

АППРОКСИМАЦИЯ ДВУМЕРНЫХ МНОЖЕСТВ ТОЧЕЧНЫМИ КОНФИГУРАЦИЯМИ

В статье рассматриваются плоские точечные множества, обладающие иерархической структурой, и решение задачи аппроксимации плоской точечной конфигурации некоторой «идеальной» конфигурацией. Заданное множество представляет собой размытый, деформированный, искаженный образ или множество случайных реализаций неизвестного «идеального» образа. Заданное множество и его аппроксиманта должны обладать схожими иерархическими структурами. Структура аппроксимирующей конфигурации определяется априори. Аппроксимация осуществляется методом наименьших квадратов при условии указания соответствия элементов структур. Аппроксимирующими преобразованиями являются линейные преобразования. В статье описываются преобразования подобия, как наиболее общие.

Ключевые слова: точечное множество, конфигурация, аппроксимация, линейные преобразования, расстояние.

Введение. Одной из задач инженерной геометрии является задача идентификации геометрической формы объекта по конечной совокупности измерений отдельных её элементов или наблюдаемых отдельных её реализаций. Наблюдаемая форма может быть искажена или деформируема, и тогда возникает задача восстановления её первоначального или наиболее вероятного вида. Такая задача является стандартной задачей аппроксимации, если форма аналитически описывается явной зависимостью одного параметра от других [1].

Задача аппроксимации резко усложняется, если явная зависимость отсутствует. В этом случае требуется априорная информация, позволяющая заранее задать некоторые параметры, например, порядок формы [2]. В некоторых задачах предварительно задаются геометрические свойства, такие как обладание осевой или центральной симметрией и другие [3].

Исследуемый объект может обладать иерархической структурой. В этом случае восстановлению подлежит не только искаженная форма объекта, но и расположение и форма отдельных его элементов. Такая задача возникает в системах автоматического распознавания изображений [4]. Известна задача приближения множества точек плоскости кривой 2-го порядка, в частности, окружностью [5–7]. При этом никакие условия на взаимное положение точек на кривой не накладываются. При наличии таких условий требуется изменить подход к решению. Учитывая, что точки образуют некоторую точечную конфигурацию, возникает задача приближения данного точечного множества точечной конфигурацией с заданными метрическими соотношениями параметров [8, 9].

Постановка задачи. Пусть на плоскости задано множество $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ точек, которое можно рассматривать как искаженный (деформируемый, размытый) образ некоторого «идеального» множе-

ства-оригинала $C = \{C_1, \dots, C_m\}, C_j(z'')$. Положение каждой точки A_i в выбранной системе координат определяется радиус-вектором $z_i + z^0$, где z^0 — случайный вектор с нулевым математическим ожиданием и ненулевой дисперсией. Вектор z^0 не зависит от z_i .

Пусть данному A каким-либо способом может быть поставлено в соответствие конечное множество «идеальных» преобразований-оригиналов $B = \{B_1, \dots, B_k\}, B_j = \{B(z'_j)\}$. Каждый из них наделен некоторой структурой иерархического типа, которую можно назвать точечной конфигурацией. Множество оригиналов формально может быть создано методом генерации большого числа достаточно разнообразных геометрических фигур различной сложности. Положение каждой точки оригинала задается в выбранной системе координат, а сам оригинал занимает частное положение.

Пусть имеется множество $T = \{T: \{z'\} \rightarrow \{z''\}\}$ преобразований плоскости, каждое из которых трансформирует множество конфигураций B в множество четких образов C . Множество T может быть множеством подобий, аффинитетов, проективитетов, бирациональных преобразований высшего порядка.

Таким образом, можно сформулировать следующие задачи:

— для заданного точечного множества A , выбранного оригинала B_j и выбранного преобразования T найти образ $C_j = T(B_j)$, наименее отклоняющийся от A по норме

$$F_j = \|C_j - A\| \rightarrow \min;$$

— среди множества конфигураций B найти такую конфигурацию B_j , чтобы в заданном классе преобразований

$$\|T(B_j) - A\| = \min.$$

Основной алгоритм. Прежде всего, заметим, что структура множества \mathbf{A} может характеризоваться следующими внешними признаками:

— наличием детерминированной составляющей, искаженной случайной деформацией, но тем не менее позволяющей сделать априорные заключения об относительном положении точек и структуре множества \mathbf{A} ;

— каждая точка или часть точек множества \mathbf{A} задается некоторой выборкой, придающей структуре множества \mathbf{A} стохастический характер, но позволяющей сделать априорные выводы о структуре всего множества.

Исходя из этого иерархическую структуру множества \mathbf{A} и структуру \mathbf{V}_j можно определять в следующей последовательности.

Во-первых, определение общей структуры множества \mathbf{A} и сопоставление каждой возможной частной структуре \mathbf{A}_i^C множества \mathbf{G}_i^A возможных параметризаций:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \{A_1, \dots, A_n\} \rightarrow \\ \rightarrow \mathbf{A}_i^C &= \{\{A_{1, \dots, j}\}_1, \{A_{\dots, 1, \dots, j}\}_2, \dots, \{A_{\dots, 1, \dots, n}\}_s\}_i, \\ \mathbf{A}_i^C &= \bigcup_1^s \mathbf{A}_{s,i}^C, \mathbf{A}_i^C \rightarrow \mathbf{G}_i^A = \{G_1^A, \dots, G_q^A\}_i, \end{aligned}$$

здесь $\mathbf{G}_{ji}^A, j = 1, \dots, q$ — параметризация структуры \mathbf{A}_i^C , представляющая собой множество априорных утверждений или метрических соотношений дискриптивного характера, описывающих \mathbf{A}_i^C приближенно или расплывчато. Подмножества $\{A_{1, \dots, j}\}_1, \dots, \{A_{\dots, 1, \dots, n}\}_s$ определяют искаженные геометрические фигуры, форма которых определяется априори. Объединение этих фигур составляет множество \mathbf{A} .

Во-вторых, задание множества конфигураций оригиналов \mathbf{V} , соответствующих частной структуре \mathbf{A}_i^C :

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \{B_1, \dots, B_k\}; B_i = \bigcup_1^m B_{m,i}, \\ \mathbf{V}_{i,i} &\leftrightarrow \{A_{1, \dots, j}\}_1, \dots, \mathbf{V}_{s,i} \leftrightarrow \{A_{\dots, 1, \dots, n}\}_s, \\ \mathbf{V}_i &\rightarrow \mathbf{G}_i^B = \{G_1^B, \dots, G_p^B\}_i, \mathbf{G}_i^B \leftrightarrow \mathbf{G}_i^A. \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{V}_i — некоторое множество точек, взаимное положение которых четко указано. \mathbf{G}_i^B — четкая параметризация \mathbf{V}_i , заданного в частном положении относительно системы координат.

В-третьих, выбор преобразования T , который зависит от \mathbf{A}_i^C . Как правило, для многих практических задач можно ограничиться группой линейных преобразований $z'' = az' + b$.

В-четвертых, вычисление коэффициентов преобразования T при условии, чтобы суммарная величина отклонений заданных точек z_i множества \mathbf{A} от вычисленных точек z_i'' множества \mathbf{C} была минимальной:

$$F_j = \sum_{A_i^C} |z_i'' - z_i|^2 + \dots + \sum_{A_{s,i}^C} |z_i'' - z_i|^2 \rightarrow \min.$$

Решение основывается на методе наименьших квадратов:

$$\frac{\partial F_j}{\partial a} = 0, \frac{\partial F_j}{\partial b} = 0$$

и сводится к решению систем линейных уравнений.

Выбор структуры образов. Ввиду большого разнообразия частных структур \mathbf{A}_i^C и конфигураций \mathbf{V} рассмотрим некоторые частные случаи. Первым случаем пусть будет $1 \leq m \leq n$. Множество \mathbf{A} может быть охарактеризовано как обладающее одноэлементной структурой. Это возможно, когда точки A_i есть результат случайного разброса вокруг средней или математического ожидания. При этом $d\mathbf{A} \leq k|z^0|$. Результатом вычисления будет математическое ожидание множества \mathbf{A} и

$$F = \sum_{i=1}^n |z_i'' - z_i|^2 \rightarrow \min,$$

$$\mathbf{V} = \{B_1(0)\}, \mathbf{G}^B = \emptyset, z'' = z + b.$$

Множеству \mathbf{A} может быть приписана двухэлементная структура:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 &= \mathbf{A}^{2,1} \cup \mathbf{A}^{2,2}, \\ d\mathbf{A}^{2,1} &\leq k|z^0|, d\mathbf{A}^{2,2} \leq k|z^0|; \\ \mathbf{A}_1^{2,1} &= \{\{A_1\}, \{A_2, \dots, A_n\}\}, \\ \mathbf{A}_2^{2,1} &= \{\{A_1, A_2\}, \{A_3, \dots, A_n\}\}, \dots \end{aligned}$$

Конфигурация \mathbf{V} есть единичный отрезок действительной оси, \mathbf{G}^A — отрезок определенной длины:

$$\mathbf{V} = \{B_1(0), B_2(1)\}, \mathbf{G}^B = \emptyset, z'' = az + b.$$

Трехэлементная структура множества \mathbf{A} может быть двух видов: в виде отрезка с внутренней точкой и в виде треугольника:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^3 &= \mathbf{A}^{3,1} \cup \mathbf{A}^{3,2} \cup \mathbf{A}^{3,3}, d\mathbf{A}^{3,i} \leq k|z^0|; \\ \mathbf{A}_1^{3,1} &= \{\{A_1\}, \{A_2\}, \{A_3, \dots, A_n\}\}, \\ \mathbf{A}_2^{3,1} &= \{\{A_1\}, \{A_2, A_3\}, \{A_4, \dots, A_n\}\}, \dots \end{aligned}$$

В случае отрезка \mathbf{G}^A определяет положение элемента $\mathbf{A}^{3,2}$ относительно элементов $\mathbf{A}^{3,1}$ и $\mathbf{A}^{3,3}$. В случае треугольника \mathbf{G}^A определяет его форму: прямоугольную, равнобедренную, равносторонную или общего вида и его метрические характеристики — соотношения длин сторон и др. Конфигурация

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2\},$$

$$\mathbf{V}_1 = \{B_{1,1}(x'_1), B_{1,2}(x'_2), B_3(x'_3)\}, x'_1 < x'_2 < x'_3,$$

$$\mathbf{V}_2 = \{B_{1,1}(x'_1), B_{1,2}(z'_2), B_3(x'_3)\}, \text{Im } z'_2 \neq 0.$$

И так далее.

Вторым частным случаем будет $m = n$. Множества \mathbf{A} и \mathbf{V} должны быть упорядочены, т. е. $B_i \leftrightarrow A_i$. Тогда

$$F = \sum_{i=1}^n |z_i'' - z_i|^2 \rightarrow \min,$$

$$\mathbf{V} = \{B_i\}, z'' = az + b.$$

Третьим частным случаем будет $m > n$. Тогда

$$F_j = \sum_{B_{i,s}} \sum_{A_{i,s}} |z_i'' - z_i|^2 \rightarrow \min.$$

Решение задачи однозначно и легко обобщается на любое число заданных точек, если каждая частная структура исходного множества носит очевидный кластерный характер, т. е.

$$A_{i,j}^C \cap A_{i,j+1}^C = \emptyset, d(A_{i,j}^C, A_{i,j+1}^C) > \max d(A_i, A_{i+1} \dots)$$

Предположим, что это не так. Пусть

$$A_{i,j}^C \cap A_{i,j+1}^C = A_{i,j}^{C+} = A_{i,j+1}^{C-}$$

То есть

$$A_{i,j}^C \setminus A_{i,j}^{C+} \rightarrow B_{i,j}, A_{i,j+1}^{C+} \setminus A_{i,j+1}^{C-} \rightarrow B_{i,j+1}$$

Но точки множества $A_{i,j}^{C+} = A_{i,j+1}^{C-}$, как и сами эти множества, нельзя однозначно поставить в соответствие ни множеству $B_{i,j}$ ни $B_{i,j+1}$. Тогда существуют разные возможности, зависящие от общей структуры исходного множества. Например, $A_{i,j}^{C+} = A_{i,j+1}^{C-}$ можно выделить в отдельный структурный элемент, а конфигурацию B_i дополнить соответствующим элементом, находящимся в определенной метрической связи с соседними элементами.

Другой возможностью может стать разбиение множества $A_{i,j}^{C+} = A_{i,j+1}^{C-}$ на два подмножества с отнесением их соответствующим элементам конфигурации.

Тестовые задачи. Рассмотрим простые примеры. Пусть

$$A(z) = \{A_1(1+i), A_1(2+i), A_1(2+2i), A_1(2+3i), A_1(4+3i)\}$$

Припишем этому множеству несколько структур

$$A^1 = \left\{ \begin{aligned} \{A_1, A_2\} = A^1, \{A_3\} = A^1 \\ \{A_2, A_4, A_5\} = A^1 \end{aligned} \right\}$$

$$A^2 = \left\{ \begin{aligned} \{A_1\} = A^2, \{A_2, A_3, A_4\} = A^2, \{A_5\} = A^2 \end{aligned} \right\}$$

$$A^3 = \{A_i\} = A^3, i = 1, \dots, 5$$

Пусть $G^{A,1} = G^{A,2} = "A^1$ равноудаленно от A^1 и $A^3"$. $G^{A,3} = "A^3 A^3" = |A_2^3 A_3^3| = |A_3^3 A_4^3| = |A_4^3 A_5^3|^u$. Выберем конфигурацию $B^1(z') = B^2(z') = \{B_1(0), B_2(1), B_3(2)\}$, $B^3(z') = \{B_j(j-1), j = 1, \dots, 5\}$. Для всех структур $z'' = az' + b$. Тогда

$$F_1 = \sum_{i=1}^2 |az'_i + b - z_i|^2 + \sum_{i=3}^3 \dots + \sum_{i=4}^5 \dots \rightarrow \min,$$

$$F_2 = \sum_{i=1}^1 |az'_i + b - z_i|^2 + \sum_{i=2}^4 \dots + \sum_{i=5}^5 \dots \rightarrow \min,$$

$$F_3 = \sum_{i=1}^5 |az'_i + b - z_i|^2 \rightarrow \min,$$

После $\frac{\partial F_i}{\partial a} = 0, \frac{\partial F_i}{\partial b} = 0$ получаем системы линейных уравнений, решение которых дает значения a, b . Результат приведен на рис. 1.

Второй пример. Задана выборка $A_i(x_i, y_i), i = 1, \dots, 100$. Предварительный анализ дает основания предположить пятиэлементную кластерную структуру множества A (рис. 2):

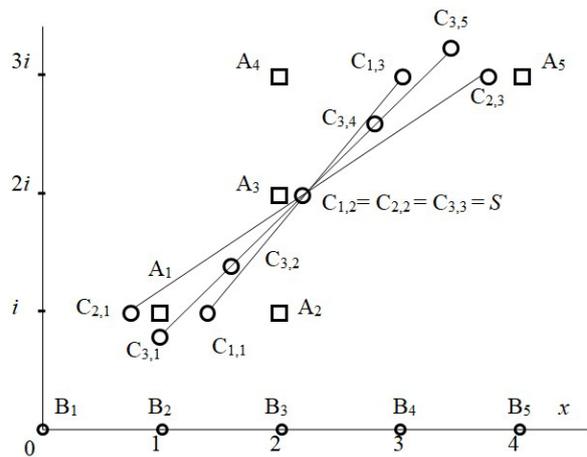


Рис. 1. Аппроксимация множества пяти точек

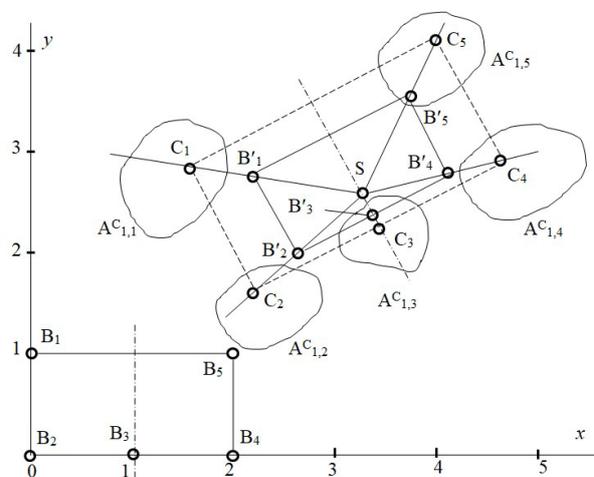


Рис. 2. Аппроксимация кластерной структуры прямоугольником

$$A_1 = \cup A_{1,j}^C, j = 1, \dots, 5,$$

$$A_{1,1}^C = \{A_1, \dots, A_{20}\}, A_{1,2}^C = \{A_{21}, \dots, A_{40}\},$$

$$A_{1,3}^C = \{A_{41}, \dots, A_{60}\},$$

$$A_{1,4}^C = \{A_{61}, \dots, A_{80}\}, A_{1,5}^C = \{A_{81}, \dots, A_{100}\}.$$

Каждый элемент общей структуры — одноэлементный по структуре кластер объемом 20 точек. Нумерация точек внутри кластера не имеет значения. Параметризация G^A следующая: $G^A = "A_1$ описывается приближенно прямоугольником с соотношением длин сторон 1:2. Одна из длинных сторон разделена на две равные части". Конфигурация-оригинал: $B = \{B_1(0, 1), B_2(0, 0), B_3(1, 0), B_4(2, 0), B_5(2, 1)\}$, $B_j(x'_j, y'_j) \rightarrow A_{1,j}^C$.

Преобразование $T: B \rightarrow C_1$ выбрано подобием $z'' = az' + b$. Тогда

$$F_1 = \sum_{j=1}^5 \left(\sum_{i=20j-19}^{20j} |az'_i + b - z_i|^2 \right) \rightarrow \min.$$

После вычислений по МНК получаем преобразование (значения коэффициентов округлены):

$x'' = 1,23x' - 0,65y' + 2,2$, $y'' = 0,65x' + 1,23y' + 1,6$. Множество точек образа: $S = \{C_1(1,55; 2,83), C_2(2,2; 1,6), C_3(3,43; 2,25), C_4(4,66; 2,9), C_5(4,01; 4,13)\}$. Из уравнений преобразования легко вычисляется угол поворота $\alpha \approx 27^\circ 50'$ и коэффициент гомотетии $k \approx 1,4$.

Заключение. Задача аппроксимации искаженных точечных конфигураций рассмотрена на плоскости. Возможны её обобщения как в сторону увеличения размерности пространства, так и в сторону увеличения порядка носителя формы. Первый случай — обобщение на трехмерное пространство и многомерные пространства в литературе не описан. Обобщений в сторону увеличения порядка носителя формы крайне мало. В качестве носителя использовалась двумерная сфера.

Библиографический список

1. Юрков В. Ю. Однопараметрическая аппроксимация плоских семейств прямых // Проблемы машиноведения: материалы III Междунар. науч.-техн. конф. Омск: Изд-во ОмГТУ, 2019. С. 363–368.
2. Podolak J., Shilane P., Giesen J., Gross M. [et al.]. Example-based 3D scan completion // Proc. Symposium on Geometry Processing. 2005. P. 23–32.
3. Каркищенко А. Н., Гречухин И. А. Локализация характерных точек на основе естественной симметрии изображений // Интеллектуальные системы управления на железнодорожном транспорте. Москва: НИИАС, 2012. С. 261–265.
4. Simari P., Kalogerakis E., Singh K. Folding meshes: Hierarchical mesh segmentation based on planar symmetry // Eurographics Symposium on Geometry Processing Proceedings. 2006. P. 111–119. DOI:10.1145/1281957.1281972.
5. Михляев С. В. Исследование итерационного метода наименьших квадратов для оценивания параметров аппроксимирующей окружности // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13, № 5. С. 41–50.

мирующей окружности // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13, № 5. С. 41–50.

6. Прихач И. В., Мамчиц М. В., Гундина М. А. Приближение окружностью данных, полученных при обработке промышленных изображений // X Машеровские чтения. Витебск: ВГУ имени П. М. Машерова, 2016. С. 25–27. ISBN 978-985-517-548-4.

7. Ефимов Ю. С., Матвеев И. А. Выделение точных границ радужки на изображении глаза // Информационные технологии. 2017. Т. 23, № 4. С. 300–309.

8. Коноваленко И. А., Кохан В. В., Николаев Д. П. Оптимальная аффинная аппроксимация проективного преобразования изображений // Сенсорные системы. 2019. Т. 33, № 1. С. 7–14. DOI: 10.1134/S02350092190100629.

9. Козловский А. Н. Алгоритм обнаружения вершины угла на изображении на основе аппроксимации контура бинарного изображения // Международный научный журнал. 2016. № 9. С. 63–73.

ЮРКОВ Виктор Юрьевич, доктор технических наук, профессор (Россия), профессор кафедры «Конструирование и технология изделий легкой промышленности» Омского государственного технического университета, г. Омск.

SPIN-код: 2414-1438

ORCID: 0000-0003-2667-8103

Адрес для переписки: viktor_yurkov@mail.ru

Для цитирования

Юрков В. Ю. Аппроксимация двумерных множеств точечными конфигурациями // Омский научный вестник. 2023. № 2 (186). С. 55–59. DOI: 10.25206/1813-8225-2023-186-55-59.

Статья поступила в редакцию 04.04.2023 г.

© В. Ю. Юрков

APPROXIMATION OF PLANAR POINT SETS BY POINT CONFIGURATIONS

The paper is devoted to planar linear point sets having hierarchical structure. Point configurations arise naturally in several areas of computational geometry. In the paper, the linear approximation of planar point configurations is discussed. Planar point configuration is considered as a fuzzed and deformed image of some ideal configuration. Also, it may be considered as random realizations of ideal one. Pure images and deformed ones are described by the same hierarchical structures. The structure of approximating configuration is determined a priori. Image approximation is realized by mean of least square restoration. The correspondence of the structures is one of the parameters of approximation. Identification procedure is realized by linear transformations. Similarity transformations as general ones are used in the calculations.

Keywords: point set, configuration, approximation, linear transformation, distance.

References

1. Yurkov V. Yu. Odnoparametricheskaya approksimatsiya ploskikh semeystv pryamykh [One-parameter approximation of planar families of straight lines] // Problemy mashinovedeniya. *Problems of Mechanical Engineering*. Omsk, 2019. P. 363–368. (In Russ.).
2. Podolak J., Shilane P., Giesen J., Gross M. [et al.]. Example-based 3D scan completion // Proc. Symposium on Geometry Proceeding. 2005. P. 23–32. (In Engl.).
3. Karkishchenko A. N., Grechukhin I. A. Lokalizatsiya kharakternykh toчек na osnove estestvennoy simmetrii [Localisation of characteristic points based on natural image symmetry] // Intellektual'nyye sistemy upravleniya na zheleznodorozhnom transporte. *Intelligent Control Systems for Railway Transport*. Moscow, 2012. P. 261–265. (In Russ.).
4. Simari P., Kalogerakis E., Singh K. Folding meshes: Hierarchical mesh segmentation based on planar symmetry // Eurographics Symposium on Geometry Processing Proceedings. 2006. P. 111–119. DOI: 10.1145/1281957.1281972. (In Engl.).
5. Mikhlyayev S. V. Issledovaniye neiteratsionnogo metoda naimen'shikh kvadratov dlya otsenivaniya parametrov approksimiruyushchey okruzhnosti [A study of a non iterative least squares method for estimating the parameters of an approximating circle] // Vychislitel'nyye tekhnologii. *Computational Technologies*. 2008. Vol. 13, no. 5. P. 41–50. (In Russ.).
6. Prikhach I. V., Mamchits M. V., Gundina M. A. Priblizheniye okruzhnost'yu dannykh, poluchennykh pri obrabotke promyshlennykh izobrazheniy [Circle Approximation of industrial image processing data] // X Masherovskiye chteniya. *X Masherov Readings*. Vitebsk, 2016. P. 25–27. ISBN 978-985-517-548-4. (In Russ.).
7. Efimov Yu. S., Matveyev I. A. Vydeleniye tochnykh granits raduzhki na izobrazhenii glaza [Iris image segmentation by paired gradient method with pupil boundary refinement] // Informatsionnyye tekhnologii. *Information Technologies*. 2017. Vol. 23, no. 4. P. 300–309. (In Russ.).
8. Konovalenko I. A., Kokhan V. V., Nikolayev D. P. Optimal'naya affinnaya approksimatsiya proyektivnogo preobrazovaniya izobrazheniy [Optimal affine approximation of image projective transformation] // Sensornyye sistemy. *Sensory Systems*. 2019. Vol. 33, no. 1. P. 7–14. DOI: 10.1134/S02350092190100629. (In Russ.).
9. Kozlovskiy A. N. Algoritm obnaruzheniya vershiny ugla na izobrazhenii na osnove approksimatsii kontura binarnogo izobrazheniya [Vertex detection algorithm in image processing based on binary image contour approximation] // Mezhdunarodnyy nauchnyy zhurnal. *International Scientific Journal*. 2016. No. 9. P. 63–73. (In Russ.).

YURKOV Viktor Yuryevich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of Design and Technology of Light Industry Product Manufacture Department, Omsk State Technical University, Omsk.
SPIN-code: 2414-1438
ORCID: 0000-0003-2667-8103
Correspondence address: viktor_yurkov@mail.ru

For citations

Yurkov V. Yu. Approximation of planar point sets by point configurations // Omsk Scientific Bulletin. 2023. No. 2 (186). P. 55–59. DOI: 10.25206/1813-8225-2023-186-55-59.

Received April 04, 2023.

© V. Yu. Yurkov