ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

УДК 62-503.51:00-007.51
DOI: 10.25206/1813-8225-2018-157-83-87

А. Г. ЯНИШЕВСКАЯ
Р. Ю. СКОРОБОГАТОВ
С. Б. МИХАЙЛОВ
В. И. СЕДИНИН

Омский государственный технический университет, г. Омск

Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики, г. Новосибирск

ЛИНЕЙНОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МЕХАНИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ АНТРОПОМОРФНОГО РОБОТА

В статье рассматривается система дифференциальных уравнений, предназначенная для управления механическим движением антропоморфного робота в конкретном режиме из некоторого класса. Также задается система уравнений в частных производных, порождающая модели движения в конкретных режимах. В статье содержится краткое описание преобразования, порождающего уравнения в линейные.

Ключевые слова: антропоморфный робот, алгебра Ли, бигамильтонова система, цель управления, функционал качества.

Введение. В настоящее время роботизированные системы широко применяются на промышленных предприятиях. Однако применение антропоморфных систем за пределами сборочных цехов сейчас затруднено в связи с недетерминированной внешней средой, малой скоростью передвижения роботов (из-за больших объемов информации и несовершенных алгоритмов расчета движений), функциональной ограниченностью данных систем (по степеням свободы, углам поворота суставов и т.п.) и высокой стоимостью конечного продукта [1].

1. Постановка задачи управления. Разрабатываемый прототип предполагает: работу в режиме реального времени, 25 степеней свободы, функциональное подобие человеку, гибкую архитектуру и низкую стоимость относительно конкурентов [2].

В данной работе рассматривается получение лагранжевых моделей, задающих исполнение прототипом режимов движения из некоторого класса.

2. Решение поставленной задачи. Модель механической системы прототипа задана уравнением (24), указанным в соответствующем блоке функциональной схемы на рис. 1 [3]. Уравнения получены как уравнения Эйлера—Лагранжа для механической системы, не являющейся натуральной [4]. В пунктах А-Е содержится краткое поэтапное описание получения этих уравнений. Цепь построений образована гладкой экстремальной задачей с ограничением типа равенств (уравнение Ламе [5] с управляемыми краевыми условиями), переходом к бигамильтоновой системе эволюционных уравнений [6], линеаризацией второй правой части этой системы по Тахтаджяну—Фаддееву [7] и последую-

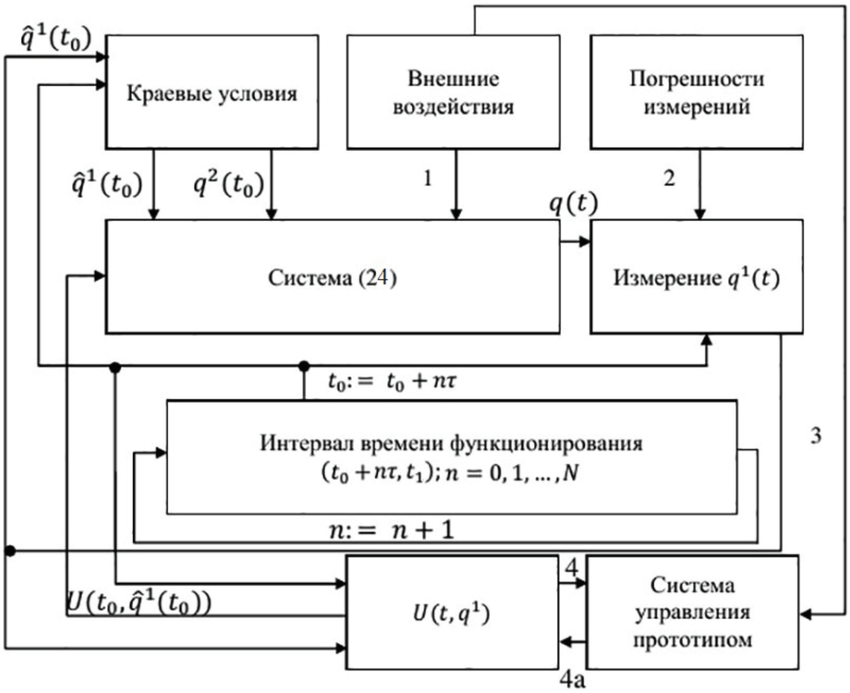

Рис. 1. Функциональная схема алгоритма управления в фиксированном режиме движения

щим превращением уравнения с распределенными параметрами в (24) через введение конечного набора контрольных точек $\{x^c\}$.

Необходимо отметить, что лаконичность всех представленных в данной статье формул обусловлена большим количеством их аргументов. Например, уравнение (9) содержит 52 функции. Включение формулы (24) в информационную систему прототипа, согласно функциональной схеме на рис. 1, требует привлечения программы компьютерной алгебры «Mathematica» на стадии встраивания (24) в программный код.

А) Для каждого из 13 звеньев прототипа ДАР-2016 зафиксируем уравнение Ламе, замкнутое добавлением определения ускорения:

$$(\lambda + \mu) graddiv \omega_K + \mu \Delta \omega_K + \rho F_K = \rho a_K;$$
$$K \in \overline{1{,}13}, \tag{1}$$

$$a_K = \left(\frac{\partial V_K}{\partial t}\right)_{x^i} + V_K^{\alpha} \frac{\partial V_K}{\partial x^{\alpha}} \tag{2}$$

$$V_K = \frac{d\omega_K}{dt}. \tag{3}$$

Получим:

$$\frac{\partial V_K}{\partial t} = -V_K^{\alpha} \frac{\partial V_K}{\partial x^{\alpha}} + F_K +$$
$$+ \frac{(\lambda + \mu)}{\rho} graddiv \omega_K + \frac{\mu}{\rho} \Delta \omega_K. \tag{4}$$

На систему (3), (4) и управляемые краевые условия будем ссылаться как на выражения:

$$F(\omega, W[u(x)]) = 0, \tag{5}$$

$$F = F_y \oplus F_{Ky};\ F_y(\omega, \upsilon) \equiv \left(F_1(\omega^1, \upsilon^1), \ldots, F_{13}(\omega^{13}, \upsilon^{13})\right), \tag{6}$$

$$\Phi[\omega(\bullet)] = \int_{t_0}^{t_1} \int_{R^3} f(t, x, \omega(t, x)) dx dt. \tag{7}$$

Этот функционал приводит к математической модели механического движения прототипа (23) и функционалам конкретных режимов движения (25), (26). Его подынтегральная функция задается в первоначальный период подготовки прототипа к эксплуатации.

Совместно (3), (4) [упоминаемое как (5)] и (7) задают функцию Лагранжа экстремальной задачи:

$$L(\omega(\bullet), \rho(\bullet), \lambda = \int_{t_0}^{t_1} \int_{R^3} \lambda f(t, \omega) + \rho F(\omega, \upsilon) dx dt. \tag{8}$$

Переход от функции Лагранжа (8) к функции Понтрягина $h(\bullet)$ [8] позволяет записать вместо (3), (4) эволюционное уравнение:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = Д_1 \circ \delta h, \tag{9}$$

здесь $y = (\omega, \upsilon, p^1, p^2)$ и $p^1(\bullet)$, $p^2(\bullet)$ есть сопряженные к $\omega(\bullet)$ и $\upsilon(\bullet)$ функции.

В) Пусть M есть область в лабораторной системе координат, где предусмотрено перемещение 13-звенной механической системы прототипа ДАР-2016. Множество $Vect[M; y]$ — алгебра Ли векторных полей на M с координатными функциями ω, υ, p^1, p^2; $pr^{(2)}Vect[M; y]$ — соответствующая алгебра 2-продолжении [6]; $Map[M, g]$ есть алгебра Ли функций на M со значениями в вещественной полупростой алгебре Ли g [7, 9]. В алгебрах $pr^{(2)}Vect[M; y]$ и $Map[M, g]$ зафиксирована пара изоморфных подалгебр требованием равенства коммутаторов; ту из них, что включена в $pr^{(2)}Vect[M, g]$, будем называть А. Конструкция подалгебры А позволяет осуществить следующие построения:

Выделение в $pr^{(2)}Vect[M; y]$ семейства подалгебр A_0^{τ}, изоморфных A и таких, что на коалгебрах $A_0^{(\tau^*)}$ существует система, эквивалентная (9):

$$\frac{\partial y^{A}}{\partial t} = Д_1{}^{A} \circ \delta h^{A}. \qquad (10)$$

Далее необходимо сделать выбор среди A_0^{τ} алгебры A_0 со структурным оператором $Д_0$ скобки Тахтаджяна – Фаддеева, который позволяет получить следующее:

$$P := Д_0^{-1} \circ (Д_1{}^{A} \circ \delta h^{A});\ Д_p = Д_p{}^{\cdot}. \qquad (11)$$

Последнее равенство обеспечивает существование $L(y^{A})$ в (12) [6]:

$$L(y^{A}) = \int_0^1 y^{A} \bullet P(\lambda, y^{A}) d\lambda\ , \qquad (12)$$

$$h_0 := \int_{R^4} L(y^{A}) dxdt\ ,$$

$$\frac{dy^{A}}{dt} = Д_1^{A} \circ \delta h^{A} = Д_0 \circ \delta h_0. \qquad (13)$$

Эволюционное уравнение, образованное левой и второй правой частью бигамильтоновой системы (13), относится к специальному классу, указанному Тахтаджяном Л. А и Фаддеевым Л. Д. в [7], и линеаризуется в построенной ими технике.

С) Выделим указанное нелинейное уравнение:

$$\frac{dy^{A}}{dt} = Д_0 \circ \delta h_0\ . \qquad (14)$$

Группа Ли $Map[M, G]$ соответствует алгебре Ли $Map[M, g]$ [9], кривая $g\_(t)$ принадлежит этой группе. Обозначение этой кривой указывает на ее роль в линеаризации (14) и взято из [7]. Представление $g\_(t)$ подчинено линейному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d}{dt} Adg_{\_}(t) = (Adg_{\_}(t)) \circ \frac{d}{dt} a(t)\ . \qquad (15)$$

Оператор $a(t)$ линеен; $y_0{}^{A}$ есть начальное условие для (14) и решение (14) определено формулой:

$$y^{A}(t) = Ad^{*} g\_(t) y_0^{A}. \qquad (16)$$

Все нелинейные дифференциальные уравнения и лагранжианы, записанные ниже, зависят от (15), (16).

Поэтому механическое движение прототипа ДАР-2016 задается линейным уравнением (15).

D) Уравнения движения ДАР-2016 в лабораторной системе координат подчинены следующим обстоятельствам.

В сопутствующей системе координат механическая система прототипа покоится [5]. В ней выбраны контрольные точки звеньев прототипа $\{\xi^{c}\}$ на основе адекватности описания режима-образца механическому движению человека. Точкам $\{\xi^{c}\}$ соответствуют их траектории $\{x^{c}(t) \mid t_0 \le t \le t_1\}$ в лабораторной системе координат.

Функционал лагранжевой механики, задающий движение контрольных точек, получается из (8) по нижеследующим правилам:

$$(\omega, \upsilon, p^1, p^2) \to (\omega^{*}, \upsilon^{*}, p^{1*}, p^{2*})[W^{\theta}, \lambda^{\theta}, \mu^{\theta}, \rho^{\theta}], \qquad (17)$$

здесь $W^{\theta}, \lambda^{\theta}, \mu^{\theta}, \rho^{\theta}$ есть величины, близкие к зафиксированным в (4), (5), — краевые условия и механические константы. Четверка $(\omega^{*}, \upsilon^{*}, p^{1*}, p^{2*})[\bullet]$ есть решение (9) при соответствующем значении θ-параметров.

Это решение получено из (16) посредством замен, обращающих переходы (9) → (10) → (16). Ниже функции из правой части (17) упоминаются как $\omega^{*}, \upsilon^{*}, p^{*}$.

$$\omega^{\cdot}(t, x) \to \omega^{\cdot}(t, \delta[x^{c}(t)]), \qquad (18)$$

$$\upsilon^{\cdot}(t, x) \to \upsilon^{\cdot}(t, \delta[x^{c}(t)]),$$

$$p(t, x) \to p^{\cdot}(t, \delta[x^{c}(t)]), \qquad (19)$$

где $\delta[x^{c}(t)] \equiv \delta[x^{c}]$ есть δ — функция в точке $x^{c}(t)$.

$$f(t, \omega(x)) \to f(t, \omega^{\cdot}(\delta[x^{c}])), \qquad (20)$$

$$F(\omega, \upsilon) \to F(\omega^{*}(\delta[x^{c}]), \nu^{*}(\delta[x^{c}])). \qquad (21)$$

Имеем обычные уравнения лагранжевой механики:

$$E[L](x^{c}, \dot{x}^{c}, \ddot{x}^{c}) = 0\ . \qquad (22)$$

Здесь $E[\bullet]$ — оператор Эйлера [3]; L — получившийся по правилам (17) – (21) лагранжиан функционала $J[\bullet]$.

$$J[x^{c}(\bullet)] = \int_{t_0}^{t_1} L(x^{c}(t)) dt\ . \qquad (23)$$

Е) Уравнение механического движения прототипа, задействованное в функциональной схеме на рис. 1, как и функционал качества (25), получается из функционала (23) переходом к переменным, адаптированным к измерительной и навигационной системам (датчики вращений в суставах, датчики вращений вокруг центра масс и т.п.) ДАР-2016 согласно [4].

$$\dot{Q} = F(Q, t)\ . \qquad (24)$$

Уравнение (24) есть нормальная форма уравнения второго порядка типа (22).

Цель управления задается с помощью функционала качества вида (25), такие функционалы фиксируют указанный ранее класс режимов движения. Например, в режиме движения «Ходьба по кривой $\begin{vmatrix} x = V_x(t) \\ z = V_z(t) \end{vmatrix}$ от точки $\begin{vmatrix} A(t_0) \\ B(t_0) \end{vmatrix}$ до точки $\begin{vmatrix} A(t_1) \\ B(t_1) \end{vmatrix}$ за время $t_1 - t_0$» функционал вида (25) принимает вид (26):

$$J[U] = F[Q(t_1, U)] + \\ + \int_{t_0}^{t_1} pr_v[Q(t, U)] - V(t) dt \to inf\{U\}\ , \qquad (25)$$

$$J[U] = \left\| \begin{vmatrix} x(t_1, U) \\ z(t_1, U) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix} \right\| +$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} \| \, pr_v[Q(t,U)] - V(t) \| \, dt \to \inf\{U\}, \quad \textbf{(26)}$$

$$Q(t,U) \in \{(q, x_c, y_c, z_c)\}.$$

$\| \cdot \|$ есть эвклидова норма вектора; $pr_v[Q(t, U)]$ есть проекция вектора $Q(t, U)$ на подпространство значений вектора $V(t)$.

Функция $V(t)$ изначально задается владельцем прототипа ДАР-2016 с помощью специальных средств ввода как математическое выражение желаемого им режима движения. Затем изначально полученная функция превращается в то выражение, которое использовано в формулах (25), (26):

$$V(t) = (q, x, y, z)^T \in R^{n+3}, \quad \textbf{(27)}$$

$q \in R^n$ = <пространство обобщенных координат механической системы прототипа ДАР-2016>. Размерность этого пространства зависит от мощности множества контрольных точек $\{x^c\}$.

2.1. Алгоритм управления в фиксированном режиме движения. Для определенности можно предполагать, что зафиксирован режим движения «Ходьба по кривой $\begin{vmatrix} x = V_x(t) \\ z = V_z(t) \end{vmatrix}$ от точки $\begin{vmatrix} A(t_0) \\ B(t_0) \end{vmatrix}$ до точки $\begin{vmatrix} A(t_1) \\ B(t_1) \end{vmatrix}$ за время $t_1 - t_0$».

$q(t)$ есть обобщенные координаты механической системы прототипа.

$\hat{q}^1(t_0)$ есть результат измерений тех координат, по которым управляется механическая система прототипа (например, углы отклонения звеньев ϕ).

$q^2(t_0)$ есть те координаты механической системы, которые не измеряются.

Эти координаты вычисляются посредством подстановки функции $U(t_0, \hat{q}^1(t_0))$ в модель измерительной системы.

Это вычисление осуществляется средствами, включенными в блок «Краевые условия».

τ есть параметр управления, задающий последовательность моментов измерения $\hat{q}^1(t_0)$. Этот параметр определяется при проведении пусконаладочных работ.

$N := \langle \textit{целая часть от } (t_1 - t_0)/\tau \rangle$.

1. Символизирует фактор внешних воздействий. До наладки изготовленного прототипа существование внешних воздействий учитывается посредством такого выбора синтезирующей функции $U(t, q^1(t))$, который обеспечивает экспоненциальную устойчивость движения.

По результатам наладки прототипа возможны следующие обновления системы управления:

а) модель объекта: система обыкновенных дифференциальных уравнений (24) заменяется на систему стохастических дифференциальных уравнений (далее — СДУ) в форме Ланжевена:

$$\dot{q}(t) = f(q,t) + b((q,t)X. \quad \textbf{(28)}$$

В (28) $f(q, t)$ равен правой части системы (24) [10], получаем (29):

$$d_0\, \overline{g}(t) = \Phi(\overline{g}, t)dt + \mathrm{B}(\overline{g}, t) d_0 W. \quad \textbf{(29)}$$

Система СДУ (29) есть система в форме Ито. Именно она заменяет систему (24);

б) функционал качества: выражение (26) заменяется на следующее выражение:

$$J_{st}(U) = M[J(U)] \to \inf\{U\}. \quad \textbf{(30)}$$

В (30) функционал $J(U)$ взят из (26). Он приобрел зависимость от случая ω в силу того, что $Q(t, U)$ в (30) есть часть координат $\overline{g}(t) \equiv \overline{g}(t, \omega)$ — решения (29). Символы st соответствуют t_0 и t_1 в (26).

2. Символизирует фактор погрешности измерений. До наладки изготовленного прототипа учет погрешности измерений осуществляется так же, как учет фактора внешних воздействий 1. По результатам наладки прототипа возможны действия, указанные как *а* и *б* в связи с фактором 1.

Заключение. В данной статье показано включение математической модели движения в контур управления прототипом. Уравнение (24) размещено в соответствующем блоке функциональной схемы на рис. 1.

Показан подход к линеаризации соответствия <целевая траектория движения> → <функция, синтезирующая управление> через переход от базовой экстремальной задачи для уравнения Ламе (5)–(7) к линейному дифференциальному уравнению (15).

Уравнение, непосредственно включенное в контур управления, является обыкновенным дифференциальным уравнением лагранжевой механики. Оно получено без обращения к твердотельным аппроксимациям жестких элементов механической системы прототипа.

В статье описаны лишь некоторые действия после наладки, случай случайных помех как таковой не рассмотрен, установленных после наладки механической системы прототипа. Это последовательный переход от обыкновенных дифференциальных уравнений (24) к стохастическим дифференциальным уравнениям (28), (29) и стохастическому функционалу (30).

Библиографический список

1. Скоробогатов Р. Ю. Расширение интерактивности компьютерной модели в телевизионной среде // Информационные технологии. Т. 22, № 5. С. 396–400.

2. Pogrebnyak E. M., Sedinin V. I., Skorobogatov R. Yu. Metrological opportunities of direct three — dimensional measurement of objects by means of the Kinect controller // 13 th International scientific technical conference on actual problems of electronic instrument engineering (APEIE): APEIE — 2016. Novosibirsk, 2016. Vol. 1, Part 1. P. 207–209. ISBN 978-5-7782-2992-5.

3. Сединин В. И., Михайлов С. Б, Скоробогатов Р. Ю. Линейность математической модели механического движения антропоморфного робота. // Современные проблемы телекоммуникаций: материалы Рос. науч.-техн. конф. / Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики. Новосибирск, 2017. С. 461–469. ISBN 978-5-91434-039-8.

4. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1989. 432 с.

5. Седов Л. И. Механика сплошной среды. В. 2 т. М.: Наука, 1970. Т. 1. 492 с.

6. Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям / пер. с англ. И. Г. Щербак; под ред. А. Б. Шабата. М.: ИО НФМИ, 1989. 639 с.

7. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986. 528 с.

8. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. 2-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 384 с. ISBN 5-9221-0589-2.

9. Прессли Э., Сигал Г. Группы петель / пер. с англ. А. В. Зелевинского, А. О. Радула. М.: Мир, 1990. 456 с. ISBN 5-03-001331-8.

10. Пугачев В. С., Синицын И. Н. Теория стохастических систем. М.: Логос, 2000. 1000 с.

ЯНИШЕВСКАЯ Анна Генриховна, доктор технических наук, профессор (Россия), профессор кафедры «Инженерная геометрия и САПР» Омского государственного технического университета.
Адрес для переписки: anna-yanish@mail.ru
СКОРОБОГАТОВ Роман Юрьевич, аспирант, старший преподаватель кафедры «Системы автоматизированного проектирования» Сибирского государственного университета телекоммуникаций и информатики (СибГУТИ).
Адрес для переписки: ro-m-a-n@yandex.ru
МИХАЙЛОВ Сергей Борисович, старший преподаватель кафедры «Высшая математика» СибГУТИ.
Адрес для переписки: sergmikh4@gmail.com
СЕДИНИН Валерий Иванович, доктор технических наук, профессор (Россия), заведующий кафедрой «Системы автоматизированного проектирования» СибГУТИ.
Адрес для переписки: sedvi@bk.ru

Для цитирования

Янишевская А. Г., Скоробогатов Р. Ю., Михайлов С. Б., Сединин В. И. Линейность математической модели механического движения антропоморфного робота // Омский научный вестник. 2018. № 1(157). С. 83–87. DOI: 10.25206/1813-8225-2018-157-83-87.

Статья поступила в редакцию 07.12.2017 г.

УДК 004:[004.02+004.588] 377
DOI: 10.25206/1813-8225-2018-157-87-91

А. Е. УЛЬТАН
Н. В. АБРАМЧЕНКО
Н. А. МЕЩЕРЯКОВА
Е. А. МЕЩЕРЯКОВ

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, г. Омск

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ-СЛЕДСТВИЙ

Цель работы состоит в разработке алгоритма, позволяющего в коллекции неравенств отыскивать неравенства-следствия. Такой алгоритм нужен для программы искусственного интеллекта, позволяющей, с одной стороны, самостоятельно решать школьные уравнения, неравенства и системы, а с другой — проверять правильность самостоятельного решения школьником этих задач. Все это поспособствует компьютеризации школьного образования.

Ключевые слова: компьютеризация образования, применение искусственного интеллекта в обучении, алгоритмы решения уравнений и неравенств, моделирование системы неравенств, нахождение неравенств-следствий.

В последнее время при программировании все чаще приходится сталкиваться с задачами искусственного интеллекта [1–7]. С этим мы сталкиваемся при создании компьютерной обучающей системы «Элементарная алгебра», которая должна не только сама решать школьные задачи по алгебре, но и проверять правильность решения ученика [8–10].

При создании такой системы необходимо помнить, что при решении алгебраических систем типа «И» основным является утверждение, представленное на рис. 1. Смысл этого утверждения в том, что изображенные на рисунке системы типа «И» эквивалентны (имеют одно и то же множество решений). Это означает, что для получения решения системы типа «И» можно поступать двояко:

1) можно решить А, решить В, решить С и полученное пересечь;

2) если С следует из А, В, то С можно просто удалить не решая и в дальнейшем решать и пересекать только А и В. Этот вариант значительно проще.

Как видим, если мы хотим, чтобы компьютерная программа не только сама решала системы типа «И», но и смогла проверить любое решение школьника и объяснить ему все способы решения, то необходимо иметь алгоритмы, позволяющие находить следствия в системах типа «И».

В частности, необходимо иметь алгоритм, находящий среди неравенств неравенства-следствия. Этому алгоритму и посвящена данная работа.

Точная постановка задачи следующая: дана коллекция неравенств, например, изображенная на рис. 2. За буквами, обозначающими правые и левые части неравенств, скрываются числа (возможно, в виде числовых выражений), имена величин или алгебраические выражения.