

## ЦИКЛИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ, СОПРОВОЖДАЮЩИЕ НЕЛИНЕЙЧАТЫЕ КВАДРИКИ ВРАЩЕНИЯ

В работе рассмотрено формообразование циклических поверхностей на основе нелинейного вращения, у которых осью вращения и образующей линией в общем случае служат пространственные гладкие кривые. В качестве инструмента формообразования поверхностей нелинейного вращения используется известный в дифференциальной геометрии кривых линий метод сопровождающего трехгранника Френе. Геометрическая схема формообразования поверхностей основана на конструкции, в которую входят: криволинейная ось вращения и однопараметрическое множество ее нормальных плоскостей; образующая линия, точки которой описывают в нормальных плоскостях круговые траектории с центрами на криволинейной оси. Приведена математическая модель формообразования поверхности нелинейного вращения для общего случая задания оси вращения и образующей линии. На основе этой модели рассмотрены тестовые примеры формообразования поверхностей нелинейного вращения, представляющих собой циклические поверхности, каждая из которых сопровождается соответствующую нелинейчатую квадрику вращения. В примерах формообразования исходная прямолинейная ось нелинейчатой квадрики вращения и ее образующая линия — кривая второго порядка, функционально меняются местами: осью вращения становится кривая второго порядка, а образующей линией — прямолинейная ось.

Полученное семейство поверхностей нелинейного вращения принадлежит известному в теории аналитических поверхностей классу «Нормальные циклические поверхности». Оно дополняет этот класс и принципиально отличается по методу формообразования.

**Ключевые слова:** нелинейное вращение, циклические поверхности, нелинейчатые квадрики вращения, ось вращения, образующая линия.

**Введение.** В теории аналитических поверхностей известен класс нормальных циклических поверхностей (*НЦП*) с геометрической схемой формообразования, включающей: плоскую или винтообразную линию центров окружностей, образующих поверхность, и закон изменения радиусов этих окружностей при переходе от одной нормальной плоскости линии центров к другой [1–3]. Однако полного решения задачи формообразования *НЦП* на основе пространственной линии центров в общем случае не дано. Известно несколько работ, в которых используются различные подходы к решению этой задачи. Так, например, в работах [4, 5] предложен подход с использованием аппарата конструктивного моделирования циклических поверхностей на основе квазивращения относительно кривых второго порядка. Метод сопровождающего трехгранника в этом подходе не используется, обобщение конструктивного моделирования на случай пространственной оси квазивращения не делается. В работах [6, 7] рассматривается алгебраический подход для построения обобщенной поверхности вращения

на основе функций, определяющих взаимосвязь геометрии линии центров и линии радиусов, формирующих «круговую» траекторию движения точки в форме кривой второго порядка. В работах этого направления образования обобщенных поверхностей вращения не выполняется анализ влияния геометрии и взаимного расположения линии центров и линии радиусов на геометрию конструируемой поверхности. Циклические поверхности, в частности каналовые, широко используются на практике как динамические поверхности для транспортировки различных рабочих веществ: газов, жидкостей, сыпучих материалов. Как каналовые поверхности [8, 9] они также применяются в задачах оптимального размещения этих поверхностей в ограниченных и сложноорганизованных средах [10, 11]. Они часто используются при формообразовании пространственных инженерных конструкций и сооружений [12], в архитектуре зданий и конструкциях технических изделий [13]. Очевидно, для дальнейшего развития теории формообразования циклических поверхностей и решения актуальных практи-

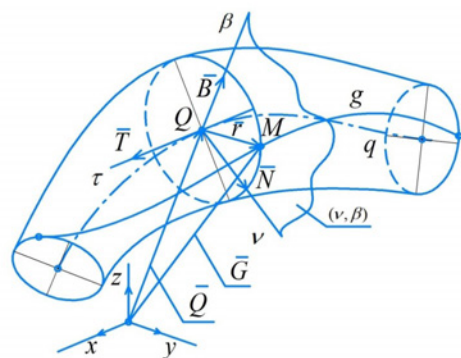


Рис. 1. Схема формообразования поверхности нелинейного вращения

ческих задач на основе их применения необходимы оригинальные подходы к разработке геометрических схем формообразования, приводящие к появлению новых семейств циклических поверхностей с их аналитическим представлением.

**Постановка задачи.** Заданы две пространственные гладкие кривые  $q$  и  $g$ , из которых кривая  $q$  — ось вращения (рис. 1). Требуется построить поверхность, образованную вращением линии  $g$  относительно оси  $q$ . Также требуется показать на тестовых примерах существование циклических поверхностей, сопровождающих нелинейчатые квадратики вращения. Очевидно, в решении этой задачи линия  $g$  будет служить образующей линией искомой поверхности. В качестве инструмента решения будем использовать известный в дифференциальной геометрии кривых линий метод сопровождающего трехгранника Френе, достаточно обстоятельно изложенный в известных работах В. Бляшке [14], Э. Картана [15], Д. Н. Зейлигера [16] и др. геометров. Отметим также работы отечественных исследователей, успешно применивших этот метод в области инженерной геометрии и ее многочисленных приложениях [8, 9, 17–21].

**Геометрическая схема и математическая модель формообразования поверхности нелинейного вращения.** Формообразование поверхности нелинейного вращения основано на вращении линии  $g$  относительно криволинейной оси  $q$ . При этом движении каждая точка  $M$  образующей  $g$  описывает круговую траекторию в нормальной плоскости  $(v, \beta)$  кривой  $q$ . Исходя из того, что нормальные плоскости оси  $q$  образуют нелинейный пучок плоскостей и образом прямой линии при ее вращении относительно  $q$  является кривая линия, будем называть образующийся объект поверхностью нелинейного вращения (ПНВ). При определенных условиях задания формы и расположения кривых  $q$  и  $g$  между ними может быть установлено соответствие, при котором каждой точке образующей  $g$  будет соответствовать одна или множество (конечное или бесконечное) нормальных плоскостей оси  $q$ .

Зададим кривые линии следующим образом:

$$q: \bar{Q}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\},$$

$$t \in [t_0, t_n] \in \mathbf{R}, \bar{Q}'(t) = \frac{d\bar{Q}}{dt} \neq 0;$$

$$g: \bar{G}(l) = \{x(l), y(l), z(l)\},$$

$$l \in [l_0, l_n] \in \mathbf{R}, \bar{G}'(l) = \frac{d\bar{G}}{dl} \neq 0.$$

Вращение точки  $M \in \bar{G}(l)$  должно происходить в нормальной плоскости  $(v, \beta)$  оси вращения  $\bar{Q}(t)$ , проходящей через точку  $Q \in \bar{Q}(t)$ . В этой точке существует трехгранник Френе, образуемый ортами  $\bar{T}(t)$ ,  $\bar{N}(t)$  и  $\bar{B}(t)$  соответственно касательной  $\tau$ , главной нормали  $\nu$  и бинормали  $\beta$ , которые попарно определяют нормальную  $(v, \beta)$ , соприкасающуюся  $(\tau, \nu)$  и спрямляющую  $(\tau, \beta)$  плоскости. Принадлежность точки  $M \in \bar{G}(l)$  к нормальной плоскости  $(v, \beta)$  можно выразить следующим уравнением:

$$\bar{Q}'(t) \cdot (\bar{G}(l) - \bar{Q}(t)) = 0. \quad (1)$$

Из уравнения (1) следует зависимость  $l = F(t)$ . Нетрудно убедиться в том, что  $F'(t) = \frac{dF}{dt} \neq 0$ . Из гладкости функции  $F(t)$  следует гомеоморфное соответствие числовых отрезков  $[l_0, l_n]$  и  $[t_0, t_n]$ , которое влечет такое же соответствие точек гладких кривых линий  $\bar{Q}(t)$  и  $\bar{G}(l)$ .

Из схемы на рис. 1 следует

$$\bar{r}(t) = A(t) \cdot (\bar{G}(F(t)) - \bar{Q}(t)), \quad (2)$$

где  $\bar{r}(t)$  — радиус-вектор точки образующей линии  $\bar{G}(l)$  в локальной системе координат  $Q\tau\nu\beta$ ,  $A(t)$  — матрица перехода от неподвижной системы координат  $Qxyz$  к локальной  $Q\tau\nu\beta$  сопровождающего трехгранника. Параметрические уравнения круговой траектории точки  $M$  при  $t = t_0, t_n \in [t_0, t_n]$  имеют вид:

$$\begin{aligned} v_M(t_0, \lambda) &= r(t_0) \cdot \cos \psi(t_0, \lambda), \\ \beta_M(t_0, \lambda) &= r(t_0) \cdot \sin \psi(t_0, \lambda), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $r(t_0) = |\bar{r}(t_0)|$ ,  $\psi(t_0, \lambda) = \phi(t_0) + 2\pi \cdot \lambda$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ .

Уравнение непрерывного семейства окружностей — траекторий точек образующей  $\bar{G}(l)$  в системе координат  $Qxyz$  имеет вид:

$$\bar{U}(t, \lambda) = A^{-1}(t) \cdot \bar{r}(t, \lambda) + \bar{Q}(t), \quad (4)$$

где  $\bar{r}(t, \lambda) = \{\tau = 0, v(t, \lambda), \beta(t, \lambda)\}$ .

Уравнение (4) описывает ПНВ с образующей линией  $\bar{G}(l)$  и криволинейной осью вращения  $\bar{Q}(t)$ . Из уравнения (1) может быть получена также зависимость  $t = \Phi(l)$ , где  $\Phi'(l) = \frac{d\Phi}{dl}$ . В этом случае в уравнении (4) произойдет смена параметров, и ПНВ будет описываться функцией  $\bar{U}(l, \lambda)$ .

**Результаты экспериментов.** Результаты вычислений в тестовых примерах получены в системе компьютерной алгебры *Maple 18*, и их визуализация представлена в табл. 1.

**Пример 1.** Сфера образована вращением образующей линии  $g$  (окружность) относительно прямой оси  $q$ :

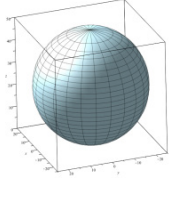
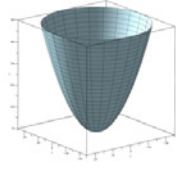
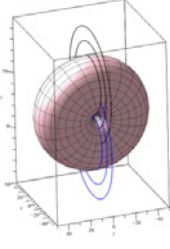
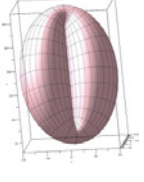
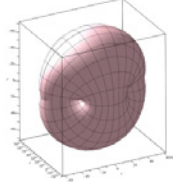
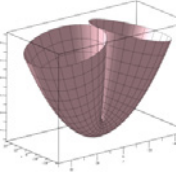
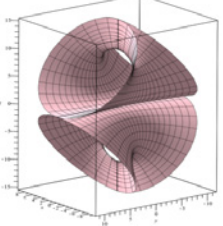
$$q: \bar{Q}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 50t \end{bmatrix}, t \in [0, 1];$$

$$g: \bar{G}(l) = \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \cos(2\pi l) \\ 25 \sin(2\pi l) + 25 \end{bmatrix}, l \in [0, 1].$$

Уравнение сферы имеет вид:

$$\bar{P}(\lambda, l) = \begin{bmatrix} 50\sqrt{-l(l-1)} \cdot \sin(2\lambda\pi) \\ -50\sqrt{-l(l-1)} \cdot \cos(2\lambda\pi) \\ 50l \end{bmatrix}$$

Сопровождающие поверхности нелинейного вращения (СПНВ) для нелинейчатых квадрик вращения (НКВ)

НКВ	Сфера	Эллипсоид		Параболоид	Гиперболоид	
		Вытянутый сфероид	Сплюснутый сфероид		Двулостный гиперболоид	Однолостный гиперболоид
СПНВ						

$$\lambda \in [0,1], l \in [0,1].$$

Требуется определить ПНВ, сопровождающую сферу. Для этих целей изменим функциональное назначение линий  $q$  и  $g$ . В качестве оси принимаем линию  $g$ , а в качестве образующей — линию  $q$ . На основании формулы (4) получаем уравнение ПНВ, которая представляет собой циклическую поверхность в форме закрытого тора и двух соответственных пучков концентрических окружностей в его осевой плоскости. Уравнение сопровождающей ПНВ имеет вид:

$$\bar{U}(l, \lambda) = \begin{bmatrix} 25 \cdot \sin(2\lambda\pi) \\ 25 \cdot \sin(\pi l) \cdot (\cos(2\lambda\pi) - 1) \\ -25 \cos(\pi l) \cdot (\cos(2\lambda\pi) + 1) + 25 \end{bmatrix}, l \in [0,1], \lambda \in [0,1].$$

**Пример 2.** Задан эллипсоид вращения (вытянутый сфероид)

$$\bar{P}(l, \lambda) = \begin{bmatrix} 10 \cdot \sin(2\pi l) \cdot \cos(2\lambda\pi) \\ 10 \cdot \cos(2\pi l) \cdot \sin(2\lambda\pi) \\ 25 \cdot \sin(2\pi l) + 25 \end{bmatrix}, l \in [0,1], \lambda \in [0,1]$$

с осью вращения (большая ось эллипса)  $q$  и образующей линией (большим эллипсом)  $g$ :

$$q : \bar{Q}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 50t \end{bmatrix}, t \in [0,1].$$

$$g : \bar{G}(l) = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \cos(2\pi l) \\ 25 \sin(2\pi l) + 25 \end{bmatrix}, l \in [0,1].$$

Требуется определить сопровождающую ПНВ. Изменим функционально роли линий  $q$  и  $g$ . Используя формулу (4), получим уравнение ис-

комой ПНВ, которое представим, ввиду его громоздкости, также лишь в обобщенном виде:  $\bar{U}(l, \lambda) = (x(l, \lambda), y(l, \lambda), z(l, \lambda)), l \in [0,1], \lambda \in [0,1]$ . Визуализация полученной ПНВ представлена в таблице.

**Пример 3.** Задан эллипсоид вращения (сплюснутый сфероид)

$$\bar{P}(l, \lambda) = \begin{bmatrix} 50 \cdot \sqrt{-l^2 + 1} \cdot \sin(2\pi l) \\ 10 \cdot (1 - 20l) \\ -50 \cdot \sqrt{-l^2 + 1} \cdot \cos(2\pi l) + 25 \end{bmatrix}, l \in [0,1], \lambda \in [0,1]$$

с осью вращения (малая ось эллипса)  $q$  и образующей линией (большим эллипсом)  $g$ :

$$q : \bar{Q}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 10(1 - 2t) \\ 50t \end{bmatrix}, t \in [0,1].$$

$$g : \bar{G}(l) = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \cos(2\pi l) \\ 25 \sin(2\pi l) + 25 \end{bmatrix}, l \in [0,1].$$

Изменяя функциональные роли линий  $q$  и  $g$  и используя формулу (4), получим уравнение ПНВ, которое также можем представить лишь в обобщенном виде:  $\bar{U}(l, \lambda) = (x(l, \lambda), y(l, \lambda), z(l, \lambda)), l \in [0,1], \lambda \in [0,1]$ . Полученная ПНВ представлена в табл 1.

**Пример 4.** Для параболоида, заданного уравнением

$$\bar{P}(l, \lambda) = \begin{bmatrix} -25\sqrt{l} \sin(2\lambda\pi) \\ 25\sqrt{l} \cos(2\lambda\pi) \\ 50l \end{bmatrix}, l \in [0,1], \lambda \in [0,1],$$

его ось вращения и образующая описываются соответственно уравнениями:

$$q : \bar{Q}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 50t \end{bmatrix}, t \in [0,1],$$

$$g: \bar{G}(l) = \begin{bmatrix} 0 \\ -25(2l+1) \\ -50(2l-1)^2 \end{bmatrix}, l \in [0,1].$$

Определим для параболоида его сопровождающую *ПНВ*. Как и в предыдущих примерах, изменим вначале функциональные роли линий  $q$  и  $g$ , а затем, на основе формулы (4), определим уравнение искомой *ПНВ*. Ввиду громоздкости уравнение также не приводится. Результат визуализации сопровождающей *ПНВ* приведен в таблице.

**Пример 5.** Поверхность двуполостного гиперболоида вращения задана уравнением

$$\bar{P}(l, \lambda) = \begin{bmatrix} \frac{5}{2}(e^{-2l+1} - e^{2l-1}) \cos(2\lambda\pi) \\ \frac{5}{2}(e^{-2l+1} - e^{2l-1}) \sin(2\lambda\pi) \\ \pm \frac{5}{2}(e^{-2l+1} + e^{2l-1}) \end{bmatrix},$$

$$l \in [0,1], \lambda \in [0,1].$$

Его ось вращения (действительная ось гипербола) и образующая (гипербола) имеют соответственно уравнения:

$$q: \bar{Q}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 50t \end{bmatrix}, t \in [0,1],$$

$$g: \bar{G}(l) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{2}(e^{-2l+1} - e^{2l-1}) \\ \pm \frac{5}{2}(e^{-2l+1} + e^{2l-1}) \end{bmatrix}, l \in [0,1].$$

Определим *ПНВ*, соответствующую гиперболоиду. В результате вычислений на основе формулы (4) получим векторно-параметрическое уравнение, которое по причине громоздкости также не приводится. Визуализация полученной поверхности приведена в таблице. Рассматривая в качестве исходной поверхность однополостного гиперболоида вращения и выполняя соответствующие вычисления, получим сопровождающую его *ПНВ*, совпадающую с *ПНВ* для двуполостного гиперболоида.

**Обсуждение результатов.** Анализ полученных циклических поверхностей, сопровождающих нелинейные квадрики вращения, показывает их принадлежность к классу алгебраических поверхностей четвертого порядка. Наличие двух соответственных усеченных пучков концентрических окружностей в примере 1 обусловлено геометрией и взаимным расположением образующей (отрезок прямой) и оси вращения (окружность) образуемой *ПНВ*. В примере 4 вычислениями установлено совпадение двух *ПНВ*, одна из которых получена вращением действительной оси гипербола относительно самой гипербола, а другая — мнимой оси относительно той же гипербола. Для *ПНВ*, полученных в примерах, характерна замкнутость этих поверхностей. В примерах 1 и 2 она имеет явный характер. В примере 3 замыкание происходит по несобственной окружности, т.е. по окружности с бесконечно удаленным центром и бесконечно большого радиуса. В качестве такой окружности принимается несобственная прямая в плоскости оси вращения — парабола. В примере 4 происходит двойное замыкание

сопровождающей *ПНВ* — по несобственной окружности с бесконечно удаленным центром в направлении одной асимптоты гипербола, служащей осью вращения, и по несобственной окружности с бесконечно удаленным центром в направлении другой её асимптоты.

### Заключение

1. *ПНВ*, сопровождающие нелинейчатые квадрики вращения, принадлежат известному в теории аналитических поверхностей классу нормальных циклических поверхностей и являются замкнутыми поверхностями с замыканием некоторых из них в расширенном евклидовом пространстве.

2. Предложенный подход к формообразованию нормальных циклических поверхностей, сопровождающих нелинейчатые квадрики вращения, дополняет известную в инженерной геометрии классификацию циклических поверхностей.

3. Актуальными для последующих исследований могут быть задачи установления соответствия геометрий поверхностей нелинейчатых квадрик вращения и сопровождающих их *ПНВ*, а также количественной множественности *ПНВ* для нелинейчатой квадрики вращения.

### Библиографический список

- Кривошапко С. Н., Иванов В. Н. Энциклопедия аналитических поверхностей: более 500 поверхностей, 38 классов: математикам, инженерам, архитекторам. Москва: URSS, 2010. 556 с. ISSN 1815-5235; 978-5-397-00985-0.
- Кривошапко С. Н., Иванов В. Н. Классификация циклических поверхностей // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2006. № 2. С. 25–34.
- Krivoshapko S., Hyeng C. Geometrical research of rare types of cyclic surfaces // International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences. 2012. Vol. 12 (3). P. 346–359.
- Беглов И. А., Рустамян В. В. Метод вращения геометрических объектов вокруг криволинейной оси // Геометрия и графика. 2017. № 3. С. 45–50. DOI: 10.12737/article\_59bfa4eb0bf488.99866490.
- Beglov I. A. Computer geometric modeling of quasi-rotation surfaces // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1901. P. 16–17. DOI: 10.1088/1742-6596/1901/1/012057.
- Григорьев М. И. Построение обобщенных поверхностей вращения // Семинар «DNA&CAGD». Избранные доклады. 2007. С. 1–7.
- Григорьев М. И., Малозёмов В. Н. Составные кривые и поверхности Безье. Аналитический подход. Lambert Academic Publishing, 2010. 132 с. ISBN 978-3-8433-0323-1.
- Осипов В. А. Машинные методы проектирования непрерывнокаркасных поверхностей. Москва: Машиностроение, 1979. 248 с.
- Осипов В. А., Осипова Л. И. Теоретические основы каркасно-кинематического метода направляющей линии // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 1980. № 4. С. 48–53.
- Маркин А. В., Корн Г. В., Куи М. Х. [и др.]. Дискретные модели геометрического моделирования компоновки авиационной техники // Труды МАИ. 2016. № 86. 16 с. EDN VUDSTD.
- Хтун Н. Н. Разработка и исследование рецепторных геометрических моделей телесной трассировки: автореф. дис. ...канд. техн. наук. Москва, 2014. 26 с.
- Иванов В. Н., Шмелева А. А. Геометрия и формообразование тонкостенных пространственных конструкций на основе нормальных циклических поверхностей // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2016. № 6. С. 3–8.
- Иванов В. Н., Рынкoвская М. И. Применение циклических поверхностей в архитектуре зданий, конструкций и из-

делий // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2015. № 3. С. 111–119.

14. Бляшке В. Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна. В 2 т. Т. 1. Элементарная дифференциальная геометрия. Москва; Ленинград: Объединенное науч.-техн. изд-во НКТП СССР, 1935. 330 с.

15. Карташ Э. Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные методом подвижного репера / пер. с фр. С. П. Финикова. Волгоград: Изд-во Платон, 1998. 368 с.

16. Зейлигер Д. Н. Комплексная линейчатая геометрия. Москва; Ленинград: Гос. техн.-теорет. изд-во, 1934. 196 с.

17. Якубовский А. М. Некоторые вопросы конструирования поверхностей с помощью трехгранника Френе // Труды Ун-та дружбы народов им. П. Лумумбы. Москва, 1967. Т. 26. С. 23–32.

18. Panchuk K. L., Niteyskiy A. S. Contact of the Ruled Nondevelopable Surfaces // Proceedings of the 16th International Conference on Geometry and Graphics, 4–8 August 2014. Innsbruck: University Press, 2014. P. 216–223.

19. Нитейский, А. С. Конструирование торсовой поверхности методом подвижного трехгранника Френе // Омский научный вестник. 2013. № 2 (120). С. 151–153.

20. Корчагин Д. С., Панчук К. Л. Метод геометро-динамического формообразования линейчатых полос // Вестник КузГТУ. 2013. Вып. 6 (100). С. 89–92.

21. Korchagin D. S., Panchuk K. L. Forming of the Spline Similar Linear Strip // Proceedings of the 16th International Conference on Geometry and Graphics. Innsbruck, Austria. 2014. P. 428–436.

**ПАНЧУК Константин Леонидович**, доктор технических наук, доцент (Россия), профессор кафедры «Инженерная геометрия и САПР» Омского госу-

дарственного технического университета (ОмГТУ), г. Омск.

SPIN-код: 5623-0008

AuthorID (РИНЦ): 501163

ORCID: 0000-0001-9302-8560

AuthorID (SCOPUS): 55857766100

ResearcherID: S-2788-2017

Адрес для переписки: Panchuk\_KL@mail.ru

**МЯСОЕДОВА Татьяна Михайловна**, кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры «Инженерная геометрия и САПР» ОмГТУ, г. Омск.

SPIN-код: 6056-6455

AuthorID (РИНЦ): 686836

ORCID: 0000-0002-9641-9417

AuthorID (SCOPUS): 57201776004

ResearcherID: E-7505-2014

Адрес для переписки: mtm44mtm44@mail.ru

**ЛЮБЧИНОВ Евгений Владимирович**, кандидат технических наук, доцент кафедры «Инженерная геометрия и САПР» ОмГТУ, г. Омск.

SPIN-код: 8144-6370

AuthorID (РИНЦ): 917932

ORCID: 0000-0003-2499-4866

AuthorID (SCOPUS): 57199399265

ResearcherID: D-1882-2019

Адрес для переписки: Lubchinov.E.V@yandex.ru

#### Для цитирования

Панчук К. Л., Мясоедова Т. М., Любчинов Е. В. Циклические поверхности, сопровождающие нелинейчатые квадрати вращения // Омский научный вестник. 2023. № 3 (187). С. 23–29. DOI: 10.25206/1813-8225-2023-187-23-29.

Статья поступила в редакцию 11.05.2023 г.

© К. Л. Панчук, Т. М. Мясоедова,

Е. В. Любчинов



## CYCLIC SURFACES ACCOMPANYING NON-RULED QUADRICS OF ROTATION

The paper considers the shaping of cyclic surfaces based on nonlinear rotation, in which the axis of rotation and the generatrix in the general case are three-dimensional smooth curves. As a tool for shaping surfaces of non-linear rotation, the method of the accompanying Frenet trihedron, known in the differential geometry of curved lines, is used. The geometric scheme of surface shaping is based on a construction that includes: a curvilinear axis of rotation and a one-parameter set of its normal planes; a generatrix whose points describe in normal planes circular trajectories centered on a curvilinear axis. A mathematical model of shaping the surface of non-linear rotation for the general case of specifying the axis of rotation and the generatrix is given. On the basis of this model, test examples of the formation of surfaces of nonlinear rotation, which are cyclic surfaces, each of which accompanies the corresponding nonlinear quadric of rotation, are considered. In the examples of shaping, the original rectilinear axis of a non-linear quadric of revolution and its generating line, a second-order curve, are functionally interchanged: the second-order curve becomes the rotation axis, and the rectilinear axis becomes the generatrix.

The resulting family of surfaces of non-linear rotation belongs to the well-known class in the theory of analytic surfaces "Normal cyclic surfaces". It complements this class and fundamentally differs in the method of shaping.

**Keywords:** non-linear rotation, cyclic surfaces, non-ruled quadrics of rotation, axis of rotation, generatrix.

### References

1. Krivoshapko S. N., Ivanov V. N. Entsiklopediya analiticheskikh poverkhnostey: boleye 500 poverkhnostey, 38 klassov: matematikam, inzheneram, arkhitektoram [Encyclopedia of analytical surfaces: more than 500 surfaces, 38 classes: for mathematicians, engineers, architects]. Moscow, 2010. 556 p. ISSN 1815-5235; 978-5-397-00985-0. (In Russ.).
2. Krivoshapko S. N., Ivanov V. N. Klassifikatsiya tsiklicheskih poverkhnostey [Classification of cyclic surfaces] // Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2006. No. 2. P. 25–34. (In Russ.).
3. Krivoshapko S., Hyeng C. Geometrical research of rare types of cyclic surfaces // International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences. 2012. Vol. 12 (3). P. 346–359. (In Engl.).
4. Beglov I. A., Rustamyan V. V. Metod vrashcheniya geometricheskikh ob'yektov vokrug krivolineynoy osi [Method of rotation of geometrical objects around the curvilinear axis] // Geometriya i grafika. *Geometry and Graphics*. 2017. No. 3. P. 45–50. DOI: 10.12737/article\_59bfa4eb0bf488.99866490. (In Russ.).
5. Beglov I. A. Computer geometric modeling of quasi-rotation surfaces // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 1901. P. 16–17. DOI: 10.1088/1742-6596/1901/1/012057. (In Engl.).
6. Grigor'yev M. I. Postroyeniye obobshchennykh poverkhnostey vrashcheniya [Construction of generalised rotation surfaces] // Seminar «DNA&CAGD». Izbrannyye doklady. *Seminar «DNA&CAGD». Izbrannyye Doklady*. 2007. P. 1–7. (In Russ.).
7. Grigor'yev M. I., Malozemov V. N. Sostavnyye krivyye i poverkhnosti Bez'ye. Analiticheskiy podkhod [Compound curves and Bézier surfaces. The analytical approach]. Lambert Academic Publishing, 2010. 132 p. ISBN 978-3-8433-0323-1. (In Russ.).
8. Osipov V. A. Mashinnyye metody proyektirovaniya nepreryvnokarkasnykh poverkhnostey [Machine-assisted design methods for continuous frame surfaces]. Moscow, 1979. 248 p. (In Russ.).
9. Osipov V. A., Osipova L. I. Teoreticheskiye osnovy karkasno-kinematicheskogo metoda napravlyayushchey linii [Theoretical foundations of the frame-kinematic method of the guide line] // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. *Aviatsionnaya tekhnika. Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Aviatsionnaya Tekhnika*. 1980. No. 4. P. 48–53. (In Russ.).
10. Markin L. V., Korn G. V., Kui M. Kh. [et al.]. Diskretnyye modeli geometricheskogo modelirovaniya komponovki aviatsionnoy tekhniki [Discrete models of aircraft equipment layout geometric modeling] // Trudy MAI. *Proceedings of MAI*. 2016. No. 86. 16 p. EDN VUDSTD. (In Russ.).
11. Khtun N. N. Razrabotka i issledovaniye retseptornykh geometricheskikh modeley telesnoy trassirovki [Development and research of receptive geometric models of body tracing]. Moscow, 2014. 26 p. (In Russ.).
12. Ivanov V. N., Shmeleva A. A. Geometriya i formoobrazovaniye tonkostennykh prostranstvennykh konstruksiy na osnove normal'nykh tsiklicheskih poverkhnostey [Geometry and formation of the thin-walled space shell structures on the base of normal cyclic surfaces] // Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruksiy i sooruzheniy. *Structural Mechanics of*

*Engineering Constructions and Buildings*. 2016. No. 6. P. 3–8. (In Russ.).

13. Ivanov V. N., Rynkovskaya M. I. Primeneniye tsiklicheskih poverkhnostey v arkhitekture zdaniy, konstruksiy i izdeliy [Application of circular surfaces to the architecture of the buildings, structures and products] // Vestnik Rossiyskogo universiteta druzhby narodov. Seriya: Inzhenernyye issledovaniya. *RUDN Journal of Engineering Research*. 2015. No. 3. P. 111–119. (In Russ.).

14. Blyashke V. Differentsial'naya geometriya i geometricheskiye osnovy teorii otnositel'nosti Eynshteyna. V 2 t. T. 1. Elementarnaya differentsial'naya geometriya. [Differential geometry and the geometrical foundations of Einstein's theory of relativity. In 2 vols. Vol. 1. Elementary differential geometry]. Moscow; Leningrad, 1935. 330 p. (In Russ.).

15. Kartan E. Teoriya konechnykh nepreryvnykh grupp i differentsial'naya geometriya, izlozhennyye metodom podvizhnogo repera [Theory of finite and continuous groups and differential geometry treated by the moving frame method] / trans. from Fr. S. P. Finikova. Volgograd, 1998. 368 p. (In Russ.).

16. Zeyliger D. N. Kompleksnaya lineychataya geometriya [Complex linear geometry]. Moscow; Leningrad, 1934. 196 p. (In Russ.).

17. Yakubovskiy A. M. Nekotoryye voprosy konstruirovaniya poverkhnostey s pomoshch'yu trekhgrannika Frene [Some issues of surface construction with the Fresnier trihedron] // Trudy un-ta Druzhyby Narodov im. P. Lumumby. *Proceedings of the P. Lumumba Peoples' Friendship University*. Moscow, 1967. Vol. 26. P. 23–32. (In Russ.).

18. Panchuk K. L., Niteyskiy A. S. Contact of the Ruled Nondevelopable Surfaces // Proceedings of the 16th International Conference on Geometry and Graphics, 4–8 August 2014. Innsbruck: University Press, 2014. P. 216–223. (In Engl.).

19. Niteyskii A. S. Konstruirovaniye torsovoy poverkhnosti metodom podvizhnogo trekhgrannika Frene [Design of ruled surfaces by moving frenet trihedron] // Omskiy nauchnyy vestnik. *Omsk Scientific Bulletin*. 2013. No. 2 (120). P. 151–153. (In Russ.).

20. Korchagin D. S., Panchuk K. L. Metod geometrodinamicheskogo formoobrazovaniya lineychatykh polos [Methods of geometry-dynamic shaping linear strips] // Vestnik KuzGTU. *Bulletin of the Kuzbass State Technical University*. 2013. Issue 6 (100). P. 89–92. (In Russ.).

21. Korchagin D. S., Panchuk K. L. Forming of the Spline Similar Linear Strip // Proceedings of the 16th International

Conference on Geometry and Graphics. Innsbruck, Austria. 2014. P. 428–436. (In Engl.).

**PANCHUK Konstantin Leonidovich**, Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Professor of Engineering Geometry and CAD Department, Omsk State Technical University (OmSTU), Omsk.

SPIN-code: 5623-0008

AuthorID (RSCI): 501163

ORCID: 0000-0001-9302-8560

AuthorID (SCOPUS): 55857766100

ResearcherID: S-2788-2017

Correspondence address: Panchuk\_KL@mail.ru

**MYASOEDOVA Tatyana Mikhaylovna**, Candidate of Technical Sciences, Senior Lecturer of Engineering Geometry and CAD Department, OmSTU, Omsk.

SPIN-code: 6056-6455

AuthorID (RSCI): 686836

ORCID: 0000-0002-9641-9417

AuthorID (SCOPUS): 57201776004

ResearcherID: E-7505-2014

Correspondence address: mtm44mtm44@mail.ru

**LYUBCHINOV Evgeniy Vladimirovich**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of Engineering Geometry and CAD Department, OmSTU, Omsk.

SPIN-code: 8144-6370

AuthorID (RSCI): 917932

ORCID: 0000-0003-2499-4866

AuthorID (SCOPUS): 57199399265

ResearcherID: D-1882-2019

Correspondence address: Lubchinov.E.V@yandex.ru

#### For citations

Panchuk K. L., Myasoedova T. M., Lyubchinov E. V. Cyclic surfaces accompanying non-ruled quadrics of rotation // *Omsk Scientific Bulletin*. 2023. No. 3 (187). P. 23–29. DOI: 10.25206/1813-8225-2023-187-23-29.

Received May 11, 2023.

© K. L. Panchuk, T. M. Myasoedova, E. V. Lyubchinov