

## РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ИЗМЕНЕННОЙ ЦИКЛОГРАФИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

В циклографическом моделировании линии трехмерного пространства известны прямая и обратная задачи. Решению этих задач в научной литературе посвящено достаточное количество публикаций. Авторами работы, на основе исследований известной классической циклографической модели, была получена ее модификация, названная измененной циклографической моделью. Необходимость в этой модели была вызвана решением ряда практических задач геометрического моделирования, в частности в области разработки поверхностных форм автомобильных дорог, где традиционно рассматривается только прямая задача геометрического моделирования, в которой требуется по пространственной оси дороги определить поверхностную форму последней. Авторами предложено решение обратной задачи моделирования для измененной циклографической проекции, позволяющее восстанавливать кривую линию пространства по ее циклографическому образу. В работе дано обоснование и приведено решение обратной задачи циклографического моделирования, реализованное на числовом примере. Результаты работы могут быть использованы в системах автоматизированного проектирования, специализирующихся на проектировании автомобильных дорог общего и специального назначения.

**Ключевые слова:** геометрическое моделирование, циклография, измененная циклографическая проекция, обратная задача, проектирование поверхностных форм автомобильных дорог.

**Введение.** Благодаря появлению и развитию информационно-вычислительной техники, системам автоматизированного проектирования и компьютерной алгебры, метод циклографического моделирования геометрических объектов стал всё чаще применяться в решении совершенно разнородных задач науки и производства [1–4].

Одной из его отличительных особенностей является то обстоятельство, что образуемая при циклографическом отображении пространственной кривой триада линий на плоскости проекций имеет взаимно однозначное параметрическое соответствие. Это позволяет решать как прямую, так и обратную задачу циклографического моделирования линии пространства.

Развитие циклографической модели пространственной кривой позволило авторам работы получить измененную циклографическую проекцию кривой, когда каждая из прямолинейных образующих линейчатых поверхностей, представляющих собой элементы аппарата циклографического моделирования линии пространства, всегда находится в плоскости, перпендикулярной ортогональной проекции исходной линии [4]. В дальнейших исследованиях такая проекция была использована авторами для разработки геометрической модели формообразования поверхностных форм автомобильных дорог общего назначения [4].

Анализ исследований в области автоматизированного проектирования поверхностных форм автомобильных дорог позволяет сделать вывод, что за последние годы на передний план выходит сравнительно новый вид проектирования, основанный на трехмерном представлении моделируемых объектов дорожного строительства. Уход от традиционного двухпроекционного проектирования позволяет во многом упростить и сократить вычислительные операции при проектировании, а также визуализировать моделируемые объекты дорожного полотна на всех этапах проектирования. При этом появляются задачи, в которых требуется по различным чертежам, планам или снимкам восстанавливать положение оси дороги в пространстве. И если при проектировании поверхностных форм автомобильной дороги на основе классической циклографической проекции такая задача считается решенной [1, 5], то в случае измененной циклографической проекции, на которой основана геометрическая модель формообразования поверхностных форм автомобильных дорог общего назначения, эта задача не исследовалась.

**Постановка задачи.** В циклографическом отображении проекция точки  $A(x,y,z)$  пространства  $R^3$  на плоскости  $z=0$  представляет собой цикл (направленную окружность), центр которого соответствует координатам  $(x,y)$ , а радиус — координате

з исходной точки А. В зависимости от положения точки относительно плоскости проекций (знака координаты z), цикл будет иметь то или иное направление [5–8]. При таком способе отображения образуется проецирующий конус с вершиной в точке А и основанием в плоскости z=0, которым служит цикл (циклографическая проекция точки). Очевидно, циклографической проекцией пространственной кривой  $\bar{P}(t) = (x(t), y(t), z(t)); \bar{P}'(t) \neq 0; t \in R: T_0 \leq t \leq T$  будет являться огибающая однопараметрического множества циклов, состоящая в общем случае из двух действительных ветвей. Совместное рассмотрение исходной пространственной кривой и ее циклографической проекции позволяет получить линейчатую поверхность, для которой данные кривые линии являются направляющими. В классической циклографической проекции полуугол при вершине проецирующего конуса равен  $\alpha = 45^\circ$ , а уравнения циклографической  $\alpha$ -проекции пространственной кривой были известны ранее [7]. Авторами в предыдущих работах были получены уравнения циклографической  $\beta$ - и  $\beta(t)$ -проекции пространственной кривой, когда полуугол может принимать не только постоянные значения в пределах  $0^\circ < \beta < 90^\circ$ , но и быть некоторой функцией  $\beta(t)$  от параметра исходной кривой [4]. В последнем случае получаем обобщенную циклографическую проекцию с уравнениями:

$$\begin{aligned} x_{\beta(1,2)}(t) &= x(t) + z(t) \times \\ &\times e(t) \frac{-x'(t) \cdot \mu(t) \mp y'(t) \sqrt{\lambda(t) - \mu^2(t)}}{\lambda(t)}, \\ y_{\beta(1,2)}(t) &= y(t) + z(t) \times \\ &\times e(t) \frac{-x'(t) \cdot \mu(t) \pm x'(t) \sqrt{\lambda(t) - \mu^2(t)}}{\lambda(t)}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mu(t) = e(t) \cdot z'(t) + e'(t) \cdot z(t)$ ;  $\lambda(t) = x'(t)^2 + y'(t)^2$ ;  $e(t) = \operatorname{tg}(\beta(t))$ .

Полученные обобщенные уравнения циклографической проекции пространственной кривой послужили основой для разработки геометрической модели формообразования поверхностных форм автомобильных дорог на основе циклографического отображения [4]. Однако в государственных нормах и правилах существуют определенные требования, предъявляемые к проектируемым объектам дорожного строительства [9]. Одним из них является требование, при котором все ортогональные проекции прямолинейных образующих поверхности проезжей части должны находиться в плоскостях, перпендикулярных ортогональной проекции  $\bar{P}_1(t)$  оси дороги  $\bar{P}(t)$ . Для выполнения данного требования авторами было предложено преобразование классической циклографической проекции в измененную циклографическую проекцию, основанное на «довороте» (рис. 1) ортогональных проекций прямолинейных образующих поверхностей дорожного полотна до требуемого положения. Наиболее подробно это преобразование рассмотрено в работе [4]. Полученные уравнения измененной циклографической проекции для пространственной кривой имеют вид:

$$\begin{aligned} x_{ch}(t) &= x(t) \mp \frac{y(t)' \cdot (z(t) \cdot e(t))}{\sqrt{(x(t)')^2 + (y(t)')^2}}, \\ y_{ch}(t) &= y(t) \pm \frac{x(t)' \cdot (z(t) \cdot e(t))}{\sqrt{(x(t)')^2 + (y(t)')^2}}. \end{aligned} \quad (2)$$

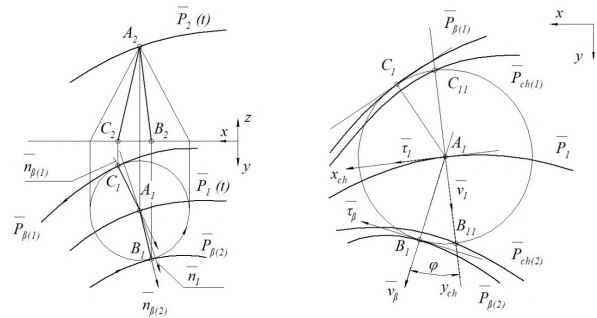


Рис. 1. Схема получения измененной циклографической проекции  $\bar{P}_{ch(1,2)}(t)$  [4]

Из теории биссекторов [10] известно, что ортогональная проекция  $\bar{P}_1(t)$  кривой  $\bar{P}(t)$  является биссекторной линией для кривых  $\bar{P}_{\beta(1)}(t)$  и  $\bar{P}_{\beta(2)}(t)$ . Как известно, биссекторной линией для двух геометрических объектов называется геометрическое место точек, равноудаленных от этих объектов, при этом расстояние от биссекторной линии определяется в направлении, ортогональном относительно обоих объектов [10, 11]. Очевидно, что кривая  $\bar{P}_1(t)$  по отношению к кривым  $\bar{P}_{ch(1)}(t)$  и  $\bar{P}_{ch(2)}(t)$ , полученным по уравнениям измененной циклографической проекции, биссекторной линией не является. В соответствии со схемой построения она является линией криволинейной симметрии, так как расстояния от любой точки на кривой  $\bar{P}_1(t)$ , отложенные по нормали к ней, до кривых  $\bar{P}_{ch(1)}(t)$  и  $\bar{P}_{ch(2)}(t)$ , равны.

Из теоретических соображений возникает вопрос о существовании и возможности построения кривой в пространстве по заданной ее измененной циклографической проекции. Если принять рассмотренную выше задачу  $\bar{P}(t) \rightarrow \bar{P}_{ch}(t)$ , в качестве прямой задачи, то очевидно, что задача  $\bar{P}_{ch}(t) \rightarrow \bar{P}(t)$  будет обратной. Решению этой задачи посвящена настоящая работа. Следует отметить, что кроме теоретического интереса обратная задача имеет практическую полезность в случае восстановления оси дороги по различным проектным планам и чертежам, а также по реальным замерам координат контрольных точек бровок дорожного полотна [12–14]. Последнее наиболее актуально при реконструкции дорожного полотна, при котором, как правило, сравнивают текущее положение оси дороги с проектным, таким образом оценивая объем ремонтных работ [12]. Большое значение имеет трехмерная визуализация проектного решения, при которой оцениваются пространственная видимость трассы, видимость на поворотах и примыканиях, а также ряд других специфических характеристик [15–18].

**Теория.** Рассмотрим решение обратной задачи  $\bar{P}_{ch(1,2)}(t) \rightarrow \bar{P}(t)$ , где  $\bar{P}_{ch(1,2)}(t) : \bar{P}_{ch(1)} \cup \bar{P}_{ch(2)}$ . Заметим, параметризации заданных кривых  $\bar{P}_{ch(1)}$  и  $\bar{P}_{ch(2)}$  различны:  $\bar{P}_{ch(1)} = \bar{P}_{ch(1)}(t_1), T_{10} \leq t_1 \leq T_{11}$ ,  $\bar{P}_{ch(2)} = \bar{P}_{ch(2)}(t_2), T_{20} \leq t_2 \leq T_{22}$ . В этой связи возникает задача установления соответствия параметризаций заданных кривых  $\bar{P}_{ch(1)}(t_1)$  и  $\bar{P}_{ch(2)}(t_2)$ . В классическом циклографическом моделировании подобная задача называется обратной и ее решение известно [2, 9]. Суть этого решения заключается в следующем. Пусть на плоскости проекций  $z=0$  даны две ветви циклографической проекции:  $\bar{P}_{\beta(1)}(t_1)$  и  $\bar{P}_{\beta(2)}(t_2)$ . Необходимо восстановить в пространстве соответствующую кривую  $\bar{P}(t)$ . Для этого кривым  $\bar{P}_{\beta(1)}(t_1)$  и  $\bar{P}_{\beta(2)}(t_2)$  ставятся в соответствие их пространственные циклографические образы —

линейчатые поверхности  $\Phi_{\beta(1)}$  и  $\Phi_{\beta(2)}$ , которые имеют определенный угол наклона образующих к плоскости  $z=0$ . Например, при  $\alpha$ -проекции этот угол будет равен  $45^\circ$ , при  $\beta$ -проекции —  $(90-\beta)^\circ$  [2]. Затем аналитически находится линия пересечения этих поверхностей, выраженная, например, через параметр  $t_1$ . Аналитическое решение этой задачи, как показывает практика, может быть получено, если  $\bar{P}_{\beta(1)}(t_1)$  и  $\bar{P}_{\beta(2)}(t_2)$  — кривые второго порядка либо обводы из этих кривых. Таким образом, кривая  $\bar{P}(t_1)$  (рис. 2), как ортогональная проекция линии  $\bar{P}(t) : \Phi_{\beta(1)} \cap \Phi_{\beta(2)}$ , является искомой и позволяет также привести кривую  $\bar{P}_{\beta(2)}(t_2)$  к параметру  $t_1$ . В результате на плоскости проекций при циклографическом отображении образуется триада взаимосвязанных линий  $\bar{P}_1(t)$ ,  $\bar{P}_{\beta(1)}(t_1)$  и  $\bar{P}_{\beta(2)}(t_2 = f(t_1))$ ,  $f'(t_1) \neq 0$ .

Очевидно, что для кривых линий  $\bar{P}_{ch(1)}(t_1)$  и  $\bar{P}_{ch(2)}(t_2)$ , полученных по схеме образования измененной циклографической проекции, аналогичный способ получения кривой  $\bar{P}(t)$  не годится. Также очевидно, что без расположения линии  $\bar{P}(t)$  центров циклов, без значения угла поворота  $\varphi$  образующих (см. рис. 1(б)), невозможно однозначно определить положение линии  $\bar{P}(t)$  в пространстве.

Построение  $\alpha$ -поверхностей с направляющими  $\bar{P}_{ch(1)}(t_1)$  и  $\bar{P}_{ch(2)}(t_2)$  позволяет найти пространственную кривую  $\bar{P}_{ch}(t) : \Phi_{ch(1)} \cap \Phi_{ch(2)}$  и ее ортогональную проекцию  $\bar{P}_{ch,1}(t_1)$  (рис. 3). Очевидно, что линия  $\bar{P}_{ch,1}(t_1)$  является биссекторной для кривых  $\bar{P}_{ch(1)}(t_1)$  и  $\bar{P}_{ch(2)}(t_2)$ , но при этом не является линией криволинейной симметрии, т.е. ортогональной проекцией искомой кривой  $\bar{P}(t)$ . Нахождение линии  $\bar{P}_{ch,1}(t_1)$  в свою очередь позволяет аналогичным образом привести исходные кривые  $\bar{P}_{ch(1)}(t_1)$  и  $\bar{P}_{ch(2)}(t_2)$  к взаимно-однозначному соответствию параметров, т.е. к общей параметризации. Когда любой точке  $C_{1i}$  на кривой  $\bar{P}_{ch(1)}(t_1)$  будет однозначно соответствовать точка  $B_{1i}$  кривой  $\bar{P}_{ch(2)}(t_2)$ , тогда всегда можно отыскать середины отрезков  $B_{1i}C_{1i}$ , которые и будут точками  $A_i$  искомой кривой  $\bar{P}_1(t)$  (см. рис. 3). Поскольку радиус окружности основания проецирующего конуса равен расстоянию  $A_iB_{1i}$  (или  $A_iC_{1i}$ ), то всегда возможно восстановить пространственную кривую  $\bar{P}(t)$  для случая циклографической  $\alpha$ -проекции.

**Результаты экспериментов.** Рассмотрим пример. На плоскости проекций  $z=0$  даны две кривые  $\bar{P}_{ch(1)}(t_1)$  и  $\bar{P}_{ch(2)}(t_2)$  (рис. 4), имеющие следующие уравнения:

$$\begin{aligned} x_{ch(1)}(t_1) &= 2 - t_1^2 / 4; \\ y_{ch(1)}(t_1) &= 8t_1; \quad 0 \leq t_1 \leq 1. \\ x_{ch(2)}(t_2) &= -2t_2^2; \\ y_{ch(2)}(t_2) &= 3t_2; \quad 0 \leq t_2 \leq 1,5. \end{aligned}$$

Требуется определить пространственную кривую  $\bar{P}(t)$ , по отношению к которой эти кривые являются измененной циклографической проекцией.

По алгоритму решения обратной задачи циклографической проекции пространственной кривой поставим в соответствие заданным кривым их  $\alpha$ -поверхности [2, 9]. Для этого построим пространственные образы эволют этих кривых. Координаты  $x_{E(i)}(t_i)$  и  $y_{E(i)}(t_i)$  эволют найдем по известным в дифференциальной геометрии формулам:

$$x_{E(i)}(t_i) = x_{ch(i)}(t_i) + y'_{ch(i)}(t_i) \times \frac{(x'_{ch(i)}(t_i))^2 + (y'_{ch(i)}(t_i))^2}{x''_{ch(i)}(t_i) \cdot y'_{ch(i)}(t_i) - x'_{ch(i)}(t_i) \cdot y''_{ch(i)}(t_i)};$$

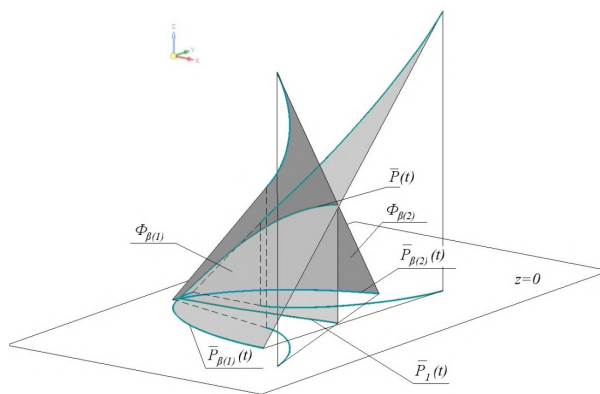


Рис. 2. Визуализация примера решения обратной задачи при циклографическом моделировании кривой линии пространства

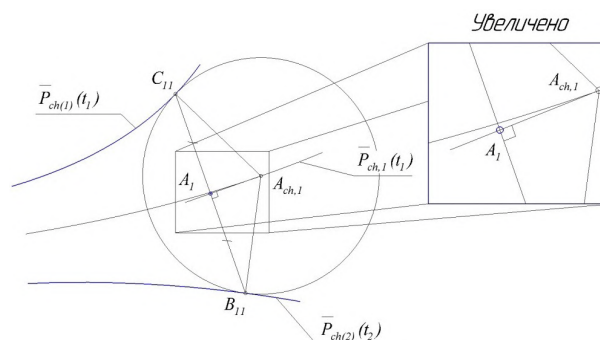


Рис. 3. Схема определения точек ортогональной проекции  $\bar{P}_1(t)$  исходной кривой  $\bar{P}(t)$  в случае задания кривых линий, являющихся измененной циклографической проекцией линии  $\bar{P}(t)$

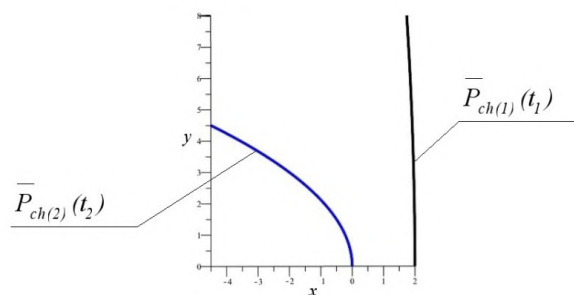


Рис. 4. Исходные данные примера

$$y_{E(i)}(t_i) = y_{ch(i)}(t_i) + x'_{ch(i)}(t_i) \times \frac{(x'_{ch(i)}(t_i))^2 + (y'_{ch(i)}(t_i))^2}{x''_{ch(i)}(t_i) \cdot y'_{ch(i)}(t_i) - x'_{ch(i)}(t_i) \cdot y''_{ch(i)}(t_i)}.$$

Координата  $z_{E(i)}(t_i)$  определяется так:

$$z_{E(i)}(t_i) = \pm \sqrt{(x_{ch(i)}(t_i) - x_{E(i)}(t_i))^2 + (y_{ch(i)}(t_i) - y_{E(i)}(t_i))^2},$$

где  $i=1,2$ . Полученные уравнения в статье приведены в сокращенном виде ввиду громоздкости их развернутых выражений.

Исходные кривые и пространственные образы их эволют при совместном рассмотрении образуют линейчатые поверхности  $\Phi_{ch(1)}(t_1)$  и  $\Phi_{ch(2)}(t_2)$ . Уравнения этих поверхностей имеют вид:

$$\begin{aligned} X_{ch(1)}(t_1, l_1) &= x_{E(1)}(t_1) + l_1[x_{ch(1)}(t_1) - x_{E(1)}(t_1)]; \\ Y_{ch(1)}(t_1, l_1) &= y_{E(1)}(t_1) + l_1[y_{ch(1)}(t_1) - y_{E(1)}(t_1)]; \\ Z_{ch(1)}(t_1, l_1) &= z_{E(1)}(t_1)(1 - l_1); \\ 0 &\leq t_1 \leq 1, \quad 0 \leq l_1 \leq 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{ch(2)}(t_2, l_2) &= x_{E(2)}(t_2) + l_2[x_{ch(2)}(t_2) - x_{E(2)}(t_2)]; \\ Y_{ch(2)}(t_2, l_2) &= y_{E(2)}(t_2) + l_2[y_{ch(2)}(t_2) - y_{E(2)}(t_2)]; \\ Z_{ch(2)}(t_2, l_2) &= z_{E(2)}(t_2)(1 - l_2); \\ 0 &\leq t_2 \leq 1,5; \quad 0 \leq l_2 \leq 1. \end{aligned}$$

Составляя равенства:  $X_{ch(1)}(t_1, l_1) = X_{ch(2)}(t_2, l_2)$ ,  $Y_{ch(1)}(t_1, l_1) = Y_{ch(2)}(t_2, l_2)$ ,  $Z_{ch(1)}(t_1, l_1) = Z_{ch(2)}(t_2, l_2)$ , получаем систему из трех уравнений с четырьмя неизвестными. Решение такой системы осуществляется нахождением функциональных зависимостей параметров этой системы. В рассматриваемом примере вначале получим выражение параметра  $l_2 = f_2(t_1, t_2, l_1)$  из выражения  $Z_{ch(1)}(t_1, l_1) = Z_{ch(2)}(t_2, l_2)$ . Затем, подставляя полученное выражение  $l_2 = f_2(t_1, t_2, l_1)$  в уравнение  $Y_{ch(1)}(t_1, l_1) = Y_{ch(2)}(t_2, l_2)$ , выразим величину  $l_1 = f_1(t_1, t_2)$ . Далее, подставляем полученные выражения  $l_1$  и  $l_2$  в уравнение  $X_{ch(1)}(t_1, l_1) = X_{ch(2)}(t_2, l_2)$  и выражаем параметр  $t_2 = f(t_1)$ . Подставив полученные зависимости  $l_2 = f_2(t_1, t_2, l_1)$ ,  $l_1 = f_1(t_1, t_2)$  и  $t_2 = f(t_1)$  в уравнения поверхности  $\Phi_{ch(1)}(t_1)$ , получаем параметрические уравнения пространственной кривой  $\bar{P}_{ch}(t_1)$ :

$$\begin{aligned} x_{ch} &= f_x(t_1); \quad y_{ch} = f_y(t_1); \\ z_{ch} &= f_z(t_1), \quad 0 \leq t_1 \leq 1. \end{aligned}$$

На рис. 5 представлена визуализация полученной кривой  $\bar{P}_{ch}(t_1)$ . Все вычисления по определению функциональной зависимости параметров, а также визуализация, представленные на последующих рисунках, производились в системе компьютерной алгебры *Maple*.

Полученная кривая  $\bar{P}_{ch}(t_1)$  позволяет выразить кривую  $\bar{P}_{ch(2)}(t_2)$  через параметр  $t_1$ . Полученные уравнения кривой  $\bar{P}_{ch(2)}(t_2 = f(t_1))$  выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} x_{ch(2)}(t_1) &= -2 \cdot \text{RootOf}(4096 \_ Z^5 - \\ &- 576t_1 \_ Z^4 + (1024t_1^2 + 8192) \_ Z^3 + \\ &+ (48t_1^3 + 23760t_1) \_ Z^2 + \\ &+ (-192t_1^4 - 63360t_1^2 + 13312) \_ Z + \\ &+ 3t_1^5 - 48t_1^3 - 24384t_1)^2, \\ y_{ch(2)}(t_1) &= 3 \cdot \text{RootOf}(4096 \_ Z^5 - \\ &- 576t_1 \_ Z^4 + (1024t_1^2 + 8192) \_ Z^3 + \\ &+ (48t_1^3 + 23760t_1) \_ Z^2 + \\ &+ (-192t_1^4 - 63360t_1^2 + 13312) \_ Z + \\ &+ 3t_1^5 - 48t_1^3 - 24384t_1), \end{aligned}$$

где  $0 \leq t_1 \leq 1$ . Функция *RootOf* — это специальный оператор системы компьютерной алгебры *Maple*, который означает, что система не может выразить решение в радикалах. Однако это не мешает ей давать верные конечные результаты символьных и численных расчетов.

Таким образом, теперь каждой точке на кривой  $\bar{P}_{ch}(t_1)$  однозначно соответствует точка на кривой  $\bar{P}_{ch(2)}(t_2 = f(t_1))$ . Из рис. 3 следует, что искомыми точками  $A_{1i}$  являются точки, являющиеся серединами отрезков, пересекающих кривые  $\bar{P}_{ch}(t_1)$  и  $\bar{P}_{ch(2)}(t_2 = f(t_1))$  в точках с одинаковыми значениями параметров  $t_i$ .

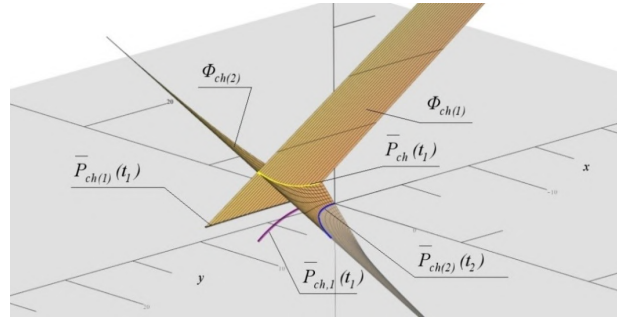


Рис. 5. Пространственная визуализация получения линии  $\bar{P}_{ch}(t_1)$

В символьном виде такие точки можно определить, установив линейную зависимость между соответственными точками на кривых  $\bar{P}_{ch}(t_1)$  и  $\bar{P}_{ch(2)}(t_2 = f(t_1))$ :

$$\begin{aligned} x_1(t_1) &= x_{ch(1)}(t_1)(1 - \lambda) + x_{ch(2)}(t_1)\lambda, \\ y_1(t_1) &= y_{ch(1)}(t_1)(1 - \lambda) + y_{ch(2)}(t_1)\lambda, \end{aligned}$$

где  $0 \leq t_1 \leq 1$ ,  $\lambda = 0,5$ . Таким образом, уравнения ортогональной проекции  $\bar{P}_1(t)$  искомой кривой  $\bar{P}(t)$ , полученные в данном примере, имеют вид:

$$\begin{aligned} x_1(t_1) &= 1 - 0,125t_1^2 - \text{RootOf}(4096 \_ Z^5 - \\ &- 576t_1 \_ Z^4 + (1024t_1^2 + 8192) \_ Z^3 + \\ &+ (48t_1^3 + 23760t_1) \_ Z^2 + \\ &+ (-192t_1^4 - 63360t_1^2 + 13312) \_ Z + \\ &+ 3t_1^5 - 48t_1^3 - 24384t_1)^2, \\ y_1(t_1) &= 4t_1 + 1,5\text{RootOf}(4096 \_ Z^5 - \\ &- 576t_1 \_ Z^4 + (1024t_1^2 + 8192) \_ Z^3 + \\ &+ (48t_1^3 + 23760t_1) \_ Z^2 + (-192t_1^4 - \\ &- 63360t_1^2 + 13312) \_ Z + \\ &+ 3t_1^5 - 48t_1^3 - 24384t_1). \end{aligned}$$

Из рис. 1(б) видно, что любая точка  $A_1(x_1(t_1), y_1(t_1))$  на кривой  $\bar{P}_1(t)$  является ортогональной проекцией вершины проецирующего конуса. Непрерывное множество вершин, очевидно, совпадает с искомой пространственной кривой  $\bar{P}(t)$ . Таким образом, например, в случае  $\alpha$ -проекции, величина координаты  $z$  точек  $A_1$  будет равна расстоянию от точки  $A_1$  до любой из кривых  $\bar{P}_{ch(1)}(t_1)$  и  $\bar{P}_{ch(2)}(t_2)$  по направлению нормали, проведенной к линии  $\bar{P}_1(t)$ . Таким образом, координату  $z_1(t_1)$  можно найти по уравнению  $z_1(t_1) = \sqrt{(x_{ch(1)}(t_1) - x_1(t_1))^2 + (y_{ch(1)}(t_1) - y_1(t_1))^2}$ :

$$\begin{aligned} z_1(t_1) &= (1 - 0,125t_1^2 + \text{RootOf}(4096 \_ Z^5 - \\ &- 576t_1 \_ Z^4 + (1024t_1^2 + 8192) \_ Z^3 + \\ &+ (48t_1^3 + 23760t_1) \_ Z^2 + (-192t_1^4 - \\ &- 63360t_1^2 + 13312) \_ Z + 3t_1^5 - 48t_1^3 - \\ &- 24384t_1)^2 + (4t_1 - 1,5\text{RootOf}(4096 \_ Z^5 - \\ &- 576t_1 \_ Z^4 + (1024t_1^2 + 8192) \_ Z^3 + \\ &+ (48t_1^3 + 23760t_1) \_ Z^2 + \\ &+ (-192t_1^4 - 63360t_1^2 + 13312) \_ Z + \\ &+ 3t_1^5 - 48t_1^3 - 24384t_1))^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Полученная пространственная кривая  $\bar{P}(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t))$  является искомой. Она также по-



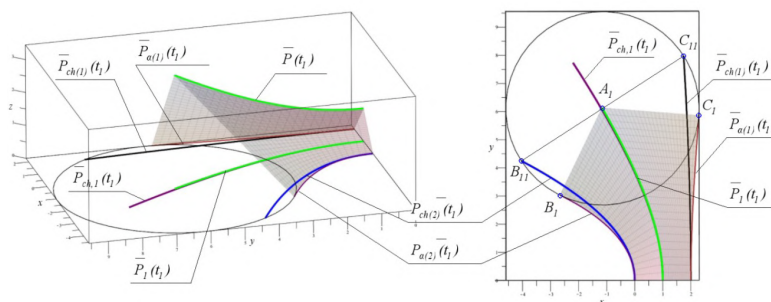


Рис. 6. Визуализация итогового результата получения кривой  $\bar{P}(t)$  (на рисунке показана ее ортогональная проекция  $\bar{P}_1(t)$ )

звояет получить классическую циклографическую проекцию по уравнениям (1). На рис. 6 представлен конечный результат решения рассматриваемого примера с ортогональной проекцией  $\bar{P}_1(t)$  кривой  $\bar{P}(t)$ . Дополнительно, для большей наглядности, на рисунке показаны циклографические  $\alpha$ -проекции  $\bar{P}_{\alpha(1)}(t)$  и  $\bar{P}_{\alpha(2)}(t)$ , полученные для полуугла при вершине проецирующего конуса, равного  $45^\circ$ . Также визуализированы ортогональные проекции образующих линейчатых поверхностей, для которых кривые  $\bar{P}_{ch(1)}(t_1)$  и  $\bar{P}_{ch(2)}(t_2)$  и полученная кривая  $\bar{P}(t)$  являются направляющими.

**Обсуждение результатов.** Результаты вычисленного эксперимента подтвердили теоретические выводы о том, что совершение перехода от кривых линий  $\bar{P}_{ch(1)}(t_1)$  и  $\bar{P}_{ch(2)}(t_2)$ , полученных по схеме образования измененной циклографической проекции, к исходной пространственной кривой  $\bar{P}(t)$ , возможно. Не исключается получение аналитического решения, если исходные кривые  $\bar{P}_{ch(1)}(t_1)$  и  $\bar{P}_{ch(2)}(t_2)$  будут заданы кривыми второго порядка или обводами из них. В остальных же случаях, когда исходные кривые представляют собой сплайн-кривые третьей или более высоких степеней, пространственную кривую  $\bar{P}(t)$  можно получить как дискретный ряд точек, каждая из которых определяется аналитически. В дальнейшем для формирования самой линии  $\bar{P}(t)$  может быть использована интерполяция этого ряда точек.

**Заключение.** Полученные результаты показывают, что измененная циклографическая проекция, так же как и классическая, является обратимой. Предложенный алгоритм определения исходной пространственной кривой по заданным кривым линиям, полученным по схеме образования измененной циклографической проекции, основан на алгоритме решения обратной задачи классической циклографической проекции пространственной кривой. Он позволяет однозначно определять линию  $\bar{P}_1(t)$  (ортогональную проекцию искомой кривой), по которой восстанавливается искомая пространственная кривая  $\bar{P}(t)$ . Результаты работы могут быть использованы в области разработки систем автоматизированного проектирования автомобильных дорог как общего, так и специального назначения.

#### Библиографический список

1. Lyubchinov E. V., Panchuk K. L. Geometric modeling of solutions of the direct and inverse tasks of geometric optics on a plane // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1210 (1). P. 012087. DOI:10.1088/1742-6596/1210/1/012087.

2. Мясоедова Т. М., Панчук К. Л. Формообразование семейства контурно-параллельных траекторий обрабатывающего инструмента на основе циклографического отображения // Ученые Омска — региону: материалы IV Региональной науч.-техн. конф., Омск, 04–05 июня 2019 г. / ОмГТУ. Омск, 2019. С. 142–146.

3. Панчук К. Л., Любчинов Е. В. Циклографическая интерпретация и компьютерное решение одной системы алгебраических уравнений // Геометрия и графика. 2019. Т. 7, № 3. С. 3–14. DOI: 10.12737/article\_5dce5e528e4301.77886978.

4. Panchuk K. L., Niteyskiy A. S., Lyubchinov E. V. Cyclographic Modeling of Surface Forms of Highways // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2017. Vol. 262. P. 012108. DOI: 10.1088/1757-899X/262/1/012108.

5. Панчук К. Л., Кайгородцева Н. В. Циклографическая начертательная геометрия: моногр. Омск: Изд-во ОмГТУ, 2017. 232 с. ISBN 978-5-8149-2578-7.

6. Pottmann H., Wallner J. Computational Line Geometry. Berlin. Heidelberg: Springer Verlag, 2001. 565 p. ISBN 978-3-642-04018-4.

7. Choi H. I., Han C. Y., Moon H. P. [et al.] Medial axis transform and offset curves by Minkowski Pythagorean hodograph curves // Comput. Aided Design. 1999. Vol. 31. P. 59–72.

8. Dr. Emil Muller. Vorlesungen über Darstellende Geometrie. II. Band: Die Zyklographie. Edited from the manuscript by Dr. Josef Leopold Krames. Leipzig and Vienna: Franz Deuticke, 1929. 476 p.

9. СНиП 2.05.02–85. Автомобильные дороги: нормативно-технический материал. Введ. 1987–01–01. Москва: Госстрой России, ФГУП ЦПП, 1987. 106 с.

10. Peternell M. Geometric Properties of Bisector Surfaces // Graphical Models. 2000. Vol. 62. P. 202–236. DOI: 10.1006/gmod.1999.0521.

11. Farouki R. T., Johnstone J. K. Computing point/curve and curve/curve bisectors // The Mathematics of Surfaces V (R. B. Fisher, Ed.). London: Oxford Univ. Press. P. 327–354.

12. Бойков В. Н., Петренко Д. А., Люст С. Р. [и др.]. Система автоматизированного проектирования автомобильных дорог INDORCAD/ROAD // Вестник Томского государственного университета. 2003. С. 350–353.

13. Корневский В. В., Мордик Е. А. Оценка геометрических параметров дороги с использованием передвижной дорожной лаборатории // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2019. № 4 (77). С. 48–55.

14. Бойков В. Н. САПР автодорог — перспективы развития // САПР и ГИС автомобильных дорог. 2013. № 1 (1). С. 6–9.

15. Елугачёв П. А. Опытное трассирование автомобильной дороги с использованием пространственных кривых Безье // Исследовано в России. 2006. С. 915–922.

16. Абдуллин М. М., Глазычев А. О., Муфтеев В. Г. [и др.]. Особенности моделирования трассы автомобильной дороги

с использованием единой пространственной «В-сплайновой» кривой высокой степени // Труды Международной конференции по компьютерной графике и зрению «Графикон-2019». 2019. С. 169–171.

17. Сальков Н. А. Моделирование геометрических форм автомобильных дорог: моногр. Москва: ИНФРА-М, 2019. 162 с. ISBN 978-5-16-014029-2.

18. Кузьмин В. И., Левтеров А. И. Автоматизированное конструирование виражей безопасных конструкций на закруглениях автомобильных дорог // Вестник Харьковского национального автомобиледорожного университета. 2009. Вып. 47. С. 29–33.

**ЛЮБЧИНОВ Евгений Владимирович**, кандидат технических наук, доцент кафедры «Инженерная геометрия и САПР» Омского государственного технического университета (ОмГТУ), г. Омск.

SPIN-код: 8144-6370

AuthorID (РИНЦ): 917932

ORCID: 0000-0003-2499-4866

AuthorID (SCOPUS): 57199399265

ResearcherID: D-1882-2019

Адрес для переписки: Lubchinov.E.V@yandex.ru

**ПАНЧУК Константин Леонидович**, доктор технических наук, доцент (Россия), профессор кафедры «Инженерная геометрия и САПР» ОмГТУ, г. Омск.

SPIN-код: 5623-0008

AuthorID (РИНЦ): 501163

ORCID: 0000-0001-9302-8560

AuthorID (SCOPUS): 55857766100

ResearcherID: S-2788-2017

Адрес для переписки: Panchuk\_KL@mail.ru

**МЯСОЕДОВА Татьяна Михайловна**, кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры «Инженерная геометрия и САПР» ОмГТУ, г. Омск.  
SPIN-код: 6056-6455

AuthorID (РИНЦ): 686836

ORCID: 0000-0002-9641-9417

AuthorID (SCOPUS): 57201776004

ResearcherID: E-7505-2014

Адрес для переписки: mtm44mtm44@mail.ru

#### Для цитирования

Любчинов Е. В., Панчук К. Л., Мясоедова Т. М. Решение обратной задачи измененной циклографической модели // Омский научный вестник. 2023. № 1 (185). С. 25–30. DOI: 10.25206/1813-8225-2023-185-25-30.

Статья поступила в редакцию 11.01.2023 г.

© Е. В. Любчинов, К. Л. Панчук,

Т. М. Мясоедова