

<sup>1</sup>Омский автобронетанковый  
инженерный институт,  
г. Омск

<sup>2</sup>Омский государственный  
технический университет,  
г. Омск

## АНАЛИЗ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАР КАТАНИЯ ТИПА «ЦИЛИНДР В ЦИЛИНДРЕ»

Статья посвящена исследованию специфических кинематических пар, применяемых во многих областях машиностроения: так называемых «пар катания», используемых во многих механизмах. Исследование основано на подробном изучении структуры соединения типа «цилиндр в цилиндре», рассмотрены их геометрические параметры. Анализ был рассмотрен по расположению осей цилиндров между собой: когда оси параллельны и когда они пересекаются или перекрещиваются под углом  $90^\circ$ . Данное исследование дополняет данные в теории описания кинематических пар, в частности пар катания, и позволяет синтезировать их новые виды для их рационального использования в механизмах многих отраслей промышленности.

**Ключевые слова:** кинематическая пара, пара катания, цилиндр, подвижность, связи (неголономные), скольжение, катание, верчение.

**Введение.** Понятие кинематической пары в теории механизмов и машин является специфическим и объясняется как «подвижное соединение двух соприкасающихся звеньев» [1]. Понятие кинематической «пары катания» было описано А. В. Верховским [2] в своих трудах как частный случай кинематических пар, когда элементами сопряжения являются тела вращения — цилиндры, конусы, шары (сферы) и т.д. В качестве исследования рассмотрим кинематическую пару (КП) «цилиндр-цилиндр», т.е. два звена будут представлять собой цилиндры, и соединяться они будут «внутри». Когда речь идет о степенях свободы одного цилиндра относительно другого, предполагается рассмотрение подвижности кинематической пары катания, которая, как известно, напрямую связана с понятием «связи» кинематической, как ограничение по перемещению, а именно по существующей классификации кинематических пар, известно, что любая кинематическая пара характеризуется своим классом, который определяется количеством связей, налагаемых на пару. Чем меньше связей налагается на кинематическую пару, тем больше подвижность кинематической пары и тем выше кинематическая мобильность механизма. Кроме того, низшие кинематические пары имеют меньший износ, большую нагрузочную способность и поэтому используются наиболее часто. Создание механизмов, имеющих наименьшее число связей, состоящих в основном из низших КП, является одной из наиболее актуальных задач современного машиностроения.

Данные КП катания встречаются в быту и на производстве. Многие из них в виде кинематических соединений: звенья сцепления цепи, подшипники качения с цилиндрическими телами качения,

кинематические пары пятого класса — вращения, четвертого класса — цилиндрические пары, шарниры Гука, КП кулачок-паз, которые используются во многих механизмах робототехники, автоматических конвейерах, металлорежущих станках, устройствах крепления, суппортах и др.

Данное описание опирается на исследования А. В. Верховского, Л. Т. Дворникова и Э. Я. Живаго и дополняет некоторые аспекты, касающиеся КП типа «цилиндр-цилиндр» [2–5]. Кинематические характеристики различных КП качения были подробно описаны в [6, 7], в частности КП «цилиндр в цилиндре». Однако эти данные не отражают общей специфики КП «цилиндр в цилиндре» по движениям, подвижностям и многоконтактности. Особый интерес в кинематических парах представляют неголономные связи [8], которые в КП катания (качения) исследованы в [7–12] и др. Целесообразность данной работы — это обобщение закономерностей описания связей подвижного и неподвижного цилиндров с учетом расположения их осей в пространстве, точек контакта и на основе этого предложить новый вид КП типа «цилиндр в цилиндре», связанный с увеличением подвижности КП, за счёт изменения их формы геометрии. Новизна предлагаемой теории заключается в том, что изменение геометрических параметров одного из цилиндров (подвижного), а именно уменьшением длины его образующей и заменой ее криволинейным участком, в частности дугой окружности, приводит к появлению дополнительной степени свободы: катание этой дуги относительно касательной к ней.

**Постановка задачи.** Задано сопряжение типа «цилиндр в цилиндре» в виде кинематической пары:

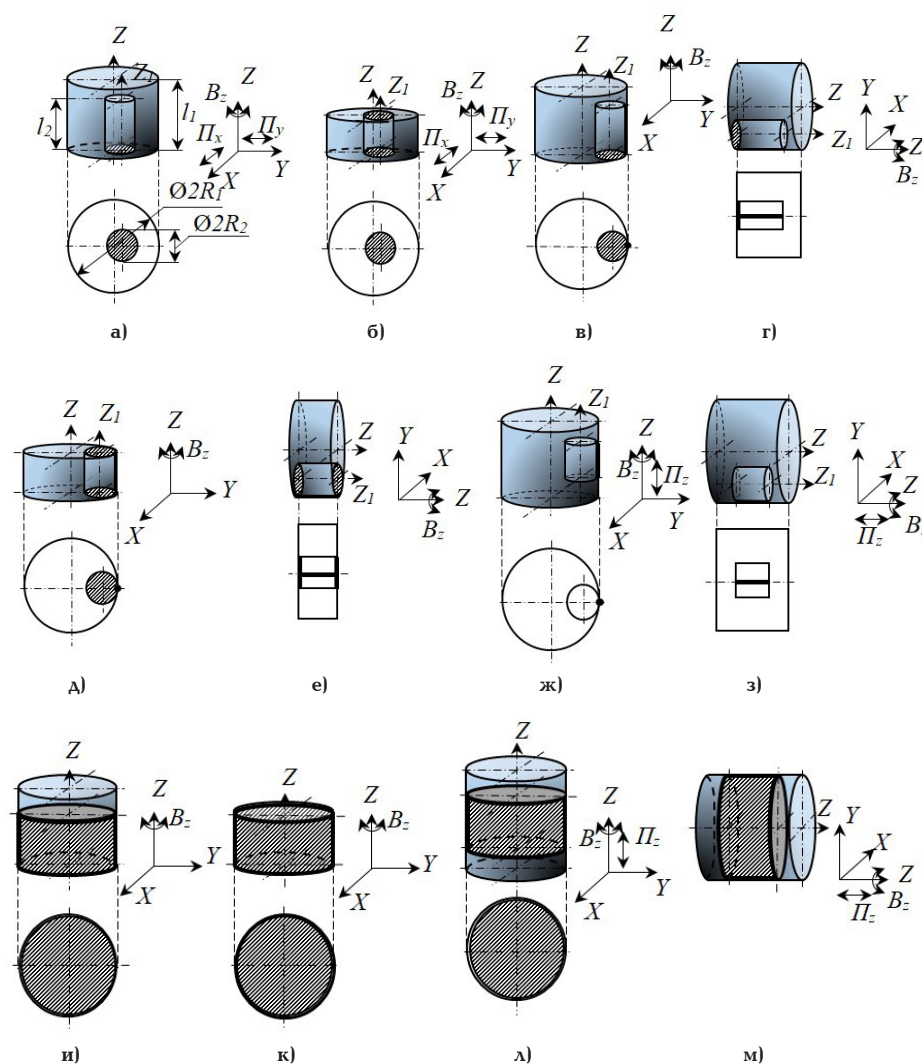


Рис. 1. Сопряжение «цилиндр в цилиндре» при параллельном расположении осей: а — КП  $(\Pi_1-\Pi_2)_1$  пар; б — КП  $(\Pi_1-\Pi_2)_2$  пар; в, г — КП  $(\Pi_1-\Pi_2)_3$  пар; д, е — КП  $(\Pi_1-\Pi_2)_4$  пар; ж, з — КП  $(\Pi_1-\Pi_2)_5$  пар; и — КП  $(\Pi_1-\Pi_2)_6$  пар; к — КП  $(\Pi_1-\Pi_2)_7$  пар; л, м — КП  $(\Pi_1-\Pi_2)_8$  пар

подвижный цилиндр  $\Pi_2$  внутри неподвижного  $\Pi_1$ . Известны геометрические параметры этих цилиндров, их ограничения по размерам, а также виды, расположение осей этих цилиндров между собой: 1) параллельны, 2) перпендикулярны и 3) пересекаются под произвольным углом. Кроме того, для каждого варианта определяется степень свободы подвижного цилиндра внутри неподвижного вдоль и вокруг координатных осей, а также сами движения: скольжение (С), катание (К) и верчение (В). Задача исследования: провести анализ сопряжения «цилиндр в цилиндре»  $\Pi_1-\Pi_2$  для их объединения в общую классификацию».

**Теория.** Из исследований А. В. Верховского [2] известны понятия движения в данных КП: 1) скольжение, 2) качение и 3) верчение. Им были даны следующие определения: скольжение — когда одна точка, принадлежащая одной поверхности, пробегает целый ряд точек, лежащих на другой поверхности; качение — когда одна поверхность вращается по отношению к другой вокруг какой-нибудь линии, лежащей в общей касательной плоскости, причем названная линия проходит через точку касания; верчение — когда одна поверхность вращается по отношению к другой вокруг общей нормали, проведенной в точку касания поверхностей. Все эти виды движений встречаются и в данных КП, и описание

их подвижностей соответствует известной формуле Сомова – Малышева [1]:

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1, \quad (1)$$

где  $n$  — количество подвижных звеньев;  $p_i$  — количество пар  $i$ -го класса.

Из формулы (1) видно, что для данного исследования:  $n = 1$  и  $p_1 = 1$ , меняется. Кроме того, вид связи этих цилиндров — точки, прямые и поверхности (плоскости) и их общая совокупность, т.е. данные КП являются или *низшими*, или *высшими* [1].

Описывать различные виды КП катания «цилиндр в цилиндре» будем по следующим характеристикам:

#### **1. Геометрические параметры этих цилиндров и их ограничения:**

$l_1$  — длина образующей «первого» неподвижного цилиндра;  $R_1$  — радиус неподвижного цилиндра;  $l_2$  — длина образующей подвижного цилиндра;  $R_2$  — радиус подвижного цилиндра (рис. 1). Ограничения каждой КП описываются неравенствами:  $R_1 \geq 2R_2$  или  $R_1 \approx R_2$ , а также  $l_1 > l_2$  или  $l_1 = l_2$ . В общем случае, по расположению цилиндров между собой возможно три вида их соединения (сопряжения):

1) *оси цилиндров  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  располагаются параллельно между собой;*

2) оси цилиндров  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  располагаются перпендикулярно между собой, т.е. либо пересекаются, либо перекрещиваются под углом  $90^\circ$ ;

3) оси цилиндров  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  располагаются под некоторым углом  $\alpha$  между собой: при  $\alpha = 90^\circ$  — это первый случай, при  $\alpha = 0^\circ$  — это второй случай.

**II. Вид контакта (связи) этих цилиндров и их количество « $n_k$ »** — точка, прямая, плоскость и поверхность (цилиндрическая) и их общая совокупность вместе, т.е. многоконтактность:  $k$  и  $n_k$  КП [3–5], где  $k$  — число контактов в КП ( $k = 1, 2, \dots, 6$ ),  $n_k$  — общее количество  $k$ -контактных пар;

**III. Степень подвижности  $W$  одного цилиндра внутри другого:** учитываются количества движений подвижного цилиндра внутри неподвижного вдоль и вокруг координатных осей  $W$ , а также сами движения по сути: скольжение ( $C$ ), катание ( $K$ ) и верчение ( $B$ ) [2, с. 16].

Введём системы отсчета: неподвижная  $OXYZ$  — для неподвижного  $\Pi_1$  и подвижная  $O_1X_1Y_1Z_1$  — для подвижного  $\Pi_2$ .

Рассмотрим первый вид, расположения осей цилиндров  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ :

#### I. Оси цилиндров $\Pi_1$ и $\Pi_2$ параллельны

Для полного описания характеристик КП  $\Pi_1$ – $\Pi_2$  введем понятие выше-нижней КП — когда сопряжение цилиндров происходит и по точкам (прямым), и по поверхностям (плоскостям).

Составляем перечень структур этих КП, где индекс «пар» обозначает — параллельность осей вращения  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ .

**1) КП ( $\Pi_1$ – $\Pi_2$ )<sub>1</sub><sup>пар</sup>:** Цилиндр  $\Pi_2$  своим основанием полностью касается основания цилиндра  $\Pi_1$  по площади  $s=\pi R_2^2$  КП — низшая (рис. 1а).

Следуя классификации А. В. Верховского [2, с. 16], движения  $\Pi_2$  внутри  $\Pi_1$  можно обозначить следующим образом:  $(\Pi_x; \Pi_y; \Pi_z) = C_3(B_{z1}) = B_1(C_1)$ ,  $k = 1$  (одноконтактная КП),

$$W = 6 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 3, \quad (2)$$

где движение  $C_3$  — скольжение вдоль двух осей  $X$ ,  $Y$  и оси  $Z_1$  вокруг оси  $Z$  (вращение вокруг неё);  $B_1$  — верчение вокруг оси  $Z_1$ , которое одновременно может быть и скольжением  $C_1$  вокруг оси  $Z_1$  (рис. 1а).

**2) КП ( $\Pi_1$ – $\Pi_2$ )<sub>2</sub><sup>пар</sup>:**  $\Pi_2$  своим основанием полностью касается оснований  $\Pi_1$  по площадям  $s=\pi R_2^2$  КП — низшая (рис. 1б):  $(\Pi_x; \Pi_y; \Pi_z) = C_3(B_{z1}) = B_1(C_1)$ ,  $k = 2$  (двухконтактная КП),

$$W = 6 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 3, \quad (3)$$

**3) КП ( $\Pi_1$ – $\Pi_2$ )<sub>3</sub><sup>пар</sup>:**  $\Pi_2$  своим основанием полностью касается основания  $\Pi_1$  по площади  $s=\pi R_2^2$  и касается образующей глиной  $l_2$  поверхности  $\Pi_1$ . КП — выше-нижняя (рис. 1в, г):  $(B_z) = C_1$ ,  $(B_{z1}, B_{z1}) = K_1$ ,  $(B_{z1}) = B_1(C_1)$ ,  $k = 2$  (двухконтактная КП),

$$W = 6 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = 1, \quad (4)$$

**4) КП ( $\Pi_1$ – $\Pi_2$ )<sub>4</sub><sup>пар</sup>:**  $\Pi_2$  своими основаниями полностью касается оснований  $\Pi_1$  по площадям  $s=\pi R_2^2$  и касается образующей глиной  $l_2$  поверхности  $\Pi_1$ . КП — выше-нижняя (рис. 1а, е):  $(B_z) = C_1$ ,  $(B_{z1}, B_{z1}) = K_1$ ,  $(B_{z1}) = B_1(C_1)$ ,  $k = 3$  (трехконтактная КП),

$$W = 6 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = 1, \quad (5)$$

**5) КП ( $\Pi_1$ – $\Pi_2$ )<sub>5</sub><sup>пар</sup>:**  $\Pi_2$  своей образующей касается образующей  $\Pi_1$  по длине  $l_2$ . КП — высшая (рис. 1ж,

Вид и количество контактов в КП, $n_k$	Подвижность КП, $W$			$\Sigma n_k$
	1	2	3	
Одноконтактные, $n_1$		2	1	3
Двухконтактные, $n_2$	2		1	3
Трехконтактные, $n_3$	2			2
Итого	4	2	2	8

з):  $(\Pi_x; B_z; B_{z1}) = C_3$ ,  $(B_{z1}, B_{z1}) = K_1$ ,  $k = 1$  (одноконтактная КП),

$$W = 6 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = 2, \quad (6)$$

**6) КП ( $\Pi_1$ – $\Pi_2$ )<sub>6</sub><sup>пар</sup>:**  $\Pi_2$  своим основанием полностью касается основания  $\Pi_1$  по площади  $s=\pi R_2^2$  и полностью касается цилиндрической поверхности высотой  $l_2$   $\Pi_1$ . КП — низшая (рис. 1и):  $(B_z) = C_1(B_1)$ ,  $(B_z) = C_1(B_1)$ ,  $k = 2$  (двухконтактная КП),

$$W = 6 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = 1, \quad (7)$$

**7) КП ( $\Pi_1$ – $\Pi_2$ )<sub>7</sub><sup>пар</sup>:**  $\Pi_2$  своими основаниями полностью касается оснований  $\Pi_1$  по площадям  $s=\pi R_2^2$  и полностью касается цилиндрической поверхности высотой  $l_2 = l_1$   $\Pi_1$ . КП — низшая (рис. 1к):  $(B_z) = C_1(B_1)$ ,  $k = 2$  (двухконтактная КП),

$$W = 6 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = 1, \quad (8)$$

**8) КП ( $\Pi_1$ – $\Pi_2$ )<sub>8</sub><sup>пар</sup>:**  $\Pi_2$  своей цилиндрической поверхностью высотой  $l_2$  и радиусом  $R_2$  касается цилиндрической поверхности  $\Pi_1$ . КП — низшая (рис. 1л, м):  $(\Pi_x; B_z) = C_2$ ,  $k = 1$  (одноконтактная КП),

$$W = 6 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = 2. \quad (9)$$

Итого получилось 8 КП и сведём их в табл. 1.

Выделим второй вид расположения осей  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ :

#### II. Оси цилиндров $\Pi_1$ и $\Pi_2$ перпендикулярны (пересекаются или перекрещиваются под углом $90^\circ$ )

Далее, по аналогии, делаем их анализ, где индекс «пер» обозначает перпендикулярность осей вращения  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ , а заштрихованная область — это место контакта поверхностей  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ .

**1) КП ( $\Pi_1$ – $\Pi_2$ )<sub>1</sub><sup>пер</sup>:**  $\Pi_2$  касается основания  $\Pi_1$  по своей образующей, глиной  $l_2$ . КП — высшая (рис. 2а):  $(\Pi_x; \Pi_y; B_{y1}; B_z) = C_4(\Pi_x; \Pi_{y1}) = K_1$ ,  $B_{z1} = B_1(C_1)$ ,  $k = 1$  (одноконтактная КП),

$$W = 6 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 4, \quad (10)$$

Из движения  $(\Pi_x, B_{y1}) = K_1$  видно, что понятие качение (катание) включает два движения: поступательное перемещение (центра тяжести  $\Pi_2$ ) вдоль оси  $X$  ( $\Pi_x$ ) и повороты  $\Pi_2$  вокруг оси  $Y$ . Таким образом, движение — качение (катание) представляет собой сложное движение, включающее две степени свободы (подвижности).

**2) КП ( $\Pi_1$ – $\Pi_2$ )<sub>2</sub><sup>пер</sup>:**  $\Pi_2$  касается верхнего и нижнего оснований  $\Pi_1$  по двум своим образующим, глиной  $l_2$ . КП — высшая (рис. 2б):  $(\Pi_x; \Pi_y; B_{y1}; B_z) = C_4(\Pi_x; \Pi_{y1}) = K_1$ ,  $B_{z1} = B_1(C_1)$ ,  $k = 2$  (двухконтактная КП),

$$W = 6 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 4, \quad (11)$$

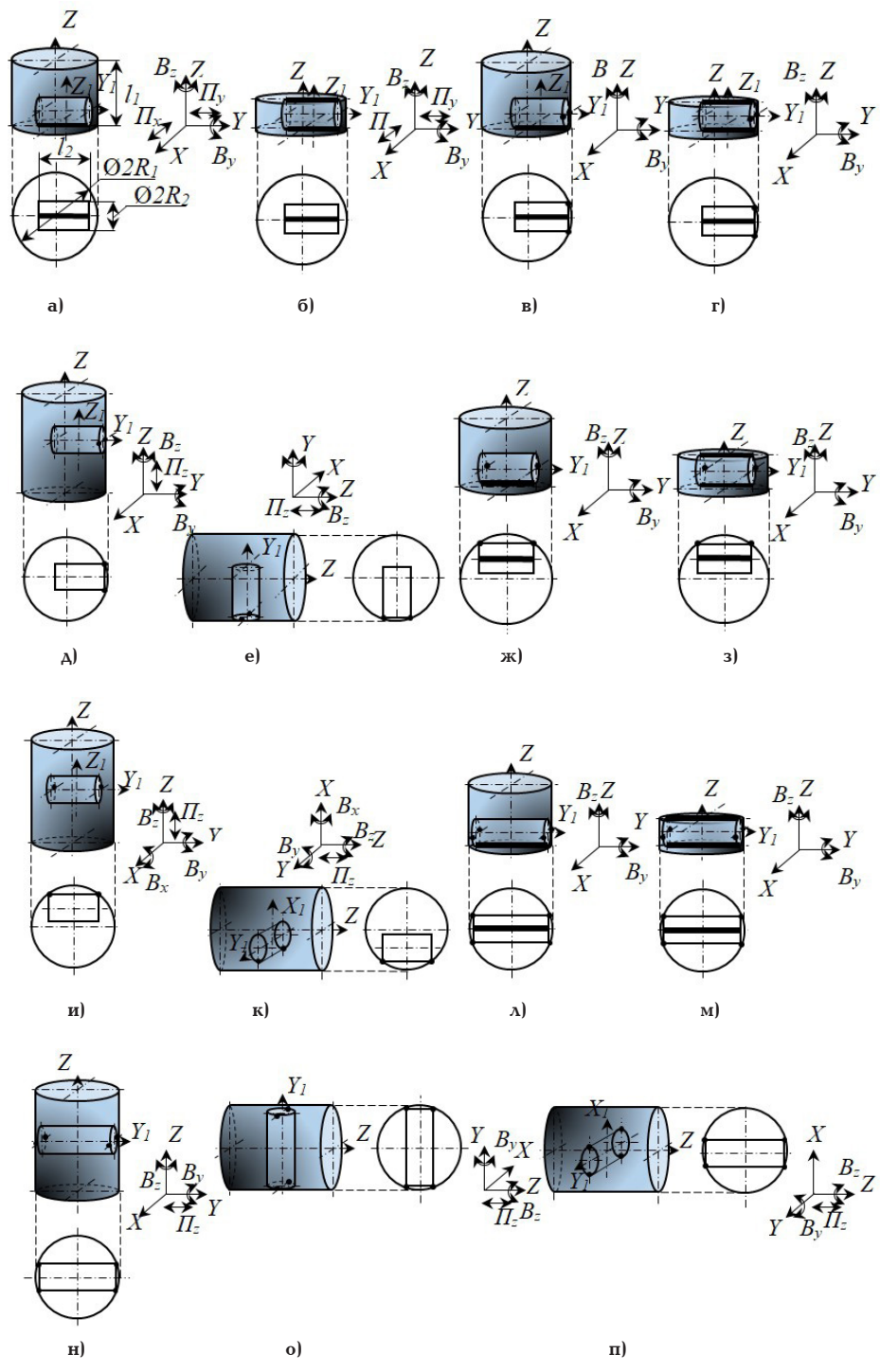


Рис. 2. Сопряжение «цилиндр в цилиндре» при перпендикулярном расположении осей:  
 а – КП  $(\Pi_1-\Pi_2)_{1\text{пер}}$ ; б – КП  $(\Pi_1-\Pi_2)_{2\text{пер}}$ ; в – КП  $(\Pi_1-\Pi_2)_{3\text{пер}}$ ; г – КП  $(\Pi_1-\Pi_2)_{4\text{пер}}$ ;  
 д, е – КП  $(\Pi_1-\Pi_2)_{5\text{пер}}$ ; ж – КП  $(\Pi_1-\Pi_2)_{6\text{пер}}$ ; з – КП  $(\Pi_1-\Pi_2)_{7\text{пер}}$ ; и, к – КП  $(\Pi_1-\Pi_2)_{8\text{пер}}$ ;  
 л – КП  $(\Pi_1-\Pi_2)_{9\text{пер}}$ ; м – КП  $(\Pi_1-\Pi_2)_{10\text{пер}}$ ; н, о, п – КП  $(\Pi_1-\Pi_2)_{11\text{пер}}$

3) КП  $(\Pi_1-\Pi_2)_{3\text{пер}}$ :  $\Pi_2$  касается основания  $\Pi_1$  по своей образующей глиной  $l_2$  и в двух диаметрально противоположных точках основания на поверхности  $\Pi_1$ . КП – высшая (рис. 2в):  $(B_{y1}; B_z) = C_2$ ,  $k = 3$  (трехконтактная КП),

$$W = 6 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = 2, \quad (12)$$

4) КП  $(\Pi_1-\Pi_2)_{4\text{пер}}$ :  $\Pi_2$  касается верхнего и нижнего оснований  $\Pi_1$  по своим образующим глиной  $l_2$  и в двух диаметрально противоположных точках оснований на поверхности  $\Pi_1$ . КП – высшая (рис. 2г):  $(B_{y1}; B_z) = C_2$ ,  $k = 4$  (четырёхконтактная КП),

$$W = 6 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = 2, \quad (13)$$

5) КП  $(\Pi_1-\Pi_2)_{5\text{пер}}$ :  $\Pi_2$  касается неподвижного  $\Pi_1$  в двух диаметрально противоположных точках основания на поверхности  $\Pi_1$ . КП – высшая (рис. 2д, е):  $(\Pi_z; B_{y1}; B_z) = C_3$ ,  $k = 2$  (двухконтактная КП),

$$W = 6 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 3, \quad (14)$$

6) КП  $(\Pi_1-\Pi_2)_{6\text{пер}}$ :  $\Pi_2$  касается основания  $\Pi_1$  по образующей глиной  $l_2$  и в двух точках оснований на поверхности  $\Pi_1$ . КП – высшая (рис. 2ж):  $(B_{y1}; B_z) = C_2$ ,  $k = 3$  (трехконтактная КП),

$$W = 6 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = 2, \quad (15)$$

Таблица 2

7) КП  $(\Pi_1 - \Pi_2)_{7\text{пер}}$ :  $\Pi_2$  касается верхнего и нижнего оснований  $\Pi_1$  по двум образующим длиной  $l_2$  и в двух точках оснований на поверхности  $\Pi_1$ . КП — высшая (рис. 2з);  $(B_{y1}; B_2) = C_2$ ,  $k = 4$  (четырёхконтактная КП),

$$W = 6 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = 2, \quad (16)$$

8) КП  $(\Pi_1 - \Pi_2)_{8\text{пер}}$ :  $\Pi_2$  касается  $\Pi_1$  в двух точках своих оснований на поверхности  $\Pi_1$ . КП — высшая (рис. 2и, к);  $(\Pi_2; B_x; B_{y1}; B_2) = C_4$ ,  $(\Pi_2; B_y) = K_1$ ,  $k = 2$  (двухконтактная КП),

Вид и количество контактов в КП, $n_k$	Подвижность КП, $W$				$\Sigma n_k$
	1	2	3	4	
Одноконтактные, $n_1$				1	1
Двухконтактные, $n_2$			1	2	3
Трёхконтактные, $n_3$		2			2
Четырёхконтактные, $n_4$		2	1		3
Пятиконтактные, $n_5$		1			1
Шестиконтактные, $n_6$		1			1
Итого		6	2	3	11

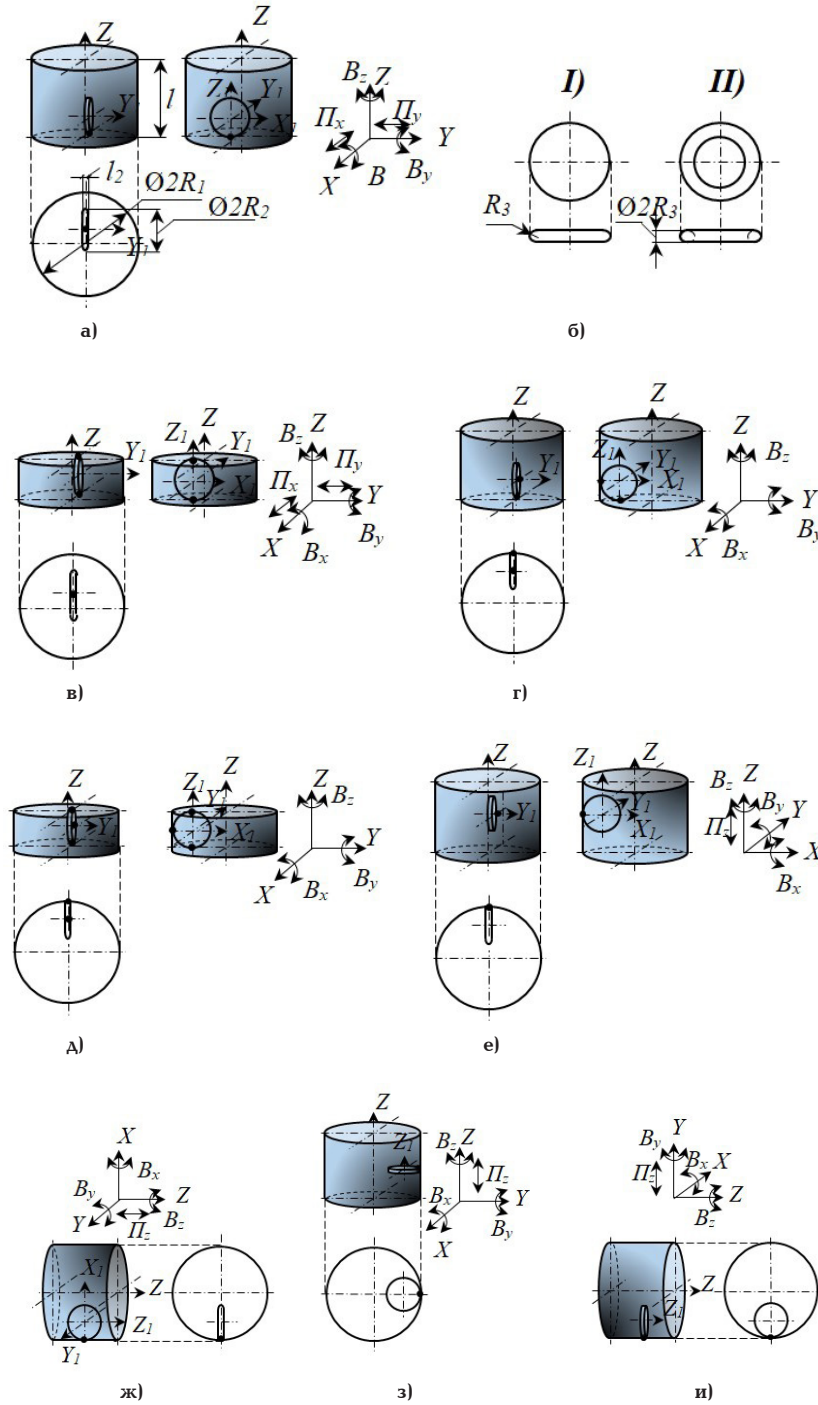


Рис. 3. Сопряжение «цилиндр в цилиндре» в виде диска (тора) внутри цилиндра: а — КП  $(\Pi_1 - \Pi_2)_{1A\text{пер}}$ , б: I — диск-пластина, II — кольцо-шайба (узкий тор); в — КП  $(\Pi_1 - \Pi_2)_{2A\text{пер}}$ ; г — КП  $(\Pi_1 - \Pi_2)_{3A\text{пер}}$ ; д — КП  $(\Pi_1 - \Pi_2)_{4A\text{пер}}$ ; е, ж — КП  $(\Pi_1 - \Pi_2)_{5A\text{пер}}$ ; з, и — КП  $(\Pi_1 - \Pi_2)_{6A\text{пер}}$

$$W = 6 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 4, \quad (17)$$

Таблица 3

Причём вращение  $B_x$  возможно не полностью, а в пределах угла поворота  $-90^\circ < \varphi_x < 90^\circ$ , т.к. при  $\varphi_x = \pm 90^\circ$  данная КП преобразуется в **КП**  $(\Pi_1 - \Pi_2)_5^{\text{нар}}$  (рис. 1ж, з).

**9) КП**  $(\Pi_1 - \Pi_2)_9^{\text{пер}}$ :  $\Pi_2$  касается основания  $\Pi_1$  по образующей глиной  $l_2$  и в четырех диаметрально противоположных точках двух своих оснований на поверхности  $\Pi_1$ . КП — высшая (рис. 2л):  $(B_{y1}; B_z) = C_2$ ,  $k = 5$  (пятиконтактная КП),

$$W = 6 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = 2, \quad (18)$$

**10) КП**  $(\Pi_1 - \Pi_2)_{10}^{\text{пер}}$ :  $\Pi_2$  касается верхнего и нижнего оснований  $\Pi_1$  по двум образующим глиной  $l_2$  и в четырёх диаметрально противоположных попарно точках оснований на поверхности  $\Pi_1$ . КП — высшая (рис. 2м):  $(B_{y1}; B_z) = C_2$ ,  $k = 6$  (шестиконтактная КП),

$$W = 6 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = 2, \quad (19)$$

**11) КП**  $(\Pi_1 - \Pi_2)_{11}^{\text{пер}}$ :  $\Pi_2$  касается  $\Pi_1$  в четырёх диаметрально противоположных попарно точках своих оснований на поверхности  $\Pi_1$ . КП — высшая (рис. 2н, о, п):  $(\Pi_z; B_{y1}; B_z) = C_3$ ,  $(\Pi_z; B_y) = K_1$ ,  $k = 4$  (четырёхконтактная КП),

$$W = 6 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 4. \quad (20)$$

Причём вращение  $B_x$  возможно не полностью, а в пределах угла поворота  $-90^\circ < \varphi_x < 90^\circ$ , т.к. при  $\varphi_x = \pm 90^\circ$  данная, по аналогии с **КП**  $(\Pi_1 - \Pi_2)_8^{\text{пер}}$  (рис. 2и, к) преобразуется в **КП**  $(\Pi_1 - \Pi_2)_5^{\text{нар}}$  (рис. 1ж, з).

Итого получилось 11 КП и сведём их в табл. 2.

Наконец рассмотрим *третий вид*, который является частным случаем первых двух: второй подвижный укороченный цилиндр, у которого длина образующей ( $l_2 = R_3$ ) во много раз меньше, чем радиус  $R_2$  представляет собой диск (или шайбу, если цилиндр был полый) (рис. 3а, б):

**III. Узкий цилиндр (диск, кольцо) — в цилиндре**

Ширину  $\Pi_2 - l_2$ , считаем очень маленькой:  $l_2 \ll R_2$  и её контакт вырождается в точку. Тогда принимаем образующую  $\Pi_2$  в виде кривой (дуги окружности), радиуса радиусом  $R_3$ . Тогда данный  $\Pi_2$  вырождается в диск с округлыми краями (кольцо) и может поворачиваться вокруг оси  $X$ , т.е. **появляется ещё одна степень свободы**. Такая пластина конструктивно может быть в виде *диска с округлыми краями (узкого тора или кольца)* (рис. 3б). Здесь в обозначении КП: нижний индекс «Д» означает *диск*. Ограничения каждой КП описываются неравенствами:  $l_2 = 2R_3 \ll R_2$ ,  $l_1 > 2R_2$  или  $l_1 = 2R_2$ .

**1) КП**  $(\Pi_1 - \Pi_2)_{1A}^{\text{пер}}$ :  $\Pi_2$  (диск, кольцо) касается основания  $\Pi_1$  в точке. КП — высшая (рис. 3а):  $(\Pi_z; B_y; B_{y1}) = C_3$ ,  $(\Pi_z; B_y) = K_1$ ,  $(B_z) = B_1$ ,  $k = 1$  (одноконтактная КП),

$$W = 6 \cdot 1 - 1 = 5, \quad (21)$$

**2) КП**  $(\Pi_1 - \Pi_2)_{2A}^{\text{пер}}$ :  $\Pi_2$  (диск, кольцо) касается верхнего и нижнего оснований  $\Pi_1$  в двух диаметрально противоположных точках. КП — высшая (рис. 3в):  $(\Pi_z; B_y; B_{y1}) = C_3$ ,  $(\Pi_z; B_y) = K_1$ ,  $(B_z) = B_1$ ,  $k = 2$  (двухконтактная КП),

$$W = 6 \cdot 1 - 1 = 5, \quad (22)$$

Вид и количество контактов в КП, $n_k$	Подвижность КП, $W$					$\Sigma n_k$
	1	2	3	4	5	
Одноконтактные, $n_1$				2	1	3
Двухконтактные, $n_2$			1		1	2
Трёхконтактные, $n_3$			1			1
Итого			2	2	2	6

Таблица 4

Вид и количество контактов в КП, $n_k$	Подвижность КП, $W$					$\Sigma k_i$
	1	2	3	4	5	
Одноконтактные, $n_1$		2	1	3	1	7
Двухконтактные, $n_2$	2		3	2	1	8
Трёхконтактные, $n_3$	2	2	1			5
Четырёхконтактные, $n_4$		2	1			3
Пятиконтактные, $n_5$		1				1
Шестиконтактные, $n_6$		1				1
Итого	4	8	6	5	2	25

**3) КП**  $(\Pi_1 - \Pi_2)_{3A}^{\text{пер}}$ :  $\Pi_2$  (диск, кольцо) касается одного основания  $\Pi_1$  в одной точке и своей поверхностью касается поверхности  $\Pi_1$  в одной точке. КП — высшая (рис. 3г):  $(B_{y1}; B_z) = C_2$ ;  $(B_x; B_z) = K_2$ ,  $k = 2$  (двухконтактная КП),

$$W = 6 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 3, \quad (23)$$

**4) КП**  $(\Pi_1 - \Pi_2)_{4A}^{\text{пер}}$ :  $\Pi_2$  (диск, кольцо) касается двух оснований  $\Pi_1$  в двух диаметрально противоположных точках и своей поверхностью касается поверхности  $\Pi_1$  в одной точке. КП — высшая (рис. 3д):  $(B_{y1}; B_z) = C_2$ ;  $(B_x; B_z) = K_2$ ,  $k = 3$  (трехконтактная КП),

$$W = 6 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 3, \quad (24)$$

**5) КП**  $(\Pi_1 - \Pi_2)_{5A}^{\text{пер}}$ :  $\Pi_2$  (диск, кольцо) касается одного основания  $\Pi_1$  в одной точке и своей поверхностью касается поверхности  $\Pi_1$  в одной точке. КП — высшая (рис. 3е, ж):  $(\Pi_z; B_{y1}; B_z) = C_3$ ,  $((\Pi_z; B_y); B_z) = K_2$ ,  $(B_x) = B_1$ ,  $k = 1$  (одноконтактная КП),

$$W = 6 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 4, \quad (25)$$

**6) КП**  $(\Pi_1 - \Pi_2)_{6A}^{\text{пер}}$ :  $\Pi_2$  (диск, кольцо) касается одного основания  $\Pi_1$  в одной точке и своей поверхностью касается поверхности  $\Pi_1$  в одной точке. КП — высшая (рис. 3з, и):  $(\Pi_z; B_{z1}; B_z) = C_3$ ,  $((B_z; B_{z1}); B_x) = K_2$ ,  $(B_y) = B_1$ ,  $k = 1$  (одноконтактная КП),

$$W = 6 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 4. \quad (26)$$

Итого получилось шесть КП, сведём их в табл. 3. Объединяя табл. 1, табл. 2 и табл. 3 в одну, получаем табл. 4, в которой объединены все  $k$ -контактные пары.

**Результаты исследования**

1. Выделено 25 видов КП типа  $\Pi_1 - \Pi_2$ , которые представлены совокупностью трех видов их кинематического соединения, что даёт полную класси-

фикацию данных КП  $Ц_1 - Ц_2$ ; составлены классификационные таблицы этих КП, которые связывают их подвижности, в зависимости от геометрического контакта, от вида, числа движений, а также от количества  $k$ -контактных связей (табл. 1 – табл.4), на основании которых, как базисных КП, можно синтезировать большое разнообразие кинематических соединений, обладающих своими кинематическими и динамическими свойствами и определяющих назначение механизма.

2. Определен *новый вид* КП типа  $Ц_1 - Ц_2$ : диск с округлыми краями (узкий тор или кольцо) внутри цилиндра, в результате чего возникает дополнительная степень свободы, отчего класс КП понижается и увеличивается ее подвижность, что эффективно для многих механизмов в машиностроении; введено специфическое понятие — *высше-нижней пары* (КП  $(Ц_1 - Ц_2)_3^{\text{пар}}$ , КП  $(Ц_1 - Ц_2)_4^{\text{пар}}$ ), описывающее КП и как высшую, и как низшую, что расширяет сферу исследований в области КП.

**Заключение.** В результате проведенного исследования геометрических параметров кинематических пар катания типа «цилиндр в цилиндре» синтезированы новые их виды, которые могут быть использованы в механизмах многих отраслей промышленности: в самолетостроении (КП типа  $Ц_1 - Ц_2$  в механизмах шасси), на производстве вооружения и военной техники, в транспортном, дорожном и сельскохозяйственном машиностроении (КП типа  $Ц_1 - Ц_2$  в роботостроении, кулачковых механизмах с геометрическим замыканием цилиндрического кулачка в профильном пазу автоматических конвейеров, металлорежущих станках — устройствах крепления, суппортах и др.). Именно в этих механизмах наблюдается необходимость увеличения подвижности КП типа  $Ц_1 - Ц_2$  за счет изменения формы подвижного цилиндра.

#### Библиографический список

1. Артоблевский И. И. Теория механизмов и машин. 4-е изд., перераб. и доп. Москва: Наука, 1988. 640 с.
2. Верховский А. В. Теория пространственных и плоских кинематических пар // Известия Сибирского механико-машиностроительного института. 1933. Т. 1 (52), вып. 1. С. 15–32.
3. Дворников Л. Т., Живаго Э. Я. Основы теории кинематических пар: моногр. Новокузнецк: Издат. центр СибГИУ, 1999. 102 с.
4. Живаго Э. Я. Теория и систематизация кинематических пар механических систем: автореферат дис. ... д-ра техн. наук. Новосибирск, 2000. 34 с.
5. Дворников Л. Т. Принципиальные уточнения теории кинематических пар // Машиностроение. 2014. № 23. С. 45–73.

6. Marigo A., Bicchi A. Rolling bodies with regular surface: controllability theory and applications // IEEE Transactions on Automatic Control. 2000. Vol. 45, no. 9. P. 1586–1599. DOI: 10.1109/9.880610.
7. Borisov A. V., Mamaev I. S. The rolling body motion of a rigid body on a plane and a sphere. Hierarchy of dynamics // Regular and Chaotic Dyn. 2003. Vol. 7, no. 2. P. 177–200. DOI: 10.1070/RD2002v007n02ABEH000204.
8. Яблонский А. А. Курс теоретической механики. В 2-х ч. Ч. 2. Динамика. Москва: Высшая школа, 1966. 411 с.
9. Karavaev Yu. L., Klekovkin A. V., Kilin A. A. Dynamic model of rolling friction of spherical bodies on a plane without slip // Nelineinaya Dinamika. 2017. Vol. 13, no. 4. P. 599–609. DOI: 10.20537/nd1704012.
10. Bizyaev I. A., Mamaev I. S. Permanent rotations in nonholonomic mechanics. Omnirotational Ellipsoid // Regular and Chaotic Dynamics. 2022. Vol. 27, no. 6. P. 587–612. DOI: 10.1134/S1560354722060016.
11. Li Z., Canny J. Motion of two rigid bodies with rolling constraint // IEEE Trans. on Robotics and Automation. 1990. Vol. 6, no. 1. P. 62–72. DOI: 10.1109/70.88118.
12. Levi M. Geometric phases in the motion of rigid bodies // Arch. Ration. Mech. Anal. 1993. Vol. 122. P. 213–229. DOI: 10.1007/BF00380255.

**ШАМУТДИНОВ Айдар Харисович**, кандидат технических наук, профессор РАЕ (Российской академии естествознания), доцент кафедры «Техническая механика» Омского автобронетанкового инженерного института, г. Омск.

SPIN-код: 4939-6254

AuthorID (РИНЦ): 688427

ORCID: 0000-0001-5896-7247

ResearcherID: HLN-7822-2023

Адрес для переписки: 1972id@list.ru

**ЛЕСНЯК Иван Юрьевич**, кандидат технических наук, и. о. заведующего, доцент кафедры «Машиноведение» Омского государственного технического университета, г. Омск.

SPIN-код: 6114-0646

ORCID: 0000-0002-9481-5985

ResearcherID: E-6397-2014

Адрес для переписки: lesnyak.ivan@gmail.com

#### Для цитирования

Шамутдинов А. Х., Лесняк И. Ю. Анализ кинематических пар катания типа «цилиндр в цилиндре» // Омский научный вестник. 2023. № 3 (187). С. 52–59. DOI: 10.25206/1813-8225-2023-187-52-59.

Статья поступила в редакцию 27.03.2023 г.

© А. Х. Шамутдинов, И. Ю. Лесняк

## THE ANALYSIS OF KINEMATIC ROLLING PAIRS SUCH AS «CYLINDER IN CYLINDER»

The article is devoted to the study of specific kinematic pairs used in many areas of mechanical engineering: the so-called «rolling pairs» used in many mechanisms. The study is based on a detailed study of the structure of the «cylinder in cylinder» connection, and their geometric parameters are considered. The analysis is considered by the location of the axes of the cylinders between themselves: when the axes are parallel and when they intersect or intersect at an angle of 90°. This study complements the data in the theory of description of kinematic pairs, in particular, rolling pairs, and makes it possible to synthesize their new types for their rational use in the mechanisms of many industries.

**Keywords:** kinematic pair, rolling pair, cylinder, mobility, constraints (nonholonomic), sliding, rolling, spinning.

### References

1. Artobolevskiy I. I. Teoriya mekhanizmov i mashin [The theory of mechanisms and machines]. 4th ed., revised and supplemented. Moscow, 1988. 640 p. (In Russ.).
2. Verkhovskiy A. V. Teoriya prostranstvennykh i ploskikh kinematicheskikh par [Theory of spatial and plane kinematic pairs] // *Izvestiya Sibirskogo Mekhaniko-Mashinostroitel'nogo Instituta. Proceedings of the Siberian Mechanical Engineering Institute*. 1933. No. 1 (52). P. 15–32. (In Russ.).
3. Dvornikov L. T., Zhivago E. Ya. Osnovy teorii kinematicheskikh par [Fundamentals of the theory of kinematic pairs]. Novokuznetsk, 1999. 102 p. (In Russ.).
4. Zhivago E. Ya. Teoriya i sistematizatsiya kinematicheskikh par mekhanicheskikh sistem [Theory and systematization of kinematic pairs of mechanical systems]. Novosibirsk, 2000. 34 p. (In Russ.).
5. Dvornikov L. T. Printsipial'nyye utochneniya teorii kinematicheskikh par [Fundamental refinements of the theory of kinematic pairs] // *Mashinostroyeniye. Mechanical Engineering*. 2014. № 23. P. 45–73. (In Russ.).
6. Marigo A., Bicchi A. Rolling bodies with regular surface: controllability theory and applications // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2000. Vol. 45, no. 9. P. 1586–1599. DOI: 10.1109/9.880610. (In Engl.).
7. Borisov A. V., Mamaev I. S. The rolling body motion of a rigid body on a plane and a sphere. Hierarchy of dynamics // *Regular and Chaotic Dyn.* 2003. Vol. 7, no. 2. P. 177–200. DOI: 10.1070/RD2002v007n02ABEH000204. (In Engl.).
8. Yablonskiy A. A. Kurs teoreticheskoy mekhaniki. V 2 ch. Ch. 2. Dinamika [Course of theoretical mechanics. In 2 parts. Part 2. Dynamics]. Moscow, 1966. 411 p. (In Russ.).
9. Karavaev Yu. L., Klekovkin A. V., Kilin A. A. Dynamic model of rolling friction of spherical bodies on a plane without slip // *Nelineinaya Dinamika*. 2017. Vol. 13, no. 4. P. 599–609. DOI: 10.20537/nd1704012. (In Engl.).
10. Bizyaev I. A., Mamaev I. S. Permanent rotations in nonholonomic mechanics. Omnirotational Ellipsoid // *Regular*

and Chaotic Dynamics. 2022. Vol. 27, no. 6. P. 587–612. DOI: 10.1134/S1560354722060016. (In Engl.).

11. Li Z., Canny J. Motion of two rigid bodies with rolling constraint // *IEEE Trans. on Robotics and Automation*. 1990. Vol. 6, no. 1. P. 62–72. DOI: 10.1109/70.88118. (In Engl.).

12. Levi M. Geometric phases in the motion of rigid bodies // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1993. Vol. 122. P. 213–229. DOI: 10.1007/BF00380255. (In Engl.).

**SHAMUTDINOV Aydar Kharisovich**, Candidate of Technical Sciences, Professor of RAE (Russian Academy of Natural Sciences), Associate Professor of Technical Mechanics Department, Omsk Tank-Automotive Engineering Institute, Omsk.

SPIN-code: 4939-6254

AuthorID (RSCI): 688427

ORCID: 0000-0001-5896-7247

ResearcherID: HLH-7822-2023

Correspondence address: 1972id@list.ru

**LESNYAK Ivan Yuryevich**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of Mechanical Engineering Department, Omsk State Technical University, Omsk.

SPIN-code: 6114-0646

ResearcherID: E-6397-2014

ORCID: 0000-0002-9481-5985.

Correspondence address: lesnyak.ivan@gmail.com

### For citations

Shamutdinov A. Kh., Lesnyak I. Yu. The analysis of kinematic rolling pairs such as «cylinder in cylinder» // *Omsk Scientific Bulletin*. 2023. No. 3 (187). P. 52–59. DOI: 10.25206/1813-8225-2023-187-52-59.

Received March 27, 2023.

© A. Kh. Shamutdinov, I. Yu. Lesnyak