

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕНОСА ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ И КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРАФИКА ЕЕ ДЕФОРМАЦИЙ В ЗОНЕ КОНТАКТА

Представлены результаты численного моделирования и компьютерной визуализации картин деформаций, имеющих место в слое вязкой несжимаемой жидкости в процессе ее переноса на подложку между контактируемыми цилиндрами. Численное моделирование проведено с помощью разработанного авторами алгоритма численного решения уравнений Навье—Стокса вязкой несжимаемой жидкости на двумерной регулярной сетке с помощью конечно-разностных методов с дополнительным расчетом подвижных границ, учитывающего расщепление жидкости с образованием микрокапель и деформации контактируемых поверхностей под действием перепадов давления. Рассматривается ламинарный тип течения вязкой несжимаемой жидкости в точке контакта поверхностей и постоянной скоростью вращения цилиндров. Отмечено, что программная реализация разработанного численного алгоритма на примере печатной системы позволяет автоматизировать расчет коэффициентов переноса краски в зоне печатного контакта и прогнозировать выбор печатной системы.

Ключевые слова: алгоритм численного моделирования, компьютерная графика, уравнение Навье—Стокса, конечно-разностные методы, поверхность, деформация, вязкая несжимаемая жидкость.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № 1.1.3., проект № 0314-2016-0009 (Паничкин А. В.) и в плане НИР ОмГТУ № 17170В от 07.04.2017 г.

Введение. Течения несжимаемой жидкости с подвижными границами свойственны различным технологическим процессам, в том числе характерны и для печатных систем.

В соответствии с основной концепцией стандартизации процесса офсетной печати одной из важных задач является контроль показателей качества печати и его автоматизация. Расширение возможности компьютерной техники и программного обеспечения значительно упрощает моделирование гидродинамических процессов. В этом направлении научных разработок последнего десятилетия представляют научный интерес исследования зарубежных ученых [1–3]. Анализ работ

отечественных и зарубежных ученых позволяет констатировать факт отсутствия единого подхода к математическому описанию красочных аппаратов, переносу и расщеплению печатной краски [4–8]. В основу математического описания положена система алгебраических уравнений, отражающих сложение и деление красочных слоев в контактных зонах. Это позволяет решать динамическую задачу передачи слоев краски на оттиск. Сложность расчетов не всегда позволяет получить количественную оценку определяемых коэффициентов.

Постановка задачи. Принимаем, что печатная краска — это вязкая жидкость. Анализ ранее полученных экспериментальных и теоретических

данных по движению слоя вязкой жидкости между вращающимися цилиндрами и расщеплению красочного слоя при его переносе с одного цилиндра на другой показал, что проблема недостаточно изучена. При решении такого рода задач приходится преодолевать значительные математические трудности, обусловленные, во-первых, нелинейностью и сложностью уравнений, во-вторых, необходимостью определять свободную поверхность при решении системы уравнений в частных производных, что является характерной особенностью течений в слоях и пленках.

С другой стороны, сложность решения задачи состоит в многообразии характеристик печатной системы. Так, в зависимости от свойств печатной краски и скорости разделения слоя (скорость печатания) изменяется характер разрыва красочного слоя. Следует отметить, что в большинстве работ приводятся данные по переносу краски с упрощенным принятием половинного расщепления с нулевой впитывающей способностью, т.е. условно принято, что красочный слой разделяется пополам по углу отрыва [4–7]

Наиболее общей математической моделью для описания течения сплошной вязкой жидкости являются уравнения Навье–Стокса, для решения которых существуют различные численные методы. Одним из распространенных методов аппроксимации несжимаемых течений является метод конечных элементов. Несмотря на последние достижения в области повышения точности аппроксимации в методе конечных элементов, конечно-разностные алгоритмы превосходят его в эффективности и точности [8].

Цель работы заключается в разработке алгоритма и программного обеспечения для численного моделирования течения малого объема вязкой несжимаемой жидкости со свободными границами между контактируемыми вращающимися цилиндрами, характерного для печатной системы, и компьютерной визуализации картин сопутствующих процессу деформаций.

Решение задачи. В численном моделировании течений вязкой несжимаемой жидкости можно выделить два класса алгоритмов:

- итерационные методы решения нелинейных разностных уравнений, основанные на идеях расщепления по физическим процессам [9];

- разностные схемы аппроксимации исходных интегро-дифференциальных уравнений [9–11].

В качестве основной характеристики итерационных методов чаще всего используются скорость сходимости итерационного процесса решения нелинейных уравнений и уточняют, что точность численного решения определяется в основном не порядком аппроксимации разностной схемы, а свойствами дифференциального приближения [10–13].

Для решения задачи использована равномерная сетка с количеством расчетных узлов по двум координатам N_x и N_y , равным 80. Выбор итерационного шага τ осуществлялся в пределах от 0,0002 до 0,005 для рассмотренной сетки в безразмерных величинах. Применена модель течения вязкой несжимаемой жидкости, описывающей ламинарное течение при определенных ограничениях на скорость движения цилиндров ($Re \leq 1$).

Для рассматриваемой задачи обозначим начальные и граничные значения для компонент скорости и давления жидкости в следующем виде:

При $t=0$

$$U_r(0, r, \theta) = U_\theta(0, r, \theta) = 0; \quad P(0, r, \theta) = P_{ATM};$$

$$R \leq r \leq R + \delta_s, \quad -\frac{\delta_L}{2R} \leq \theta \leq \frac{\delta_L}{2R}.$$

При $t \in (0, T]$ в точках касания с цилиндрами граничные условия для жидкости при $t \in (0, T_k]$ (здесь T_k — конечное время моделирования, когда происходит окончательное разделение начальной ограниченной области жидкости на две части по расходящимся поверхностям двух цилиндров).

На первом контактируемом цилиндре:

$$U_r(t, R, \theta) = U_\theta(t, R, \theta) = 0;$$

$$\frac{\partial P}{\partial n}(t, R, \theta) = \frac{\partial P}{\partial r}(t, R, \theta) = \omega^2 R + v \frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2}(t, r, \theta).$$

На втором контактируемом цилиндре:

$$U_r(t, r, \theta) = U_\theta(t, r, \theta);$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial n}(t, r, \theta) = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}(t, r, \theta), \frac{R}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \theta R}(t, r, \theta) \right) = \left(\frac{(U_\theta + \omega r)^2}{r} + v \left(\nabla^2 U_r - \frac{U_r}{r^2} - \frac{2R}{r^2} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta R} \right), \right. \\ \left. - \frac{U_r U_\theta}{r} - 2U_r \omega + v \left(\nabla^2 U_\theta - \frac{U_\theta}{r^2} + \frac{2R}{r^2} \frac{\partial U_r}{\partial \theta R} \right) \right).$$

С учетом малости скоростей относительного движения сдавливающих поверхностей с разницей внутреннего и внешнего давления ($P_1 - P_0$) при накапливающейся со временем величины деформации границы Δr для толщины слоя H бумаги (подложки) или резины площадью S , имеющего модуль упругости E изменения центра χ_c толщин слоев рассчитывались по следующему уравнению

$$\rho H S \chi_c / 2 = -\frac{E}{H} (\Delta r / 2 + \chi_c) \cdot S + (P_1 - P_0) \cdot S; \quad (1)$$

где Δr — величина деформации границы (сжатия) на какой-то момент времени t_1 .

Для рассмотренной нами задачи проведены расчеты с применением обычных методов по конечно-разностной схеме с уравнениями (2)–(3), при использовании оператора Λ в виде (4) с обычной ориентацией шаблона вдоль узловых линий для расчета конвективно-диффузионного переноса на примере печатной системы (перенос печатной краски между двумя вращающимися цилиндрами печатного аппарата) [14, 15].

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V}, \nabla) \bar{V} + \frac{1}{\rho} \nabla P = v \nabla^2 \bar{V} + \bar{F}(t, \bar{\chi}, \bar{V}, \bar{\omega}, \bar{g}); \quad (2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{V} = 0, \quad (3)$$

$$\Lambda_1^0 = -u \frac{\Delta_1 + \Delta_{-1}}{2h_x} + v \frac{\Delta_1 \Delta_{-1}}{2h_x^2}; \\ \Lambda_2^0 = -v \frac{\Delta_2 + \Delta_{-2}}{2h_y} + v \frac{\Delta_2 \Delta_{-2}}{2h_y^2}, \quad (4)$$

где \bar{V} — скорость; ∇ — оператор градиента; ρ — плотность жидкости; P — давление; v — кин-

матическая вязкость; ∇^2 — оператор Лапласа; \bar{F} — составляющие ускорений от внешних сил (сил тяготения) и сил от преобразования координат; t — время; $\bar{x} = (x, y)$ — координата точки в евклидовом пространстве; $\bar{\omega}$ — угловая скорость вращения; \bar{g} — векторная величина ускорения поля тяготения; $\Delta_1, \Delta_{-1}, \Delta_2, \Delta_{-2}$ — операторы сдвига функции на шаг сетки вверх или вниз по осям x и y .

Разработан алгоритм численного моделирования для автоматизации расчета коэффициентов переноса вязкой несжимаемой жидкости между контактируемыми цилиндрами.

Алгоритм численного моделирования для автоматизации расчета коэффициентов переноса вязкой несжимаемой жидкости в зоне контакта и его практическая реализация.

Алгоритм включает следующие модули:

- ввод данных и условий моделирования;
- проверка условий адгезии вязкой несжимаемой жидкости на соответствующих поверхностях;
- расчет итерационных сил и моментов сил.

Численный расчет для радиальных сил F_r и моментов M_ϕ для деформирующейся поверхности проводился с учетом дискретной сетки в окрестности узлов поверхности верхнего и нижнего цилиндров и их скоростей деформации по методу, реализованному в [16], что является необходимым при определении касательных напряжений. Суммарные величины F_r , M_ϕ по всем граничным узлам поверхности цилиндра, соприкасающимся с жидкостью, могут быть получены в виде:

$$F_r = \sum_{i=1}^{N_1} F_{ri} e_{ri}, \quad M_\phi = \sum_{i=1}^{N_1} M_{\phi i} \quad (5)$$

где N_1 — число расчетных узлов по координате x (или ϕ), e_{ri} — единичный орт для i -го направления радиуса вектора около приграничного (i, j)-го узла расчетной сетки.

- расчет деформаций границ;
- расчет коэффициентов переноса вязкой несжимаемой жидкости между контактируемыми цилиндрами;

— компьютерная графика картин деформаций в слое вязкой несжимаемой жидкости в процессе переноса на подложку в контактной зоне.

На рис. 1 представлен фрагмент практической реализации алгоритма численного моделирования для автоматизации расчета коэффициентов переноса вязкой несжимаемой жидкости на контактируемую подложку на примере печатной системы.

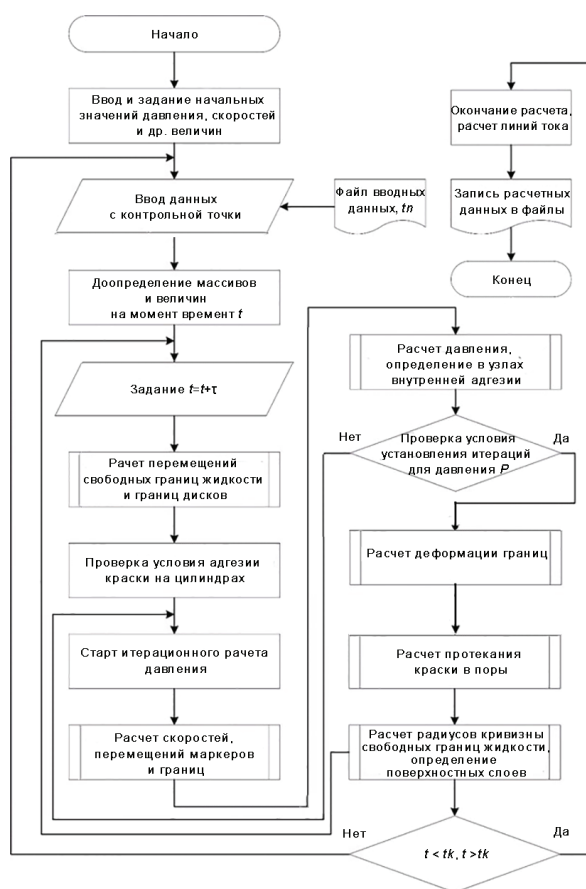


Рис. 1. Фрагмент практической реализации алгоритма численного моделирования для автоматизации расчета коэффициентов переноса краски на бумагу

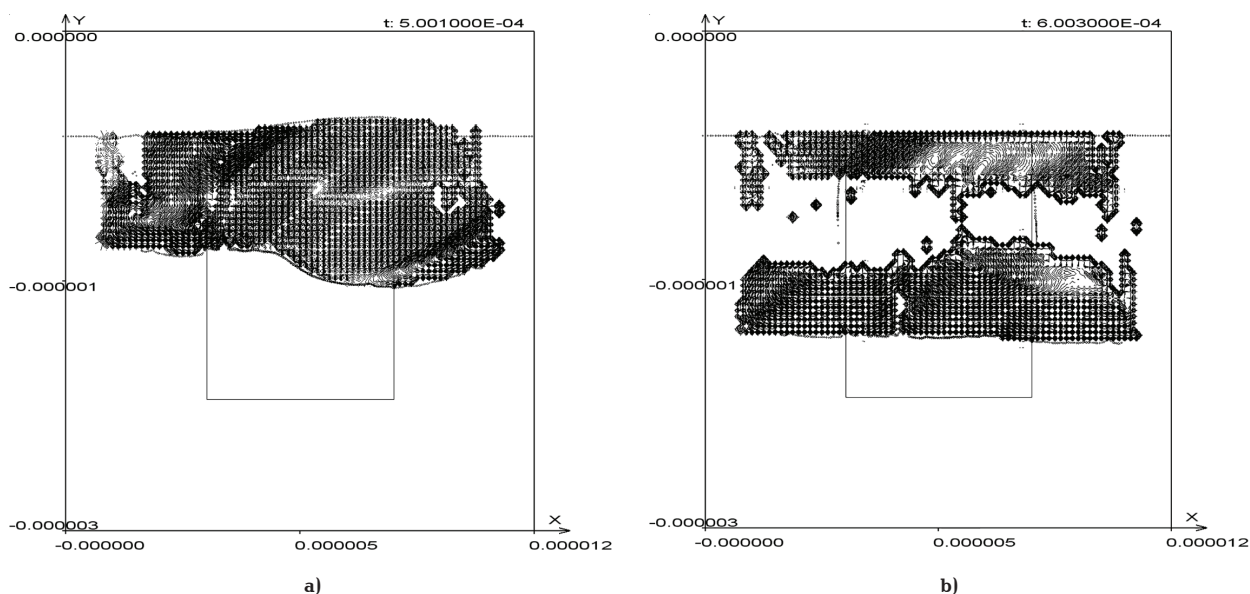
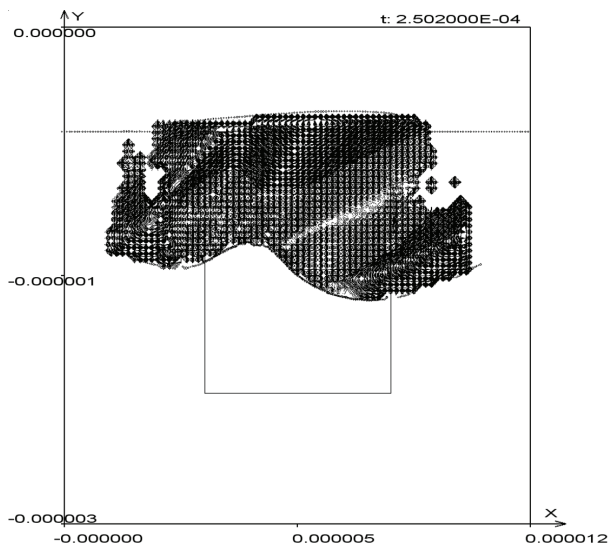
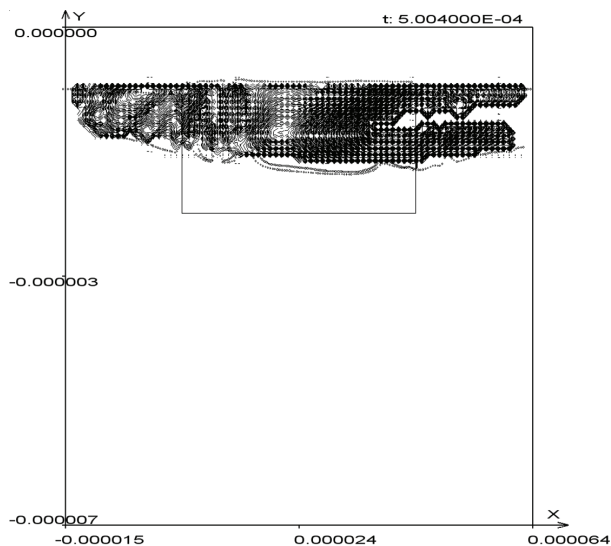


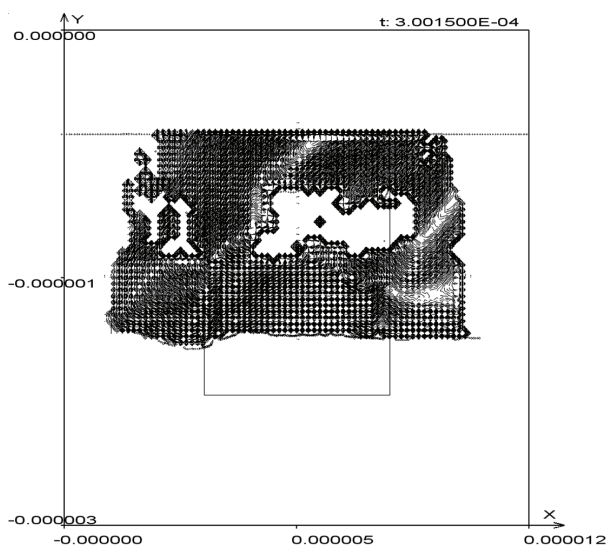
Рис. 2. Компьютерная графика деформаций в слое вязкой несжимаемой жидкости: подложка № 3, $L = 5$ мкм и $\delta = 2$ мкм, скорость вращения цилиндров печатного аппарата 10 рад/с (a–b, $t = 0,30 \cdot 10^{-3}, 0,50 \cdot 10^{-3}$)



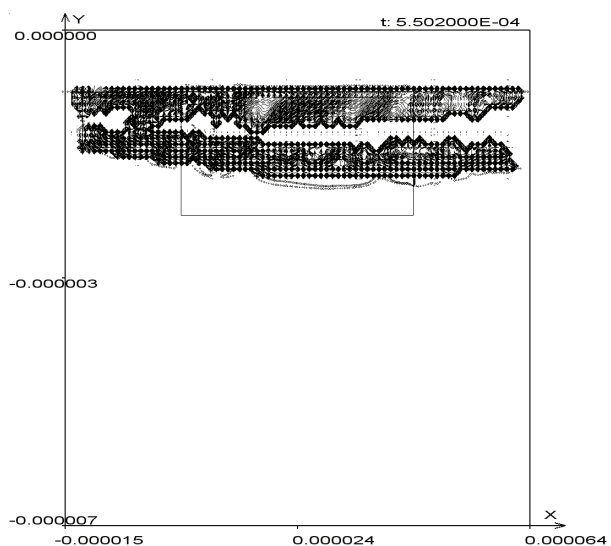
a)



a)



b)



b)

Рис. 3. Компьютерная графика деформаций в слое вязкой несжимаемой жидкости: подложка № 3, $L = 5$ мкм и $\delta = 2$ мкм, скорость вращения цилиндров печатного аппарата 10 рад/с (a–b, $t = 0,30 \cdot 10^{-3}, 0,50 \cdot 10^{-3}$)

Рис. 4. Компьютерная графика деформаций в слое вязкой несжимаемой жидкости: подложка № 3, $L = 5$ мкм, скорость вращения цилиндров печатного аппарата 10 рад/с (a–b, $t = 0,30 \cdot 10^{-3}, 0,50 \cdot 10^{-3}$)

Таблица 1

Результаты численного моделирования

Номер	Скорость, вращения, рад/с	Количество краски на подложке, %		
		в объемных слоях	на поверхности	общее кол-во
1	10	5,62	59,4	59,77
1	20	4,18	59,7	59,99
2	10	9,80	45,97	55,77
2	20	8,24	41,62	49,84

Программная реализация алгоритма позволяет автоматизировать расчет коэффициентов переноса краски в печатной системе: на поверхность подложки в зоне контакта между цилиндрами печатного аппарата; в структуру подложки, общее количество краски на поверхности подложки; коэффициент «пыления краски» [17, 18]. Компьютерная графика визуализации картин деформаций слоя вязкой несжимаемой жидкости в период прохождения зоны контакта показана на примере печатной системы в зависимости от печатно-технических характеристик контактируемой подложки (рис. 2–4).

Результаты в зависимости от характеристик компонентов печатной системы и условий переноса жидкости при учете деформации границ: $\delta_s = 2 \text{ мкм}$, $r_1 = r_2 = 0,13 \text{ м}$ (радиусы цилиндров), $P = P_{\text{АТМ}} = 10^5 \text{ Н/м}^2$, $v = 0,012 \text{ м}^2/\text{с}$ представлены в табл. 1. $\delta_L = 4 \text{ мкм}$.

Заключение. Полученные результаты подтверждают целесообразность применения представленного в работе подхода к определению количественной оценки характеристик переноса вязкой несжимаемой жидкости между контактируемыми цилиндрами. Приведенные расчеты показывают, что коэффициент, характеризующий перенос краски в печатной системе, зависит от характеристик печатной системы.

Приведенные картины компьютерной графики иллюстрируют этапы взаимодействия компонентов печатной системы. Отображают в виде графических картин деформационные изменения в слое жидкости в зоне печатного контакта.

Отличительные особенности предложенного алгоритма от аналогов:

- позволяет провести расчет коэффициентов переноса краски на запечатываемую подложку при офсетном печатании с учетом деформации компонентов печатной системы;

- позволяет осуществить расчет впитывания компонентов красочной системы в объемные слои запечатываемого материала;

- способствует автоматизации расчета контролируемых показателей.

Библиографический список

1. Koivula H., Preston J. S., Heard P. J., Toivakk M. Visualisation of the distribution of offset ink components printed onto coated paper // *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*. 2008. Vol. 317, Issues 1-3. P. 557–567. DOI: 10.1016/j.colsurfa.2007.11.043
2. Reis N. C. Jr., Griffiths R. F., Santos J. M. Numerical simulation of the impact of liquid droplets on porous surfaces // *Journal of Computational Physics*. 2004. Vol. 198 (2). P. 747–770. DOI: 10.1016/j.jcp.2004.01.024.
3. Reis N. C. Jr., Griffiths F. R., Santos J. M. Parametric study of liquid droplets impinging on porous surfaces // *Applied Mathematical Modelling*. 2008. Vol. 32, Issue 3. P. 341–346. DOI: 10.1016/j.apm.2006.12.006.
4. MacPhee J. *Fundamentals of lithographic printing*. GATF Press Pittsburgh, 1998. 365 p. ISBN 0-883 62-214-9.
5. Voltaire J. *Ink film splitting acoustics in offset printing*. Stockholm, 2006. 54 p. ISBN 91-7178-261-3.
6. Vlachopoulos G., Claypole T., Bould D. Ink mist formation in roller trains // *IARIGAI 2010 proceedings: Advances in printing and media technology*. Montreal, Canada. 2010. Vol. 37. P. 227–234.
7. Claypole J., Williams P. R., Deganello D. Control of breakup of ink filaments in offset printing // *IARIGAI 2012 proceedings: Advances in printing and media technology*. Ljubljana, Slovenia. 2012. Vol. 39. P. 207–211.
8. Ozaki Y., Kimura M. Visualisation of printing of ink vehicle on paper surfaces by a SEM technique // *Appita J*. 2000. Vol. 3. P. 216–219.
9. Оран Э., Борис Дж. Численное моделирование реагирующих потоков. М.: Мир, 1990. 660 с.
10. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
11. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 608 с.
12. Шокин Ю. И. Метод дифференциального приближения. Новосибирск: Наука, 1979. 222 с.
13. Паничкин А. В. Ускорение сходимости в расчетах стационарных течений жидкости при больших числах Рейнольдса // *Вычислительные технологии*. 2008. Т. 13. Спец. вып. 3. С. 38–44.
14. Panichkin A. V., Varepo L. G. The numerical calculation of a viscous incompressible fluid transfer onto porous surface between rotating cylinders // *Springer Proceedings in Physics*. 2014. Vol. 154. P. 79-83. DOI: 10.1007/978-3-319-04639-6_11.
15. Panichkin A. V., Varepo L. G., Trapeznikova O. V. The numerical calculation of the viscous incompressible fluid transfer between contacting surfaces // *IOP: Materials Science and Engineering*. 2016, Vol. 124. P. 1–6. DOI: 10.1088/1757-899X/124/1/012106.
16. Varepo L. G., Panichkin A. V. Numerical calculation of total radial forces and rotary moments from the cylinders surface // *Journal of Physics: Conference Series*. 2017. Vol. 858. 012039.
17. Варепо Л. Г., Паничкин А. В. Расчет сил и моментов сил взаимодействия цилиндрических поверхностей при переносе вязкой несжимаемой жидкости на подложку: свидетельство о регистрации программы для ЭВМ. М.: ФИПС, 2016. № 2016617529 от 20.08.2016.
18. Варепо Л. Г., Паничкин А. В. Расчет коэффициентов переноса вязкой несжимаемой жидкости на подложку между контактируемыми цилиндрическими поверхностями: свидетельство о регистрации программы для ЭВМ. М.: ФИПС, 2016. № 2016617873 от 20.08.2016 г.

ВАРЕПО Лариса Григорьевна, доктор технических наук, доцент (Россия), профессор кафедры «Нефтегазовое дело, стандартизация и метрология» Омского государственного технического университета (ОмГТУ).

SPIN-код: 4980-6679

AuthorID (РИНЦ): 657039

AuthorID (SCOPUS): 6507043152

ResearcherID: B-1163-2015

ORCID: 0000-0001-5366-2700

ПАНИЧКИН Алексей Васильевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории математического моделирования в механике Омского филиала Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

SPIN-код: 9581-6045

AuthorID (РИНЦ): 129760

AuthorID (SCOPUS): 56503836400

ResearcherID: U-1369-2017

ORCID: 0000-0002-4757-6168

ТРАПЕЗНИКОВА Ольга Валерьевна, ассистент кафедры «Автоматизация и робототехника» ОмГТУ.

SPIN-код: 5648-6365

ORCID: 0000-0001-6919-397X

ResearcherID: O-7611-2015

МЫШЛЯВЦЕВА Марта Доржукаевна, доктор физико-математических наук, доцент (Россия), заведующая кафедрой «Высшая математика» ОмГТУ.

SPIN-код: 4952-9267
AuthorID (РИНЦ): 391268
ResearcherID: H-5361-2013

НАГОРНОВА Ирина Викторовна, кандидат технических наук, доцент кафедры «Инновационные материалы протомедиаиндустрии» Московского политехнического университета.

SPIN-код: 9273-5758

AuthorID (РИНЦ): 235762

ORCID: 0000-0001-5336-1262

ResearcherID: A-6582-2017

Адрес для переписки: larisavarepo@yandex.ru

Для цитирования

Варепо Л. Г., Паничкин А. В., Трапезникова О. В., Мышлянцева М. Д., Нагорнова И. В. Моделирование переноса вязкой несжимаемой жидкости и компьютерная графика ее деформаций в зоне контакта // Омский научный вестник. 2018. № 3 (159). С. 137–142. DOI: 10.25206/1813-8225-2018-159-137-142.

Статья поступила в редакцию 29.05.2018 г.

© Л. Г. Варепо, А. В. Паничкин, О. В. Трапезникова,
М. Д. Мышлянцева, И. В. Нагорнова