step of constructing the set of double-tap conical curves.

To demonstrate the modified method, the work shows

1) Improving the quality of a conical spiral modeled by the regular `_Helix` command of CAD systems ZWCAD, BricsCAD, AutoCAD by using the C3D FairCurveModeler command for creating a *NURBzS*-curve.

2) Construction of a *B*-spline curve of the 8th degree on the points of a conical spiral by the C3D FairCurveModeler command and comparison with similar constructions in the CAD systems 'Rhino Ceros D', 'Alias Design Studio', NX which declare the construction of high quality curves (class *A*).

**Keywords:** Spatial spline curve, C3D FairCurveModeler, C3D geometric kernel, conic curves, class *A* curves, class *F* curves.

### References

1. Schoenberg I. J. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part B. On the problem of osculatory interpolation. a second class of analytic approximation formulae // Quart. Appl. Math. 1946. Vol. 4, № 2. P. 112–141. URL: <https://www.ams.org/journals/qam/1946-04-02/S0033-569X-1946-16705-2/S0033-569X-1946-16705-2.pdf> (accessed: 05.11.2023). (In Engl.).

2. Schoenberg I. J. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Part A. On the problem of smoothing or graduation. a first class of analytic approximation formulae // Quart. Appl. Math. 1946. Vol. 4, no. 1. P. 45–99. URL: <https://www.ams.org/journals/qam/1946-04-01/S0033-569X-1946-15914-5/S0033-569X-1946-15914-5.pdf> (accessed: 05.11.2023). (In Engl.).

3. Zavyalov Yu. S. Metody splayn funktsiy [Spline function methods] / Ed. by N. N. Yanenko. Moscow, 1980, 352 p. (In Russ.).

4. Bor K. Prakticheskoye rukovodstvo po splaynam [A practical guide to splines] / trans. from Engl. V. K. Galitskogo, S. A. Shestakova; ed. by V. I. Skurikhina. Moscow, 1985. 304 p. (In Russ.).

5. Zavyalov Yu. S. Splayny v inzhenernoy geometrii [Splines in engineering geometry]. Moscow, 1985. 224 p. (In Russ.).

6. Foks A., Pratt M. Vychislitel'naya geometriya. Primeneniye v proyektirovanii i na proizvodstve [Computational Geometry. Applications in design and manufacturing] / trans. from Engl. G. P. Babenko, G. P. Voskresenskogo. Moscow, 1982. 304 p. (In Russ.).

7. Matematika i SAPR. V 2 kn. [Mathematics and CAD. In 2 bks.] // trans. from Fr. S. D. Chigiryay. Moscow, 1980. Bk. 1. 204 p. ISBN 5-03-000417-3. (In Russ.).

8. Matematika i SAPR. V 2 kn. [Mathematics and CAD. In 2 bks.] // trans. from Fr. V. V. Kovalenko, S. D. Chigiryay. Moscow, 1980. Bk. 2. 260 p. ISBN 5-03-000465-3. (In Russ.).

9. Piegl L., Tiller W. The NURBS Book. 2nd ed. Springer Verlag, 1997. 660 p. (In Engl.).

10. Rodzhers D., Adams Dzh. Matematicheskiye osnovy mashinnoy grafiki [Mathematical foundations of machine graphics] / trans. from Engl. P. A. Monakhova. Moscow, 2001. 604 p. ISBN 5-03-002143-4. (In Russ.).
11. Grebennikov A. I. Metod splaynov i resheniye nekorrektnykh zadach teorii priblizheniy [Method of splines and solution of incorrect problems of approximation theory]. Moscow, 1983. 208 p. (In Russ.).
12. Kvasov B. I. Metody izogeometricheskoy approksimatsii splaynami [Methods of isogeometric approximation by splines]. Moscow, 2006. 416 p. ISBN 978-5-93972-416-6. (In Russ.).
13. Karavelas M. I., Kaklis P. D. Spatial shape-preserving interpolation using — splines // Numerical Algorithms. 2000. No. 23 (2). P. 217–250. (In Engl.).
14. Karim S. A. A., Pang K. V. Shape Preserving Interpolation Using Spline Rational Cubic // Journal of Applied Mathematics. 2016. Vol. 2016 (3). P. 1–14. DOI: 10.1155/2016/4875358. (In Engl.).
15. Mufteev V. G. Modelirovaniye krivyykh vysokogo kachestva na osnove V-krivyykh [Modeling of high quality curved lines] // Prikladnaya geometriya. *Applied Geometry*. 2007. No. 9 (19). P. 25–74. EDN: ZXMXFL. (In Russ.).
16. Mufteev V., Maksimenko A. Funktsional'nyye krivyye vysokogo kachestva — innovatsiya v geometricheskom modelirovanii ot C3D Labs [High quality functional curves — an innovation in geometric modeling from C3D Labs] // SAPR i grafika. *CAD and Graphics*. 2021. No. 5 (295). P. 62–72. EDN: ZFNGJI. (In Russ.).
17. Mufteev V. G., Maksimenko A. E., Akhmetshin R. I. [et al.]. Prikladnyye SAPR i prilozheniya na osnove geometricheskogo yadra C3D dlya proyektirovaniya izdeliy s funktsional'nymi krivymi [Applied CAD systems and applications based on the C3D geometric modeling kernel, used for the design of products with functional curves] // Grafikon. *GraphiCon*. 2021. No. 31. P. 75–87. DOI: 10.20948/graphicon-2021-1-75-87. EDN: NWTYDG. (In Russ.).
18. Mufteev V. G., Mardanov A. R. Modelirovaniye krivyykh liniy vysokogo kachestva [Modeling of high quality curved lines] // Prikladnaya geometriya. *Applied Geometry*. 2006. No. 8 (18). P. 37–66. EDN: ZWKAKR. (In Russ.).
19. Kotov I. I. Nachertatel'naya geometriya (na printsipakh programmirovannogo obucheniya) [Descriptive geometry (based on the principles of programmed learning)]. Moscow, 1970. 384 p. (In Russ.).
20. Kotov I. I. Approksimatsiya pyati- i shestiparametricheskimi krivymi [Approximation by five- and six-parameter curves] // Kibernetika grafiki i prikladnaya geometriya poverkhnostey. Vyp. 12. Trudy Moskovskogo aviatsionnogo instituta imeni S. Ordzhonikidze. *Graphics Cybernetics and Applied Surface Geometry. Issue 12. Proceedings of the Moscow Aviation Institute named after S. Ordzhonikidze*. 1975. Issue 331. P. 39–49. (In Russ.).
21. Kompaniya ZWSOFT. Company ZWSOFT. URL: <https://sapr-soft.ru/> (accessed: 05.11.2023). (In Russ.).
22. BricsCAD. URL: <https://www.bricsys.com/> (accessed: 05.11.2023). (In Engl.).
23. Autodesk AutoCAD // AutoCAD. URL: <https://www.autodesk.com/products/autocad/overview?term=1-YEAR&tab=subscription> (accessed: 05.11.2023). (In Engl.).
24. C3D Toolkit//C3D Labs. URL: <https://c3dlabs.com/en/products/c3d-toolkit/> (accessed: 05.11.2023). (In Engl.).
25. Mufteev V. G., Mardanov A. R. Izogeometricheskoye modelirovaniye krivyykh liniy poverkhnostey vysokogo kachestva po bazovym kriteriyam plavnosti [Isogeometric modeling of curved lines and surfaces of high quality by basic smoothness criteria] // Informatika, kibernetika i vychislitel'naya tekhnika. *Informatics, Cybernetics and Computer Science*. 2009. Issue 10 (153). P. 131–145. (In Russ.).
26. Rhino Ceros 3D. URL: <https://www.rhino3d.com/> (accessed: 05.11.2023). (In Engl.).
27. Alias Design Studio// Autodesk. URL: <https://www.autodesk.com/products/alias-products/overview?term=1-YEAR&tab=subscription> (accessed: 05.11.2023). (In Engl.).
28. NX CAD and CAM software // Siemens. URL: <https://plm.sw.siemens.com/en-US/nx/> (accessed: 05.11.2023). (In Engl.).

**MUFTEEV Valeriy Gajnzamanovich**, Candidate of Technical Sciences, Leading Mathematician Programmer, LLC «C3D Labs», Moscow.

SPIN-code: 7361-8032

AuthorID (RSCI):1006623

ORCID: 0000-0003-4352-3381

Correspondence address: [muftejev@mail.ru](mailto:muftejev@mail.ru)

**ZIGANSHINA Fairuza Tahvalovna**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of Integrated Engineering and Computer Graphics Department, Ufa State Petroleum Technological University (USPTU), Ufa.

SPIN-code: 6326-3600

AuthorID (RSCI): 866017

AuthorID (SCOPUS): 57215302498

Correspondence address: [fairusa85@mail.ru](mailto:fairusa85@mail.ru)

**GUMEROV Vadim Ildarovich**, Independent Researcher, Ufa.

Correspondence address: [gumerov2008@mail.ru](mailto:gumerov2008@mail.ru)

**NABIEV Rifkat Ilshatovich**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of Management and Service in Technical Systems Department, USPTU, Ufa.

SPIN-code: 4883-7004

AuthorID (RSCI): 391526

Correspondence address: [dizain55@yandex.ru](mailto:dizain55@yandex.ru)

**EFIMOVA Gulsia Maratovna**, Senior Lecturer of Integrated Engineering and Computer Graphics Department, USPTU, Ufa.

SPIN-code: 3898-7937

AuthorID (RSCI): 836063

Correspondence address: [gylsia@mail.ru](mailto:gylsia@mail.ru)

#### For citations

Mufteev V. G., Ziganshina F. T., Gumerov V. I., Nabiev R. I., Efimova G. M. Qualitative modification of geometrically oriented methods for constructing spatial curves in C3D FairCurveModeler // Omsk Scientific Bulletin. 2024. No. 3 (191). P. 48–55. DOI: 10.25206/1813-8225-2024-191-48-55.

Received January 31, 2024.

© V. G. Mufteev, F. T. Ziganshina, V. I. Gumerov, R. I. Nabiev, G. M. Efimova