



# ПРИБОРОСТРОЕНИЕ, МЕТРОЛОГИЯ И ИНФОРМАЦИОННО- ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ ПРИБОРЫ И СИСТЕМЫ

УДК 621.37

DOI: 10.25206/1813-8225-2018-158-88-92

В. Л. ХАЗАН  
М. Н. КОВАЛЕВА

Омский государственный  
технический университет,  
г. Омск

## КАНАЛЫ СВЯЗИ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Теория «парных эхо» является универсальным математическим аппаратом для анализа линейных и нелинейных явлений в радиотехнических цепях и каналах связи. В данной статье анализируются линейные каналы связи с переменными параметрами. Линейные искажения в каналах связи с постоянными параметрами рассматривались авторами в предыдущей статье. Нелинейные искажения в радиотехнических цепях предполагается проанализировать в следующей статье.

Ниже исследуется влияние изменений во времени амплитуды и фазы сигнала на характер его спектра. В принципе, данная задача рассматривается в различных учебных пособиях и в разделах, которые посвящаются вопросам модуляции. Тем не менее, учитывая поставленную задачу демонстрации универсальности математического аппарата, который известен как «теория парных эхо», для анализа линейных и нелинейных явлений в радиотехнических цепях и каналах связи, целесообразно рассмотреть влияние изменений во времени амплитуды и фазы сигнала, которые происходят в каналах связи с переменными параметрами, на структуру спектра этого сигнала. В отличие от обычных видов амплитудной и угловой модуляции изменения амплитуды и фазы сигнала в каналах связи могут происходить одновременно и под влиянием случайных факторов. Рассмотренные в статье конкретные примеры показывают, что изменения во времени амплитуды и фазы сигнала, передаваемого по каналу связи с переменными параметрами, приводят к дополнительному расширению его спектра.

**Ключевые слова:** коэффициент передачи, модуль коэффициента передачи, фаза коэффициента передачи, мультипликативные помехи, спектр сигнала.

Каналы связи и радиотехнические цепи могут быть с постоянными и с переменными параметрами [1–3]. Если модуль и фаза коэффициента передачи канала связи с течением времени меняются, то

такой канал связи считается каналом связи с переменными параметрами. Канал связи с постоянными параметрами [4] не вносит никаких изменений в сигнал, кроме уменьшения/увеличения его уров-

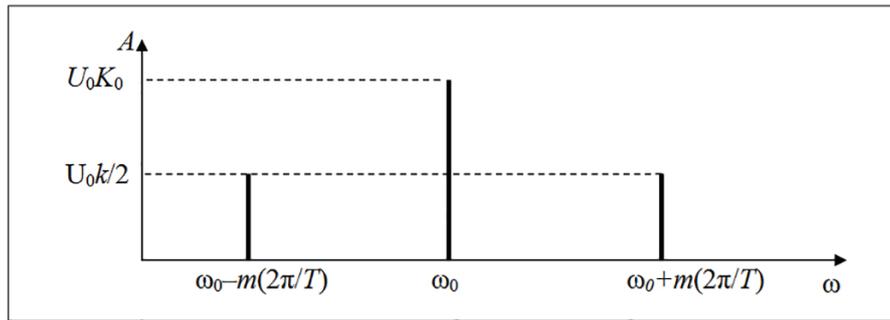


Рис. 1. Амплитудный спектр косинусоидального сигнала с частотой  $\omega_0$ , модулированного по амплитуде гармоническим колебанием с частотой  $m(2\pi/T)$

ния и факта появления многолучовости с различным запаздыванием сигнала по каждому из лучей за счет преодоления этим сигналом разного пути в соответствующих лучах. Изменение во времени модуля и фазы комплексного коэффициента передачи канала связи приводит к изменению как амплитуды, так и фазы передаваемого сигнала. Изменение амплитуды и фазы сигнала в канале связи, как правило, происходит по случайному закону. Каналы связи с переменными параметрами являются причиной мультипликативных помех, которые приводят к рассеянию спектра передаваемого сигнала. Модуляторы в передающей радиоаппаратуре также могут быть отнесены к радиотехническим цепям с переменными параметрами, которые, в отличие от коэффициента передачи среды распространения, изменяют параметры несущего колебания не случайно, а по закону, обусловленному передаваемым информационным сигналом.

Математический анализ явлений, происходящих в каналах связи с переменными параметрами, может быть произведен с помощью так называемой теории «парных эхо» [5, 6].

Рассмотрим сигнал на выходе канала связи у которого со временем по случайному закону меняются как модуль  $K_A$ , так и фаза  $\Phi = (K_{\Phi 0} \omega + F_{\Phi})$  комплексного коэффициента передачи  $K(t)$ :

$$K(t) = F_A(t) e^{-j[K_{\Phi 0} \omega + F_{\Phi}(t)]}. \quad (1)$$

Здесь:  $F_A(t)$  — зависящий от времени модуль коэффициента передачи канала связи;  $K_{\Phi 0}$  — средняя крутизна фазо-частотной характеристики канала связи, которая обуславливает среднее время задержки сигнала в канале связи;  $F_{\Phi}(t)$  — зависящая от времени часть фазы коэффициента передачи канала связи.

Пусть на вход канала связи поступает гармоническое (косинусоидальное) колебание с амплитудой  $U_0$ , частотой  $\omega_0$  и начальной фазой  $\varphi_0$ :

$$u_{\text{вх}}(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (2)$$

На выходе канала связи, с учетом (1) и (2), будет иметь место колебание:

$$u_{\text{вых}}(t) = U_0 [F_A(t) \cos[\omega_0(t - K_{\Phi 0}) + \varphi_0 + F_{\Phi}(t)]]. \quad (3)$$

Выражение (3) соответствует случаю последовательно включенных друг за другом двух каналов связи. В первом канале связи происходит изменение во времени амплитуды сигнала, а во втором ка-

нале связи происходит изменение во времени фазы сигнала.

Рассмотрим для примера самый простейший случай, когда на заданном интервале времени  $T$  изменения амплитуды и фазы сигнала происходят по гармоническим законам:

$$F_A(t) = K_0 + k \cos(m(2\pi/T)t),$$

$$F_{\Phi}(t) = B \sin(n(2\pi/T)t),$$

где  $k \leq K_0$ .

Запишем выражение для сигнала на выходе такого рода канала связи:

$$u_{\text{вых}}(t) = U_0 \left[ K_0 + k \cos\left(m\left(\frac{2\pi}{T}\right)t\right) \right] \times \cos\left[\omega_0(t - K_{\Phi 0}) + \varphi_0 + B \sin\left(n\left(\frac{2\pi}{T}\right)t\right)\right]. \quad (4)$$

В случае, когда  $B=0$ , сигнал принимает вид амплитудно-модулированного колебания:

$$u_{\text{вых}}(t) = U_0 \left[ K_0 + k \cos\left(m\left(\frac{2\pi}{T}\right)t\right) \right] \times \cos[\omega_0(t - K_{\Phi 0}) + \varphi_0],$$

и его амплитудный спектр на выходе канала связи имеет три спектральные составляющие, как показано на рис. 1.

Одна спектральная составляющая такого амплитудно-модулированного сигнала находится на его номинальной частоте  $\omega_0$ . Амплитуда этой спектральной составляющей равна  $U_0 K_0$ . Две другие спектральные составляющие расположены симметрично относительно первой спектральной составляющей справа и слева от нее на расстоянии  $\pm m(2\pi/T)$ . Их амплитуды равны  $U_0 k/2$ .

В случае, когда в выражении (4)  $k=0$  сигнал принимает вид модулированного по фазе колебания:

$$u_{\text{вых}}(t) = U_0 K_0 \times \cos\left[\omega_0(t - K_{\Phi 0}) + \varphi_0 + B \sin\left(n\left(\frac{2\pi}{T}\right)t\right)\right].$$

Воспользовавшись формулой Эйлера и известными соотношениями [4–9]

$$e^{\pm j\alpha \sin \beta} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} J_i(\alpha) e^{\pm j i \beta},$$

$$e^{\pm ja \cos \beta} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (\pm j)^i J_i(\alpha) e^{\pm j i \beta}$$

можно получить следующее выражение:

$$U_{\text{вых}}(t) = \frac{U_0 K_0}{2} \left[ e^{j[\omega_0(t-K\Phi_0)+\varphi_0+B \sin(n \frac{2\pi}{T}t)]} + e^{-j[\omega_0(t-K\Phi_0)+\varphi_0+B \sin(n \frac{2\pi}{T}t)]} \right] = \frac{U_0 K_0}{2} \left[ e^{j[\omega_0(t-K\Phi_0)+\varphi_0]} \sum_{i=-\infty}^{\infty} J_i(B) e^{j i (n \frac{2\pi}{T}t)} + e^{-j[\omega_0(t-K\Phi_0)+\varphi_0]} \sum_{i=-\infty}^{\infty} (j)^i J_i(B) e^{j i (n \frac{2\pi}{T}t)} \right]. (5)$$

Из выражения (5) следует, что при изменении фазы сигнала по гармоническому закону амплитудный спектр сигнала расширяется за счет появления бесконечно большого количества копий сигнала, которые располагаются симметрично вдоль оси частот справа и слева относительно номинальной частоты сигнала  $\omega_0$ , как показано на рис. 2.

Амплитуды этих копий сигнала зависят от амплитуды  $B$  модулирующего фазу гармонического колебания и номера копии сигнала, который отсчитывается от основного сигнала, расположенного на номинальной частоте. С учетом того, что функции Бесселя больших порядков имеют заметный уровень только при больших значениях аргумента, количество копий справа и слева от основного сигнала практически ограничивается числом  $K \leq 2B$ . Данный результат анализа влияния изменения во времени фазы сигнала по гармоническому закону на его амплитудный спектр полностью совпадает

с результатами, приведенными в [1, 9] для случая угловой модуляции сигнала.

Возвращаясь к выражению (4), соответствующему случаю одновременного изменения во времени по гармоническим законам и амплитуды и фазы сигнала и учитывая то, что модель такого канала связи, возможно, представить как два последовательно включенных четырехполюсника, в одном из которых изменяется только амплитуда, а во втором — только фаза сигнала, можно утверждать, что амплитудный спектр сигнала на выходе такого составного канала связи представляет собой структуру, обусловленную первоначально первым четырехполюсником с изменением во времени амплитуды с последующим изменением фаз в каждой копии сигнала, поступающих на вход второго четырехполюсника, которые отличаются по амплитуде и по частоте от расположенного на номинальной частоте сигнала, подаваемого на вход канала связи. Амплитудный спектр сигнала на выходе такого рода составного канала связи, когда  $n \ll m$ , приведен на рис. 3.

Далее перейдем к рассмотрению более общего и наиболее характерного для реальных условий случая, когда и амплитуда  $F_A(t)$  и фаза  $F_\varphi(t)$  коэффициента передачи канала связи являются случайными марковскими процессами. Сигнал на выходе такого канала связи описывается выражением (3).

Представим функции  $F_A(t)$  и  $F_\varphi(t)$  на заданном ограниченном интервале времени  $T$  в виде рядов Фурье:

$$F_A(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_{Mr} e^{j r \frac{2\pi}{T} t};$$

$$F_\varphi(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_{\varphi r} e^{j r \frac{2\pi}{T} t}.$$

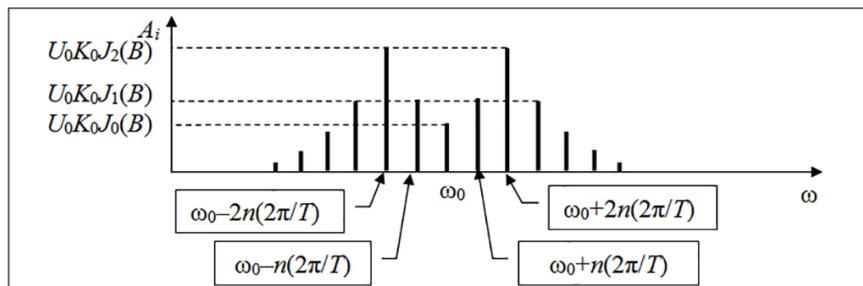


Рис. 2. Амплитудный спектр косинусоидального сигнала с частотой  $\omega_0$ , модулированного по фазе гармоническим колебанием с частотой  $n(2\pi/T)$

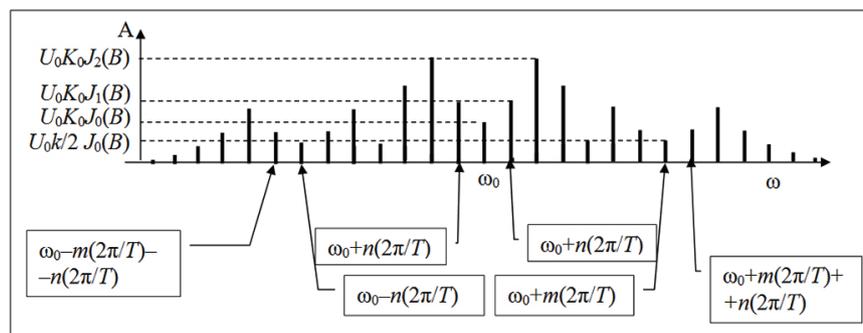


Рис. 3. Амплитудный спектр сигнала на выходе канала связи с одновременно изменяемыми по гармоническому закону модулем и фазой его коэффициента передачи

В этом случае общее выражение, описывающее сигнал на выходе такого рода канала связи, принимает вид:

$$u_{\text{вых}}(t) = U_0 \left[ \sum_{i=-\infty}^{\infty} C_{Mi} e^{ji\frac{2\pi}{T}t} \right] \times \cos \left[ \omega_0(t - K_{\Phi 0}) + \varphi_0 + \sum_{r=-\infty}^{\infty} C_{\Phi r} e^{jr\frac{2\pi}{T}t} \right]. \quad (6)$$

Учитывая тот факт, что процессы, изменяющие во времени модуль и фазу коэффициента передачи канала связи, являются случайными относительно медленно изменяющимися марковскими процессами, можно утверждать, что количество членов в рядах Фурье будет ограничено соответственно числами  $I, R$  и  $I_r$ . В этом случае выражение (6) можно записать в виде:

$$U_{\text{вых}}(t) = \frac{U_0}{4} \left[ \sum_{i=-I}^I C_{Mi} e^{ji\frac{2\pi}{T}t} \right] \times \left[ e \left[ \omega(t - K_{\Phi}) + \varphi + \sum_{r=-r}^r C_{\Phi r} e^{jr\frac{2\pi}{T}t} \right] + e^{-j \left[ \omega_0(t - K_{\Phi 0}) + \varphi_0 + \sum_{r=-r}^r C_{\Phi r} e^{jr\frac{2\pi}{T}t} \right]} \right] = \frac{U_0}{4} \left[ \sum_{i=-I}^I C_{Mi} e^{ji\frac{2\pi}{T}t} \right] \times \left[ e^{j[\omega_0(t - K_{\Phi 0}) + \varphi_0]} \prod_{r=-r}^r \sum_{i_r=-i_r}^{i_r} J_{i_r}(C_{\Phi r}) e^{ji_r \left( n \frac{2\pi}{T} t \right)} + e^{-j[\omega_0(t - K_{\Phi 0}) + \varphi_0]} \prod_{r=-r}^r \sum_{i_r=-i_r}^{i_r} J_{i_r}(C_{\Phi r}) e^{ji_r \left( n \frac{2\pi}{T} t \right)} \right]. \quad (7)$$

Согласно выражению (7), в общем виде канал связи со случайными искажениями во времени амплитуды и фазы сигнала может быть промоделирован электрической цепью последовательно включенных четырехполюсников, в первом из которых происходит модуляция амплитуды сигнала по случайному закону изменения модуля передаточной характеристики канала связи, а в каждом из последующих четырехполюсников происходит модуляция фазы сигнала одной из гармоник, представленной рядом Фурье функции, которая соответствует случайному закону изменения фазы сигнала в канале связи. Структурная схема такого рода модели канала связи представлена на рис. 4.

Согласно (7), амплитуды спектральных составляющих сигнала на выходе канала связи обусловле-

ны амплитудами спектральных составляющих разложения в ряд Фурье функции, которая изменяет во времени модуль и фазу коэффициента передачи канала связи.

Так, амплитуда вновь образованной за счет изменения во времени модуля коэффициента передачи канала связи спектральной составляющей на частоте  $\omega_0 \pm n \cdot 2\pi / T$  будет описываться выражением:

$$U \left( \omega_0 \pm n \frac{2\pi}{T} \right) (0) = \frac{1}{2} C_{Mn} \prod_{r=1}^R J_0(C_{\Phi r}).$$

На эту же частоту попадают и образованные за счет изменения во времени модуля составляющие спектра, которые преобразуются под влиянием случайного процесса, изменяющего фазо-частотную характеристику коэффициента передачи канала связи:

$$U \left( \omega_0 \pm n \frac{2\pi}{T} \right) = \frac{1}{2} C_{M(n \pm i)} \frac{\prod_{r=1}^R J_0(C_{\Phi r})}{J_0(C_{\Phi i})} J_k(C_{\Phi r}).$$

При этом фазы этих вновь образованных на частоте  $\omega_0 \pm n \cdot 2\pi / T$  спектральных составляющих будут определяться индексом  $i$ :

$$\varphi \left( \omega_0 \pm n \frac{2\pi}{T} \right) (i) = in \frac{2\pi}{T} t.$$

В результате можно записать, что на каждой из частот  $\omega_0 \pm n \cdot 2\pi / T$  будет иметь место колебание, которое образуется за счет суммирования всех компонентов, которые появляются на этой частоте:

$$u(t) = U \left( \omega_0 \pm n \frac{2\pi}{T} \right) (0) e^{j[\omega_0(t - K_{\Phi 0}) + \varphi_0]} + \sum_{i=1}^I U \left( \omega_0 \pm n \frac{2\pi}{T} \right) (i) e^{jin\frac{2\pi}{T}t}.$$

Таким образом, канал связи с изменениями модуля и фазы комплексного коэффициента передачи можно моделировать как последовательно включенные четырехполюсники, один из которых функционально соответствует амплитудному модулятору, а остальные функционально соответствуют фазовым модуляторам, каждый из которых модулирует фазу сигнала по гармоническому закону, обусловленному той или другой спектральной составляющей разложения в ряд Фурье функции, соответ-

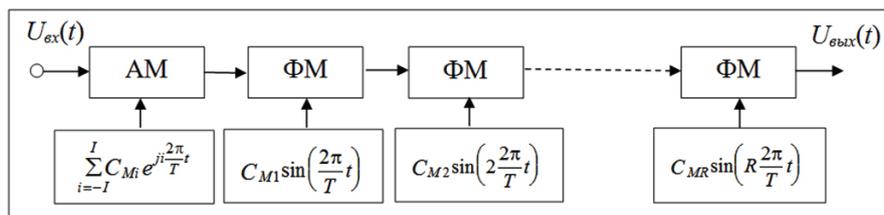


Рис. 4. Структурная схема модели канала связи со случайными законами изменения во времени модуля и фазы его комплексного коэффициента передачи  $K(t) = F_A(t) e^{-j[K_{\Phi 0} + \Phi_{\Phi}(t)]}$

ствующей закону изменения фазы комплексного коэффициента передачи канала связи.

Полученные в статье результаты показывают, что при передаче сигналов по каналу с переменными параметрами анализ происходящих в нем физических явлений возможно производить с использованием математического аппарата, который получил условное название теории «парных эхо», включающей в себя как элементарные правила перемножения гармонических функций, так и более сложную теорию разложения в ряд Фурье синусоидальных и косинусоидальных функций, аргументы которых изменяются периодически также по синусоидальному или косинусоидальному закону. У такого ряда Фурье коэффициентами являются функции Бесселя первого рода от действительного аргумента.

#### Библиографический список

1. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы. 4-е изд., испр. и доп. М.: Радиотехника, 2016. 528 с. ISBN 978-5-9710-2464-4.
2. Хазан В. Л. Каналы связи. Модели, линейные и нелинейные искажения: моногр. Изд-во Palmarium Academic Publishing, 2015. 240 с. ISBN 978-3-659-60332-7.
3. Хазан В. Л. Методы и средства проектирования каналов декаметрового радиосвязи: дис. ... д-ра техн. наук. Омск, 2009. 358 с.
4. Хазан В. Л., Ковалева М. Н. Каналы связи с линейными искажениями // Омский научный вестник. 2017. № 6 (156). С. 121 – 125.

5. Farnett E. C., Stevens G. H. Pulse compression radar / ed. M. I. Skolnik // Radar Handbook. 2 nd ed. NY: McGraw-Hill, 1990. Ch. 10.1 – 10.39.

6. Кук Ч., Бернфельд М. Радиолокационные сигналы. М.: Советское радио, 1971. 568 с.

7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике: пер. с англ. М.: Наука, 1968. 720 с.

8. Справочник по специальным функциям: пер. с англ. / Под ред. М. Абрамовиц, И. М. Стриган. М.: Наука, 1979. 830 с.

9. Картьяну Г. Частотная модуляция. Бухарест: Изд-во Акад. Румынской Народной Республики, 1961. 578 с.

**ХАЗАН Виталий Львович**, доктор технических наук, старший научный сотрудник, профессор кафедры «Средства связи и информационная безопасность».  
SPIN-код: 3890-8827

AuthorID (РИНЦ): 463722

Адрес для переписки: vlhazan@yandex.ru

**КОВАЛЕВА Марина Николаевна**, магистрант гр. ИСм-161 факультета элитного образования и магистратуры.

Адрес для переписки: marisha92@bk.ru

#### Для цитирования

Хазан В. Л., Ковалева М. Н. Каналы связи с переменными параметрами // Омский научный вестник. 2018. № 2 (158). С. 88 – 92. DOI: 10.25206/1813-8225-2018-158-88-92.

Статья поступила в редакцию 18.01.2018 г.

© В. Л. Хазан, М. Н. Ковалева