

УДК 514.7  
DOI: 10.25206/1813-8225-2023-188-5-12  
EDN: VFPSL

К. Л. ПАНЧУК  
Т. М. МЯСОЕДОВА

Омский государственный  
технический университет,  
г. Омск

## ПОВЕРХНОСТЬ НЕЛИНЕЙНОГО ВРАЩЕНИЯ

В работе рассмотрены геометрическая схема, математическая модель и алгоритм формообразования поверхности нелинейного вращения. Известно, что в евклидовой геометрии и механике преобразование вращения является линейным, при этом расстояние и угол являются его инвариантами. Авторами предложена геометрическая схема нелинейного вращения, в которой осью вращения служит гладкая пространственная кривая, а объектом вращения является также гладкая линия. Доказаны несколько предложений, лемма и теорема, которые позволяют формировать исходные данные в задаче нелинейного вращения, решением которой являются параметрические уравнения гладких поверхностей. Результаты исследований позволяют расширить многообразие циклических поверхностей в существующей классификации аналитических поверхностей. Они также могут быть полезными при создании САПР, в которых предусматривается проектирование поверхностных форм изделий машиностроения, строительства, архитектуры и других практических областей, на основе циклических поверхностей.

**Ключевые слова:** гладкая кривая, подвижный трехгранник, поверхность нелинейного вращения, алгоритм формообразования, циклическая поверхность.

**Введение.** В геометрии и кинематике известно понятие «вращение». В евклидовой геометрии оно связано с ортогональным преобразованием «вращение», в результате применения которого геометрический объект приобретает новое положение на плоскости или в пространстве, достигаемое поворотом вокруг точки или прямой линии. В кинематике рассматривается вращательное движение твердого тела вокруг точки — центра вращения или вокруг прямой линии — оси вращения, сопровождаемое кинематическими характеристиками точек тела: скоростями и ускорениями. При вращении объекта вокруг прямой линии каждая его точка описывает круговую траекторию в некоторой плоскости. Множество таких плоскостей представляет собой пучок с несобственной осью, перпендикулярной оси вращения объекта, т.е. пучок параллельных плоскостей. Представляет интерес более сложный случай, когда плоскости круговых траекторий точек образуют нелинейный пучок, что возможно в случае криволинейной оси вращения, для которой этот

пучок представляет собой множество её нормальных плоскостей. При этом осью вращения и центром круговой траектории точки объекта служит соответствующая касательная и её точка касания с криволинейной осью. Известно несколько работ, посвященных исследованию нелинейного вращения и его практическим приложениям. В работах [1, 2] рассматривается алгебраический подход для построения обобщенной поверхности вращения, основанный на введении функций, формирующих алгоритм аналитического описания взаимосвязи геометрий двух линий — линий центров вращения и линии радиусов. При этом вне рассмотрения оставлен анализ влияния геометрии и взаимного расположения указанных двух линий на геометрию конструируемой обобщенной поверхности вращения. В работах [3, 4] введено понятие «квативращение», как обобщение понятия «вращение», применительно к криволинейной оси вращения, в качестве которой используются кривые второго порядка. В работах не рассматривалось использо-

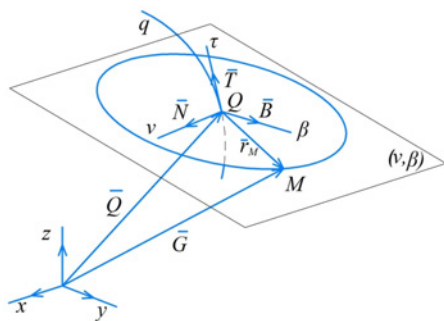


Рис. 1. Схема образования траектории вращения точки  $M$

вание пространственных кривых в качестве осей вращения.

В настоящей работе предлагается геометрическая схема формообразования поверхности нелинейного вращения для общего случая задания базовых элементов схемы, а именно криволинейной оси вращения и образующей линии. Рассмотрены числовые примеры, иллюстрирующие работу алгоритма формообразования в соответствии с предложенной схемой. Предложенная поверхность нелинейного вращения относится к классу циклических поверхностей, широко используемых в качестве динамических поверхностей, взаимодействующих с рабочей средой (газы, жидкости, сыпучие материалы). Они принадлежат к многообразию каналовых поверхностей [5, 6], использование которых в современной промышленности часто сопряжено с возникновением новых практических задач, например, оптимальное размещение каналковых поверхностей в ограниченных и сложноорганизованных пространствах [7, 8]. При этом в качестве заданной принимается ось каналковой поверхности, а образующий поверхность элемент представляет собой линию или дискретный ряд точек, ограничивающих форму поверхности по условиям окружающей её пространственной обстановки. Для решения таких задач требуются новые подходы, методы и алгоритмы формообразования каналковых, в том числе циклических, поверхностей.

**Математическая модель поверхности нелинейного вращения.** Рассматривается геометрическая схема формообразования поверхности нелинейного вращения (ПНВ) и даётся её аналитическое описание. Для этих целей используется известное в дифференциальной геометрии метод подвижного (сопровождающего) трёхгранника Френе, изложенный в фундаментальных работах математиков-геометров: В. Бляшке [9], Э. Картана [10], Д. Н. Зейлигера [11] и мн. др. В отечественных исследованиях в области инженерной геометрии и её практических приложений этот метод достаточно широко представлен в работах [5, 6, 12–16].

**1. Вращение точки относительно криволинейной оси.** Вращение точки выполняется в нормальной плоскости заданной криволинейной оси вокруг центра — точки кривой, через которую проходит нормальная плоскость. В качестве оси нелинейного вращения используется гладкая кривая  $q$ :  $\bar{Q}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ ,  $t \in [t_0, t_n] \in \mathbf{R}$ ,  $\bar{Q}'(t) = \frac{d\bar{Q}}{dt} \neq 0$ . Схема вращения точки приведена на рис. 1.

**1.1. Плоскость вращения точки.** Построим подвижный трехгранник кривой  $q$  в её точке  $Q$ :

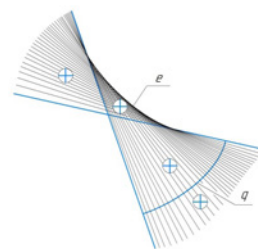


Рис. 2. Проекция областей допустимых положений точки

$$\bar{T}(t) = \{x_T, y_T, z_T\} = \frac{\bar{Q}(t)}{|\bar{Q}'(t)|},$$

$$\bar{Q}'(t) = \{x'(t), y'(t), z'(t)\},$$

$$\bar{B}(t) = \{x_B, y_B, z_B\} = \frac{\bar{Q}'(t) \times \bar{Q}''(t)}{|\bar{Q}'(t) \times \bar{Q}''(t)|},$$

$$\bar{Q}''(t) = \frac{d^2\bar{Q}}{dt^2} = \{x''(t), y''(t), z''(t)\},$$

$$\bar{N}(t) = \{x_N, y_N, z_N\} = \bar{B} \times \bar{T}.$$

Принадлежность точки  $M(x_M, y_M, z_M)$  к нормальной плоскости  $(v, \beta)$  линии  $q$  выражается уравнением:

$$F(t) = \bar{Q}'(t) \cdot (\bar{G} - \bar{Q}(t)) = 0, \quad (1)$$

где  $\bar{G} = \{x_M, y_M, z_M\}$ .

Из уравнения  $F(t) = 0$  следует значение параметра  $t = t_Q \in [t_0, t_n]$ , которое соответствует заданной точке  $M$  и определяет положение нормальной плоскости  $(v, \beta)$ .

Очевидно, не для каждой точки  $M$  пространства можно построить нормальную плоскость  $(v, \beta)$ . Рис. 2 даёт некоторое представление о сути этой проблемы. Предположим, что  $q$  — сегмент плоской криволинейной оси вращения. Тогда все нормальные плоскости сегмента  $q$  образуют отсек пучка плоскостей, огибающей которых служит отсек цилиндрической поверхности с направляющей линией в форме сегмента эволюты  $e$  линии  $q$ . Очевидно, допустимые положения точки  $M$  для выполнения ею вращения относительно сегмента криволинейной оси  $q$  находятся в тех частях пространства  $R^3$ , ортогональные проекции которых на плоскости оси вращения  $q$  отмечены знаком  $\oplus$ .

В случае если ось нелинейного вращения  $q$  — пространственная кривая, то положение точек пространства, для которых допустимо нелинейное вращение относительно  $q$ , определяется более сложной геометрической конфигурацией, разделяющей пространство на допустимые и недопустимые области положения этих точек. Конфигурация включает следующие элементы: пространственную ось вращения  $q$ , нелинейный пучок нормальных плоскостей оси  $q$  и торсовую поверхность, огибающую этих нормальных плоскостей.

**1.2. Расстояние между точками пространства при их вращении относительно криволинейной оси.** Вектор  $\bar{r}_M$  точки  $M$  имеет следующие проекции в локальной системе координат  $Q\tau\beta$ , образованной ортами подвижного трехгранника:  $\bar{r}_M = \{\tau_M = 0, v_M, \beta_M\}$ . Матрица перехода из неподвижной декартовой системы координат  $Oxyz$  в подвижную локальную систему координат  $Q\tau\beta$

с началом в точке  $Q$  и обратная матрица имеют соответственно вид:

$$A(t) = \begin{bmatrix} x_T & y_T & z_T \\ x_N & y_N & z_N \\ x_B & y_B & z_B \end{bmatrix}, \quad A^{-1}(t) = \begin{bmatrix} x_T & x_N & x_B \\ y_T & y_N & y_B \\ z_T & z_N & z_B \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Из схемы на рис. 1 следует:

$$\bar{G} = A^{-1} \cdot \bar{r}_M + \bar{Q}, \quad \bar{r}_M = A(\bar{G} - \bar{Q}),$$

или в развернутом виде:

$$\begin{bmatrix} \tau_M = 0 \\ v_M \\ \beta_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_T & y_T & z_T \\ x_N & y_N & z_N \\ x_B & y_B & z_B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_M - x \\ y_M - y \\ z_M - z \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где  $\bar{G}$  — радиус-вектор точки  $M$  в системе координат  $Oxuz$ . Очевидно,

$$r_M = |\bar{r}_M| = |\bar{G} - \bar{Q}| = \sqrt{\tau_M^2 + v_M^2 + \beta_M^2}.$$

Уравнения траектории  $s_M \subset (v, \beta)$  вращения точки  $M$  в локальной системе координат  $Q\tau\beta$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \tau_{(M)} &= 0, \quad v_{(M)} = r_M \cdot \cos(\lambda \cdot 2\pi), \\ \beta_{(M)} &= r_M \cdot \sin(\lambda \cdot 2\pi), \quad \lambda \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (4)$$

В уравнении (4) имеет место:  $v_{(M)} = v_{(M)}(t = t_Q, \lambda)$ ,  $\beta_{(M)} = \beta_{(M)}(t = t_Q, \lambda)$ , где  $t_Q$  — значение параметра  $t$ , полученное из уравнения (1). Уравнения окружности (4) позволяют получить уравнение трубчатой поверхности при  $r_M = const$ :

$$\begin{aligned} \bar{G}(t, \lambda) &= A^{-1}(t) \cdot \bar{r}_{(M)}(\lambda) + \bar{Q}(t), \\ |\bar{r}_{(M)}| &= |\bar{r}_M| = r_M = const, \\ \bar{r}_{(M)} &= \{\tau_{(M)} = 0, v_{(M)}, \beta_{(M)}\}. \end{aligned}$$

**Предложение 1:** поворот двух различных точек евклидова пространства относительно гладкой кривой оси на равные углы изменяет расстояние между точками, если только точки не принадлежат одной и той же нормальной плоскости кривой.

**Доказательство.** Пусть  $M_1$  и  $M_2$  — точки в нормальных плоскостях соответственно  $(v_1, \beta_1)$  и  $(v_2, \beta_2)$  исходной криволинейной оси вращения  $q$  (рис. 3). Расстояние между ними  $\rho(M_1, M_2)$ . Повернем обе точки на один и тот же угол  $\varphi$  — каждую в своей нормальной плоскости  $(v_1, \beta_1)$  и  $(v_2, \beta_2)$  соответственно. Поворот выполним относительно центров  $Q_1 = (v_1, \beta_1) \cap q$  и  $Q_2 = (v_2, \beta_2) \cap q$  по круговым траекториям. Укажем расстояние  $\rho(M'_1, M'_2)$ , полученное в результате равных поворотов точек  $M_1$  и  $M_2$ . Докажем, что  $\rho(M_1, M_2) \neq \rho(M'_1, M'_2)$ . Предположим, что  $\rho(M_1, M_2) = \rho(M'_1, M'_2)$ . Две четверки точек в пространстве, а именно:  $M_2, Q_2, Q_1, M_1$  и  $M'_2, Q'_2, Q'_1, M'_1$ , можно представить как вершины образующихся тетраэдров  $M_2, Q_2, Q_1, M_1$  и  $M'_2, Q'_2, Q'_1, M'_1$ , полученных один из другого некоторым движением с сохранением расстояния  $\rho(M_1, M_2) = \rho(M'_1, M'_2)$ . В этом движении общее ребро тетраэдров  $Q_1 Q_2$  неподвижно, а пары точек  $M_1$  и  $M'_1$ ,  $M_2$  и  $M'_2$  образованы вращением на один и тот же угол  $\varphi$  относительно центров  $Q_1$  и  $Q_2$ , принадлежащих ребру. В соответствии с известной в теоретической механике теорией движения твердого тела, движение тела определя-

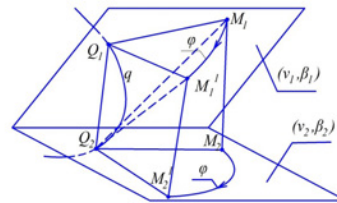


Рис. 3. К доказательству неравенства  $\rho(M_1, M_2) \neq \rho(M'_1, M'_2)$

ется движением его трех различных точек, не принадлежащих одной прямой.

В рассматриваемом случае две точки  $Q_1$  и  $Q_2$ , как и все точки прямой  $(Q_1, Q_2)$ , закреплены. Поэтому движение твердого тела — тетраэдра  $M_1, M_2, Q_2, Q_1$ , для всех остальных его точек представляет собой вращение вокруг неподвижной оси  $(Q_1, Q_2)$ , в котором сохраняется расстояние для любой пары его различных точек, в том числе  $\rho(M_1, M_2) = \rho(M'_1, M'_2)$ . Но поскольку  $(Q_1, Q_2)$  — ось вращения, то плоскости круговых траекторий всех точек тетраэдра  $M_1, M_2, Q_2, Q_1$  должны быть перпендикулярны оси вращения  $(Q_1, Q_2)$ , т.е. должны образовывать пучок параллельных плоскостей, и в этом пучке имеет место  $(v_1, \beta_1) \parallel (v_2, \beta_2)$ . Получаем противоречие, поскольку нормальные плоскости исходной пространственной кривой  $q$  образуют нелинейный пучок, в котором плоскости  $(v_1, \beta_1)$  и  $(v_2, \beta_2)$  не параллельны. Таким образом, предположение о том, что  $\rho(M_1, M_2) = \rho(M'_1, M'_2)$  неверно. Поэтому  $\rho(M_1, M_2) \neq \rho(M'_1, M'_2)$ .

**2. Нелинейное вращение линии.** Нелинейное вращение линии, как однопараметрического множества точек, представляет собой вращение каждой её точки относительно заданной криволинейной оси. Нелинейное вращение линии формирует некоторую циклическую поверхность, которую назовём поверхностью нелинейного вращения (ПНВ). Целесообразность введения названия «Поверхность нелинейного вращения» обусловлена следующими обстоятельствами:

1. Нормальные плоскости криволинейной оси вращения, которым принадлежат круговые траектории точек образующей линии, образуют нелинейный пучок.

2. Образом прямой линии при её вращении относительно криволинейной оси является кривая линия (см. ниже рассмотренный пример 1).

Пусть гладкая кривая линия (образующая)  $q$ :  $\bar{G}(l) = \{x(l), y(l), z(l)\}$ ,  $l \in [l_0, l_n] \in \mathbf{R}$ ,  $\bar{G}'(l) = \frac{d\bar{G}}{dl} \neq 0$  вращается относительно гладкой криволинейной оси  $q$ :  $\bar{Q}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ ,  $t \in [t_0, t_n]$ ,  $\bar{Q}'(t) \neq 0$  (рис. 4).

В этом вращении точка  $M \in \bar{G}(l)$  принадлежит нормальной плоскости  $(v, \beta)$  оси вращения  $\bar{Q}(t)$  в её точке  $Q$ . Выразим это обстоятельство уравнением:

$$\bar{Q}'(t) \cdot (\bar{G}(l) - \bar{Q}(t)) = 0. \quad (5)$$

Из уравнения (5) следует функциональная зависимость  $l = f(t)$ , при этом выполняется условие  $f'(t) = \frac{df}{dt} \neq 0$ . Действительно, предположим, что  $f'(t) = 0$ . Тогда  $f(t) = a$ , где  $a$  — некоторая константа. В таком случае вектор-функция  $\bar{G}(l) = \bar{G}(f(t)) = \bar{G}(l = a)$  будет представлять собой некоторый постоянный вектор, соответствующий точке пространства, для которого характерно  $\bar{G}'(l) = 0$ . Но поскольку изначально была введена не точка, а гладкая линия  $q$ :

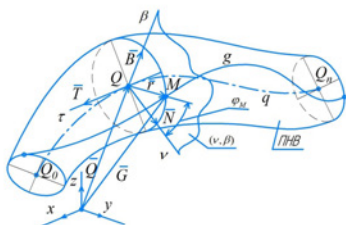


Рис. 4. Схема образования ПНВ

$\bar{G}(I) = \{x(I), y(I), z(I)\}$ ,  $I \in [I_0, I_n] \in \mathbf{R}$ ,  $\bar{G}'(I) \neq 0$ , то из полученного противоречия следует справедливость утверждения того, что  $f'(t) \neq 0$ . Таким образом, доказано **предложение 2**: функция  $f(t)$  из уравнения (5) является гладкой.

Рассмотренное предложение обеспечивает гомеоморфное соответствие числовых отрезков  $[I_0, I_n]$  и  $[t_0, t_n]$ , из которого следует такое же соответствие точек пространственных кривых линий  $\bar{Q}(t)$  и  $\bar{G}(I)$ .

Исходя из принятой схемы формообразования ПНВ (рис. 4), получаем

$$\bar{r}(t) = A(t) \cdot (\bar{G}(f(t)) - \bar{Q}(t)), \quad (6)$$

где  $\bar{r}(t)$  — радиус-вектор точки образующей линии  $\bar{G}(I)$  в локальной системе координат  $Q\tau v\beta$ ,  $A(t)$  — матрица (2) перехода от неподвижной системы координат  $Oxyz$  к локальной системе координат  $Q\tau v\beta$  подвижного трехгранника, образованного ортами  $\bar{T}(t)$ ,  $\bar{B}(t)$  и  $\bar{N}(t)$ . Определим угловое положение текущей точки  $M$  образующей кривой линии  $\bar{G}(I)$  в локальной системе координат  $Q\tau v\beta$ :  $\text{tg}(\varphi(t_Q)) = \frac{\beta(t_Q)}{v(t_Q)}$ , где  $\beta(t_Q)$  и  $v(t_Q)$  — декартовы координаты точки  $M$  в локальной системе координат,  $t_Q$  — текущее значение параметра  $t$  в точке  $Q$  на оси вращения  $\bar{Q}(t)$ , соответствующее значению  $I_M$  параметра  $I = f(t)$  точки  $M$  на образующей  $\bar{G}(I)$ .

Уравнение текущей круговой траектории  $c_M$  точки  $M$  при  $t = t_Q$ ,  $t_Q \in [t_0, t_n]$ , имеет вид:

$$\begin{aligned} v_M(t_Q, \lambda) &= r(t_Q) \cdot \cos \psi(t_Q, \lambda); \\ \beta_M(t_Q, \lambda) &= r(t_Q) \cdot \sin \psi(t_Q, \lambda), \end{aligned} \quad (7)$$

где  $r(t_Q) = |\bar{r}(t_Q)|$ ,  $\psi(t_Q, \lambda) = \varphi(t_Q) + 2\pi \cdot \lambda$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ . Уравнение непрерывного семейства окружностей  $\{c_M\}$  в системе координат  $Oxyz$  имеет вид:

$$\bar{W}(t, \lambda) = A^{-1}(t) \cdot \bar{r}(t, \lambda) + \bar{Q}(t), \quad (8)$$

где  $\bar{r}(t, \lambda) = \{\tau = 0, v(t, \lambda), \beta(t, \lambda)\}$ . Уравнение (8) описывает ПНВ с образующей линией  $\bar{G}(I)$  и криволинейной осью  $\bar{Q}(t)$ . Схема алгоритма формообразования ПНВ представлена на рис. 5.

Обратимся к уравнению (6). Оно описывает кривую  $g$ , принадлежащую нормальной плоскости  $(v, \beta)$  криволинейной оси  $\bar{Q}(t)$ . Эта кривая представляет собой след образующей линии  $\bar{G}(I)$ , формируемый в процессе последовательного пересечения нормальной плоскости  $(v, \beta)$  подвижного трехгранника с линией  $\bar{G}(I)$ . Из уравнения (6) следует:

$$\bar{r}'_t = A' \cdot (\bar{G}(f(t)) - \bar{Q}(t)) + A(t) \cdot (\bar{G}'_t \cdot f'_t - \bar{Q}'_t), \quad (9)$$

$$\text{где } \bar{r}'_t = \frac{d\bar{r}}{dt}, \quad A' = \frac{dA}{dt}, \quad \bar{G}'_t \cdot f'_t = \frac{\partial \bar{G}}{\partial f} \cdot \frac{df}{dt}, \quad \bar{Q}'_t = \frac{d\bar{Q}}{dt}.$$

Рассмотрим оба слагаемых в уравнении (9). Множитель  $A' \neq 0$ , поскольку это производная матрицы-функции, элементами которой являются направляющие косинусы ортов  $\bar{T}(t)$ ,  $\bar{B}(t)$  и  $\bar{N}(t)$  подвижного трёхгранника оси  $\bar{Q}(t)$ . Множитель  $(\bar{G}(f(t)) - \bar{Q}(t))$  — это ненулевой вектор на прямой, соединяющей соответственные точки  $Q \in \bar{Q}(t)$  и  $M \in \bar{G}(f(t))$  линий  $q$  и  $g$ , заведомо не пересекающихся между собой. Производные  $\bar{G}'_t$ ,  $f'_t$  и  $\bar{Q}'_t$  — каждая не равна нулю:  $\bar{G}'_t$  и  $\bar{Q}'_t$  не равны нулю, поскольку изначально рассматриваются гладкие линии  $\bar{Q}(t)$  и  $\bar{G}(I)$ , где

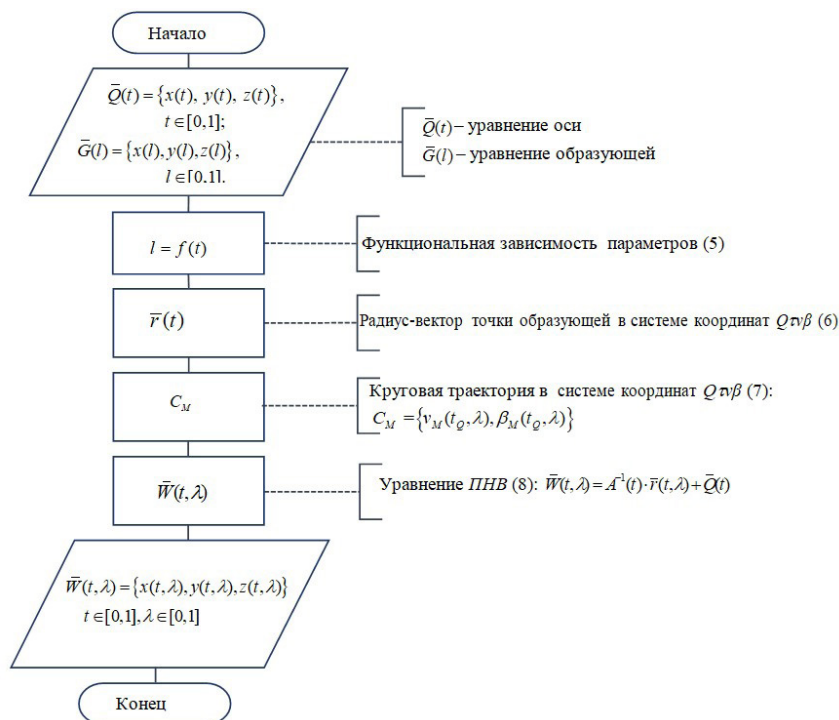


Рис. 5. Схема алгоритма формообразования ПНВ

$l = f(t)$ ;  $f'_t \neq 0$  по предложению 2. Множитель  $(\bar{G}'_t \cdot f'_t - \bar{Q})$  описывает разность двух касательных векторов в соответственных точках  $M \in \bar{G}(f(t))$  и  $Q \in \bar{Q}(t)$ , которая может быть нулевым вектором, что не влияет, с учетом неравенства  $A' \cdot (\bar{G}(f(t)) - \bar{Q}(t)) \neq 0$ , на результат  $\bar{r} \neq 0$ . Таким образом, доказано **предложение 3**: след  $\bar{r}(t)$  гладкой образующей  $\bar{G}(l)$ , формируемый в нормальной плоскости  $(v, \beta)$  гладкой оси вращения  $\bar{Q}(t)$ , является гладкой линией.

Уравнение (8) при фиксированном значении параметра  $\lambda = a \in [0,1]$  описывает некоторую пространственную кривую в системе координат  $Oxuz$ :

$$\bar{W}(t, \lambda = a) = A^{-1}(t) \cdot \bar{r}(t, \lambda = a) + \bar{Q}(t). \quad (10)$$

Эта кривая получена из образующей линии  $\bar{G}(l)$  поворотом каждой её точки в соответствующей этой точке нормальной плоскости  $(v, \beta)$  криволинейной оси  $\bar{Q}(t)$  на угол  $\psi(t, \lambda = a) = \varphi(t) + 2\pi \cdot a$ . Вектор-функция  $\bar{r}(t, \lambda = a)$  в уравнении (10) описывает плоскую кривую  $g_a$  — след кривой (10) в нормальной плоскости  $(v, \beta)$ . Как показано выше, уравнение кривой  $g_a$  может быть записано в проекционном виде

$$\bar{r}(t, \lambda = a) = \{v(t, \lambda = a), \beta(t, \lambda = a)\}$$

в локальной системе координат  $Q\tau v\beta$ , где

$$\begin{aligned} v(t, \lambda = a) &= r(t) \cdot \cos \psi(t, \lambda = a); \\ \beta(t, \lambda = a) &= r(t) \cdot \sin \psi(t, \lambda = a); \\ r(t) &= |\bar{r}(t)|. \end{aligned}$$

Рассмотрим производную  $\bar{r}'(t, \lambda = a) = \{v'(t, \lambda = a), \beta'(t, \lambda = a)\}$ , где

$$\begin{aligned} \bar{v}'(t, \lambda = a) &= \frac{d\bar{v}}{dt} = \\ &= \bar{r}'(t) \cdot \cos \psi(t, \lambda = a) - r(t) \sin \psi(t, \lambda = a) \cdot \varphi'(t), \\ \bar{\beta}'(t, \lambda = a) &= \frac{d\bar{\beta}}{dt} = \\ &= \bar{r}'(t) \cdot \sin \psi(t, \lambda = a) + r(t) \cos \psi(t, \lambda = a) \cdot \varphi'(t). \end{aligned}$$

Очевидно,  $r(t) \neq 0$ ,  $r'(t) \neq 0$ , поскольку из предложения 3 следует  $\bar{r}'(t) \neq 0$ . Кроме того, из гладкости функции  $\bar{r}(t) = \{v(t), \beta(t)\}$  следует гладкость функции  $\varphi = \arctg\left(\frac{\beta(t)}{v(t)}\right)$  на отрезке  $[t_0, t_n]$ . В результате получаем, что  $\bar{r}'(t, \lambda = a) \neq 0$ . Таким образом, доказано **предложение 4**: след  $\bar{r}(t, \lambda = a)$  кривой линии  $\bar{W}(t, \lambda = a)$ , формируемый в нормальной плоскости  $(v, \beta)$  гладкой криволинейной оси  $\bar{Q}(t)$ , является гладкой кривой.

Рассмотрим примеры.

**Пример 1.** Задана криволинейная ось  $q$  уравнением  $\bar{Q}(t) = \{50t^2, 100t, -40t^2\}$ ,  $t \in [0,1]$ . Образующая линия  $g$  задана уравнением прямой линии  $\bar{G}(l) = \{20l + 60, 100l, 15l - 15\}$ ,  $l \in [0,1]$ . Требуется построить ПНВ.

**Решение.** Схема алгоритма формообразования ПНВ представлена на рис. 5. По уравнению (5) определяем функциональную зависимость параметров  $l = f(t)$ :  $l = \frac{t(41t^2 + 26)}{2(8t + 25)}$ . На основании уравнения (7) формируется текущая

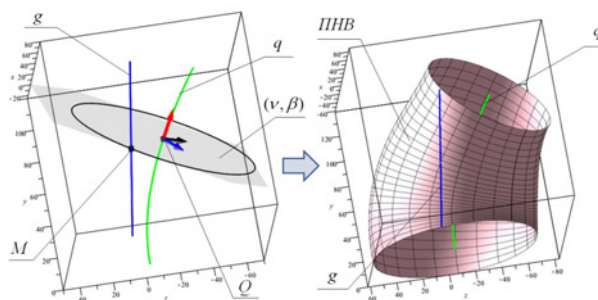


Рис. 6. Формообразование ПНВ на основе вращения прямой линии

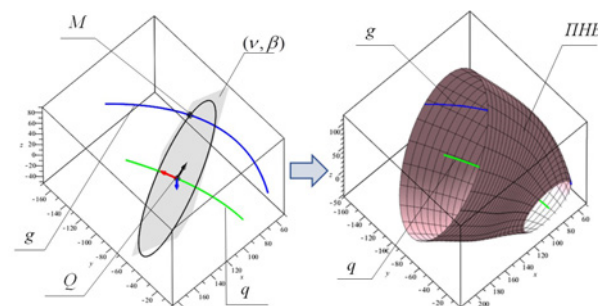


Рис. 7. Формообразование ПНВ на основе вращения кривой линии

круговая траектория  $c_M$  точки  $M$  образующей линии при  $t = t_Q$ ,  $t_Q \in [t_0, t_n]$ :  $v_M = H \cdot \cos(2\pi \cdot \lambda)$ ,  $\beta_M = H \cdot \sin(2\pi \cdot \lambda)$ ,

$$\begin{aligned} H &= \frac{2,5}{8t_Q + 25} \times \\ &\times \sqrt{672441t_Q^6 - 100t_Q(5248t_Q^4 + 65t_Q^2 - 3462) - \\ &- 4t_Q^2(68183t_Q^2 + 40271) + 382500}, \end{aligned}$$

где  $\lambda \in [0,1]$ . Используя зависимость (8), определяем уравнение искомой ПНВ:

$$\bar{W}(t, \lambda) = (x(t, \lambda), y(t, \lambda), z(t, \lambda)), t \in [0,1], \lambda \in [0,1].$$

Визуализация результатов вычислений приведена на рис. 6.

**Пример 2.** Задана криволинейная ось вращения  $q$  уравнением  $\bar{Q}(t) = \{50t^2, 100t, -40t^2\}$ ,  $t \in [0,1]$ . Образующая линия  $g$  задана уравнением  $\bar{G}(l) = \{50l^2 + 50, -100l - 60, l\}$ ,  $l \in [0,1]$ . Требуется построить ПНВ.

**Решение.** Уравнение ПНВ определяется в соответствии с алгоритмом, приведенным на рис. 5. По уравнению (5) выразим функциональную зависимость параметров  $l = f(t)$ :

$$l = \frac{\sqrt{625(41t^4 + 25) + 4t(11719t - 4625)} - (t + 125)}{125t}$$

По уравнению (6) определяем радиус-вектор  $\bar{r}(t)$  точки образующей линии  $\bar{G}(f(t))$  в локальной системе координат  $Q\tau v\beta$ :  $\bar{r}(t) = (x_r(t), y_r(t), z_r(t))$ . Исходя из уравнений (7) и (8), определяем уравнение ПНВ:  $\bar{W}(t, \lambda) = (x(t, \lambda), y(t, \lambda), z(t, \lambda))$ ,  $t \in [0,1], \lambda \in [0,1]$ .

Визуализация результатов вычислений приведена на рис. 7.

Предложение 4 позволяет сформулировать лемму.

**Лемма:** кривая линия  $\overline{W}(t, \lambda = a)$ , как текущее положение гладкой образующей кривой  $\overline{G}(l)$  при её вращении относительно гладкой криволинейной оси  $\overline{Q}(t)$ , является гладкой кривой.

Действительно, из уравнения (10), с учетом вышесказанного, следует

$$\begin{aligned} \overline{W}'(t, \lambda = a) &= \frac{d\overline{W}}{dt} = \\ &= (A^{-1}(t))' \cdot \overline{r}(t, \lambda = a) + A^{-1}(t) \cdot \overline{r}'(t, \lambda = a) + \overline{Q}'(t) \neq 0. \end{aligned}$$

Предложения 3, 4 и лемма позволяют сформулировать и доказать теорему.

**Теорема:** при вращении гладкой кривой линии относительно гладкой криволинейной оси образуется гладкая ПНВ, если эти линии не имеют общих точек.

**Доказательство.** Из уравнения ПНВ (8) следует существование на ней координатной сети  $(t, \lambda)$ , состоящей из семейства линий  $(t)$ , представляющего собой множество гладких линий  $\overline{W}(t, \lambda = a), a \in [0, 1]$ , и семейства гладких линий  $(\lambda)$ , представляющего собой множество окружностей  $\overline{W}(t = t_0, \lambda), t_0 \in [t_0, t_n]$ . Следовательно, в любой точке  $(t, \lambda)$  на ПНВ существует вектор нормали  $\overline{N} = [\overline{W}'_t, \overline{W}'_\lambda]$  к поверхности, отличный от нулевого вектора.

**Выводы.** Исследование закономерностей и особенностей формообразования одних из наиболее востребованных на практике нормальных циклических поверхностей (НЦП) позволило получить следующие результаты:

1. Разработаны общая геометрическая схема и общий алгоритм формообразования ПНВ, которые позволяют существенно расширить многообразие известных НЦП [17–22].

2. Доказанные в работе предложения, лемма и теорема определяют требования к исходным данным в задаче формообразования НЦП как ПНВ.

3. Рассмотренные вычислительные примеры подтверждают работоспособность и вычислительную эффективность предложенного алгоритма формообразования НЦП.

Предложенное математическое описание процесса формообразования НЦП, использующее параметрические уравнения получаемых поверхностей, может быть успешно применено в создаваемых САПР, в которых предусматривается проектирование поверхностных форм изделий машиностроения, строительства, архитектуры и других практических областей, на основе циклических поверхностей.

#### Библиографический список

1. Григорьев М. И. Построение обобщенных поверхностей вращения // Семинар «DNA&CAGD». Избранные доклады. 2007. С. 1–7. URL: <http://dha.spb.ru/PDF/GeneralizedRevolution.pdf> (дата обращения: 27.02.2023).
2. Григорьев М. И., Малозёмов В. Н. Составные кривые и поверхности Безье. Аналитический подход. Lambert Academic Publishing, 2010. 132 с. ISBN 978-3-8433-0323-1.
3. Беглов И. А., Рустамян В. В. Метод вращения геометрических объектов вокруг криволинейной оси // Геометрия и графика. 2017. № 3. С. 45–50. DOI: 10.12737/article\_59bfa4eb0bf488.99866490. EDN: ZGWEMP.
4. Beglov I. A. Computer geometric modeling of quasi-rotation surfaces // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1901. P. 012057. DOI: 10.1088/1742-6596/1901/1/012057.
5. Осипов В. А. Машинные методы проектирования непрерывно-каркасных поверхностей. Москва: Машиностроение, 1979. 248 с.

6. Осипов В. А., Осипова Л. И. Теоретические основы каркасно-кинематического метода направляющей линии // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 1980. № 4. С. 48–53.

7. Маркин Л. В., Корн Г. В., Куи М. Х. [и др.]. Дискретные модели геометрического моделирования компоновки авиационной техники // Труды МАИ. 2016. № 86. 16 с. EDN: VUDSTD.

8. Хтун Н. Н. Разработка и исследование рецепторных геометрических моделей телесной трассировки: автореф. дис. ... канд. техн. наук. Москва, 2014. 26 с.

9. Бляшке В. Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна. В 2 т. Т. 1. Элементарная дифференциальная геометрия. Москва; Ленинград: Объединенное науч.-техн. изд-во НКТП СССР, 1935. 330 с.

10. Картан Э. Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные методом подвижного репера / пер. с фр. С. П. Финикова Москва: Изд-во Платон, 1998. 366 с. ISBN 5-80100-297-9.

11. Зейлигер Д. Н. Комплексная линейчатая геометрия. Москва; Ленинград: Гос. техн.-теорет. изд-во, 1934. 196 с.

12. Якубовский А. М. Некоторые вопросы конструирования поверхностей с помощью трехгранника Френе // Труды Ун-та дружбы народов им. П. Лумумбы. Москва, 1967. Т. 26. С. 23–32.

13. Panchuk K. L., Niteyskiy A. S. Contact of the Ruled Nondevelopable Surfaces // Proceedings of the 16th International Conference on Geometry and Graphics, 4–8 August 2014. Innsbruck: University Press, 2014. P. 216–223.

14. Нитейский А. С. Конструирование торсовой поверхности методом подвижного трехгранника Френе // Омский научный вестник. 2013. № 2 (120). С. 151–153. EDN: RNEIEX.

15. Корчагин Д. С., Панчук К. Л. Метод геометро-динамического формообразования линейчатых полос // Вестник КузГТУ. 2013. Вып. 6 (100). С. 89–92. EDN: RUDWXXJ.

16. Korchagin D. S., Panchuk K. L. Forming of the Spline Similar Linear Strip // Proceedings of the 16th International Conference on Geometry and Graphics, 4–8 August 2014. Innsbruck: Innsbruck University Press, 2014. P. 428–436.

17. Кривошапко С. Н. Энциклопедия аналитических поверхностей [более 500 поверхностей, 38 классов: математикам, инженерам, архитекторам]. Москва: URSS, 2009. 556 с. ISBN 978-5-397-00985-0.

18. Кривошапко С. Н., Иванов В. Н. Классификация циклических поверхностей // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2006. № 2. С. 25–34.

19. Krivoshapko S., Hyeng C. Geometrical research of rare types of cyclic surfaces // International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences. 2012. Vol. 12, no. 3. P. 346–359. DOI: 10.1088/1742-6596/1901/1/012057.

20. Bock Hyeng Ch. A., Yamb E. B. Application of Cyclic Shells in Architecture, Machine Design, and Bionics // International Journal of Modern Engineering Research. 2012. Vol. 2, no. 3. P. 799–806.

21. Иванов В. Н., Шмелева А. А. Геометрия и формообразование тонкостенных пространственных конструкций на основе нормальных циклических поверхностей // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2016. № 6. С. 3–8. EDN: WYOLRL.

22. Иванов В. Н., Рынковская М. И. Применение циклических поверхностей в архитектуре зданий, конструкций и изделий // Вестник Российского университета дружбы народов. Сер. Инженерные исследования. 2015. № 3. С. 111–119. EDN: ULXYJH.

**ПАНЧУК Константин Леонидович**, доктор технических наук, доцент (Россия), профессор кафедры «Инженерная геометрия и САПР» Омского госу-

дарственного технического университета (ОмГТУ), г. Омск.  
SPIN-код: 5623-0008  
AuthorID (РИНЦ): 501163  
ORCID: 0000-0001-9302-8560  
AuthorID (SCOPUS): 55857766100  
ResearcherID: S-2788-2017  
Адрес для переписки: Panchuk\_KL@mail.ru  
**МЯСОЕДОВА Татьяна Михайловна**, кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры «Инженерная геометрия и САПР» ОмГТУ, г. Омск.  
SPIN-код: 6056-6455  
AuthorID (РИНЦ): 686836

ORCID: 0000-0002-9641-9417  
AuthorID (SCOPUS): 57201776004  
ResearcherID: E-7505-2014  
Адрес для переписки: mtm44mtm44@mail.ru

#### Для цитирования

Панчук К. Л., Мясоедова Т. М. Поверхность нелинейного вращения // Омский научный вестник. 2023. № 4 (188). С. 5–12. DOI: 10.25206/1813-8225-2023-188-5-12.

Статья поступила в редакцию 27.06.2023 г.  
© К. Л. Панчук, Т. М. Мясоедова

UDC 514.7  
DOI: 10.25206/1813-8225-2023-188-5-12  
EDN: VFCPSL

**K. L. PANCHUK**  
**T. M. MYASOYEDOVA**

**Omsk State  
Technical University,  
Omsk, Russia**

## THE SURFACE OF NON-LINEAR ROTATION

The paper considers a geometric scheme, a mathematical model and an algorithm for shaping a non-linear rotation surface. It is known that in Euclidean geometry and mechanics the transformation of rotation is linear, while distance and angle are its invariants. The authors proposed a geometric scheme of non-linear rotation, in which the axis of rotation is a smooth spatial curve and the object of rotation is a smooth line. Several propositions, a lemma and a theorem are proved, which allow one to form the initial data in the problem of nonlinear rotation, the solution of which is the parametric equations of smooth surfaces. The research results make it possible to expand the variety of cyclic surfaces in the existing classification of analytic surfaces. They can also be useful in the creation of CAD, which provides for the design of surface forms of products for mechanical engineering, construction, architecture and other practical areas based on cyclic surfaces.

**Keywords:** smooth curve, movable trihedron, non-linear rotation surface, shaping algorithm, cyclic surface.

#### References

1. Grigor'yev M. I. Postroyeniye obobshchennykh poverkhnostey vrashcheniya [Construction of generalised rotation surfaces] // Seminar «DNA&CAGD». Izbrannyye doklady. Seminar «DNA&CAGD». Izbrannyye Doklady. 2007. P. 1–7. URL: <http://dha.spb.ru/PDF/GeneralizedRevolution.pdf> (accessed: 27.02.2023) (In Russ.).
2. Grigor'yev M. I., Malozemov V. N. Sostavnyye krivyye i poverkhnosti Bez'ye. Analiticheskiy podkhod [Compound curves and Bézier surfaces. The analytical approach]. Lambert Academic Publishing, 2010. 132 p. ISBN 978-3-8433-0323-1. (In Russ.).
3. Beglov I. A., Rustamyan V. V. Metod vrashcheniya geometricheskikh ob'yektov vokrug krivolineynoy osi [Method of rotation of geometrical objects around the curvilinear axis] // Geometriya i grafika. *Geometry and Graphics*. 2017. No. 3. P. 45–50. DOI: 10.12737/article\_59bfa4eb0bf488.99866490. EDN: ZGWEMP. (In Russ.).
4. Beglov I. A. Computer geometric modeling of quasi-rotation surfaces // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1901. P. 012057. DOI: 10.1088/1742-6596/1901/1/012057. (In Engl.).
5. Osipov V. A. Mashinnyye metody proyektirovaniya nepreryvnokarkasnykh poverkhnostey [Machine-assisted design methods for continuous frame surfaces]. Moscow, 1979. 248 p. (In Russ.).
6. Osipov V. A., Osipova L. I. Teoreticheskiye osnovy karkasno-kinematischeskogo metoda napravlyayushchey linii [Theoretical foundations of the frame-kinematic guide line method] // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. *Aviatsionnaya tekhnika. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Aviatsionnaya Tekhnika*. 1980. No. 4. P. 48–53. (In Russ.).
7. Markin L. V., Korn G. V., Kui M. Kh. [et al.]. Diskretnyye modeli geometricheskogo modelirovaniya komponentki aviatsionnoy tekhniki [Discrete models of aircraft equipment layout geometric modeling] // Trudy MAI. *Proceedings of MAI*. 2016. No. 86. 16 p. EDN: VUDSTD. (In Russ.).
8. Khtun N. N. Razrabotka i issledovaniye retseptornykh geometricheskikh modeley telesnoy trassirovki [Development and research of receptive geometric models of body tracing]. Moscow, 2014. 26 p. (In Russ.).
9. Blyashke V. Differentsial'naya geometriya i geometricheskiye osnovy teorii otositel'nosti Eynshteyna. V 2 t. T. 1. Elementarnaya differentsial'naya geometriya. [Differential

geometry and the geometrical foundations of Einstein's theory of relativity. In 2 vols. Vol. 1. Elementary differential geometry. Moscow; Leningrad, 1935. 330 p. (In Russ.).

10. Kartan E. Teoriya konechnykh nepreryvnykh grupp i differentsial'naya geometriya, izlozhennyye metodom podvizhnogo repera [Theory of finite and continuous groups and differential geometry treated by the moving frame method] / trans. from. fr. S. P. Finikova. Moscow, 1998. 368 p. ISBN 5-80100-297-9. (In Russ.).

11. Zeyliger D. N. Kompleksnaya lineychataya geometriya [Complex linear geometry]. Moscow; Leningrad, 1934. 196 p. (In Russ.).

12. Yakubovskiy A. M. Nekotoryye voprosy konstruirovaniya poverkhnostey s pomoshch'yu trekhgrannika Frene [Some issues of surface construction with the Fresnier trihedron] // Trudy un-ta Druzhby Narodov im. P. Lumumby. *Proceedings of the P. Lumumba Peoples' Friendship University*. Moscow, 1967. Vol. 26. P. 23–32. (In Russ.).

13. Panchuk K. L., Niteyskiy A. S. Contact of the Ruled Nondevelopable Surfaces // *Proceedings of the 16th International Conference on Geometry and Graphics*, 4–8 August 2014. Innsbruck: University Press, 2014. P. 216–223. (In Engl.).

14. Niteyskii A. S. Konstruirovaniye torsovoy poverkhnosti metodom podvizhnogo trekhgrannika Frene [Design of ruled surfaces by moving Frenet trihedron] // *Omskiy nauchnyy vestnik. Omsk Scientific Bulletin*. 2013. No. 2 (120). P. 151–153. EDN: RNEIEX. (In Russ.).

15. Korchagin D. S., Panchuk K. L. Metod geometrodinamicheskogo formoobrazovaniya lineychatykh polos [Methods of geometry-dynamic shaping linear strips] // *Vestnik KuzGTU. Bulletin of the Kuzbass State Technical University*. 2013. Issue 6 (100). P. 89–92. EDN: RUDWXJ. (In Russ.).

16. Korchagin D. S., Panchuk K. L. Forming of the Spline Similar Linear Strip // *Proceedings of the 16th International Conference on Geometry and Graphics*. Innsbruck, Austria. 2014. P. 428–436. (In Engl.).

17. Krivoshapko S. N. Entsiklopediya analiticheskikh poverkhnostey: boleye 500 poverkhnostey, 38 klassov: matematikam, inzheneram, arkhitektoram [Encyclopedia of analytical surfaces: more than 500 surfaces, 38 classes: mathematicians, engineers, architects]. Moscow, 2010. 556 p. ISBN 978-5-397-00985-0. (In Russ.).

18. Krivoshapko S. N., Ivanov V. N. Klassifikatsiya tsiklicheskikh poverkhnostey [Classification of cyclic surfaces] // *Stroitel'naya Mekhanika Inzhenernykh Konstruktsiy i Sooruzheniy. Structural Mechanics of Engineering Structures and Facilities*. 2006. No 2. P. 25–34. (In Russ.).

19. Krivoshapko S., Hyeng C. Geometrical research of rare types of cyclic surfaces // *International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences*. 2012. Vol. 12, no. 3. P. 346–359. DOI: 10.1088/1742-6596/1901/1/012057. (In Engl.).

20. Bock Hyeng Ch. A., Yamb E. B. Application of Cyclic Shells in Architecture, Machine Design, and Bionics // *International Journal of Modern Engineering Research*. 2012. Vol. 2, no. 3. P. 799–806. (In Engl.).

21. Ivanov V. N., Shmeleva A. A. Geometriya i formoobrazovaniye tonkostennykh prostranstvennykh konstruktsiy na osnove normal'nykh tsiklicheskikh poverkhnostey [Geometry and formation of the thin-walled space shell structures on the base of normal cyclic surfaces] // *Stroitel'naya Mekhanika Inzhenernykh Konstruktsiy i Sooruzheniy. Structural Mechanics of Engineering Structures and Structures*. 2016. No 6. P. 3–8. EDN: WYOLRL. (In Russ.).

22. Ivanov V. N., Rynkovskaya M. I. Primeneniye tsiklicheskikh poverkhnostey v arkhitekture zdaniy, konstruktsiy i izdeliy [Application of circular surfaces to the architecture of the buildings, structures and products] // *Vestnik Rossiyskogo universiteta druzhby narodov. Ser. Inzhenernyye issledovaniya. Rudn Journal of Engineering Research*. 2015. No 3. P. 111–119. EDN: ULXYJH. (In Russ.).

**PANCHUK Konstantin Leonidovich**, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Professor of Engineering Geometry and CAD Department, Omsk State Technical University (OmSTU), Omsk.

SPIN-code: 5623-0008

AuthorID (RSCI): 501163

ORCID: 0000-0001-9302-8560

AuthorID (SCOPUS): 55857766100

ResearcherID: S-2788-2017

Correspondence address: Panchuk\_KL@mail.ru

**MYASOYEDOVA Tatyana Mikhaylovna**, Candidate of Technical Sciences, Senior Lecturer of Engineering Geometry and CAD Department, OmSTU, Omsk.

SPIN-code: 6056-6455

AuthorID (RSCI): 686836

ORCID: 0000-0002-9641-9417

AuthorID (SCOPUS): 57201776004

ResearcherID: E-7505-2014

Correspondence address: mtm44mtm44@mail.ru

#### For citations

Panchuk K. L., Myasoyedova T. M. The surface of nonlinear rotation // *Omsk Scientific Bulletin*. 2023. No. 4 (188). P. 5–12. DOI: 10.25206/1813-8225-2023-188-5-12.

Received June 27, 2023.

© K. L. Panchuk, T. M. Myasoyedova