

УДК 621.317.328
DOI: 10.25206/1813-8225-2018-159-18-21

С. В. БИРЮКОВ^{1,2}
А. С. КОЛМОГОРОВ³
С. С. КОЛМОГорова¹

¹Омский государственный
технический университет,
г. Омск

²Сибирский государственный
автомобильно-дорожный университет,
г. Омск

³ООО «Автоматика-сервис»,
г. Омск

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПРОВОДЯЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ДАТЧИКА С ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОЛЕМ РАВНОМЕРНО ЗАРЯЖЕННОЙ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ НИТИ, ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ОСИ ЦИЛИНДРА

В статье приводится расчет поверхностной плотности электрического заряда, индуцированного на проводящей поверхности корпуса или чувствительных электродов электроиндукционного датчика напряженности электрического поля цилиндрической формы. Встречающиеся в научной литературе выражения для плотности зарядов направлены на решения электротехнических задач и требуют адаптации к решению задач по расчету электроиндукционных датчиков. Поэтому задачей данной статьи является получение пригодных для расчетов электроиндукционных датчиков зависимостей плотности зарядов индуцированных на проводящей цилиндрической поверхности корпуса датчика от геометрических параметров электрического поля и датчика. Проведенные математические исследования позволили установить зависимости поверхностной плотности электрического заряда для случая проводящего цилиндра в поле линейного заряда. Указанные зависимости проанализированы и подтверждена их достоверность. Результатом является полученная новая форма представления поверхностной плотности электрического заряда, индуцированного на боковой проводящей поверхности цилиндра.

Ключевые слова: электрическое поле линейного заряда, линейный заряд, метод изображений, заряженная нить, плотность электрического заряда, датчик, чувствительный электрод.

Введение. При анализе работы электроиндукционных цилиндрических датчиков напряженности электрического поля (ЭП) вблизи источников поля, например, вблизи высоковольтных линий электропередачи возникает необходимость в определении распределения напряженности ЭП на проводящей поверхности цилиндрического датчика. Эквивалент-

ным источником поля, имитирующим поля высоковольтных линий электропередач при рассмотрении взаимодействия датчика с этими полями, является поле равномерно заряженной прямолинейной нити, параллельной оси цилиндрического корпуса датчика.

Электрическое поле равномерно заряженной прямолинейной нити обладает сильной неодно-

родностью в радиальных направлениях, и поэтому может рассматриваться при решении задачи как граничный случай при оценке предельной погрешности цилиндрического датчика.

Задачи о проводящем бесконечном цилиндре, находящемся в однородном поле и неоднородном поле равномерно заряженной прямолинейной нити стали уже классическими и рассматриваются во многих учебниках по теоретическим основам электротехники [1]. Однако их решение направлено на решение электротехнических задач и напрямую непригодно для решения задач, связанных с расчетом электроиндукционных датчиков напряженности ЭП. Поэтому в данной работе будет рассмотрено взаимодействие проводящего корпуса цилиндрического датчика напряженности ЭП с равномерно заряженной прямолинейной нитью. Автором данной работы уже решены задачи для плоских и сферических форм датчиков, находящихся в поле заряженной плоскости [2], поле точечного заряда [3], поле сферического конденсатора [4].

Теория. Пусть ось проводящего незаряженного цилиндра радиуса R совпадает с продольной осью цилиндрической системы координат и на расстоянии r от неё расположена прямолинейная нить с линейной плотностью электрического заряда τ (рис. 1).

Необходимо найти поверхностную плотность зарядов на боковой поверхности цилиндра. Для этого определим параметры электростатического поля вне проводящего цилиндра и получим выражение для нормальной составляющей напряженности ЭП на его поверхности. Эту задачу можно решить с помощью метода изображений [5].

Для решения задачи обратимся к рис. 2. При этом система линейно распределенных зарядов, определяющих поле равномерно заряженной прямолинейной нити в присутствии проводящего незаряженного цилиндра с плавающим потенциалом, будет состоять из трех линейных зарядов: заданного линейного заряда τ , отображенных в цилиндре линейного заряда $-\tau$ и линейного заряда τ , помещенного вдоль оси симметрии цилиндра. Линейный заряд τ , расположенный вдоль оси цилиндра, обеспечивает его нулевой заряд. Для равномерно заряженной уединенной нити, в частности, справедливо соотношение [6]

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{r}, \quad E_r = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}, \quad (1)$$

где r — расстояние до точки наблюдения.

При использовании цилиндрической системы координат расстояние между двумя точками пространства можно рассчитать

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{d^2 + R^2 - 2dR \cos \alpha}, \\ b &= \sqrt{d'^2 + R^2 - 2d'R \cos \alpha}, \end{aligned} \quad (2)$$

где R — радиус цилиндра; d — расстояние между заряженной нитью и осью цилиндра; α — угол полярной системы координат.

Если точка наблюдения A принадлежит цилиндрической поверхности (см. рис. 1), то потенциал поверхности проводящего цилиндра должен быть постоянен и определяться из выражения

$$\varphi_A = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left[\tau \ln \frac{1}{a} + (-\tau) \cdot \ln \frac{1}{b} + \tau \ln \frac{1}{R} \right] = const. \quad (3)$$

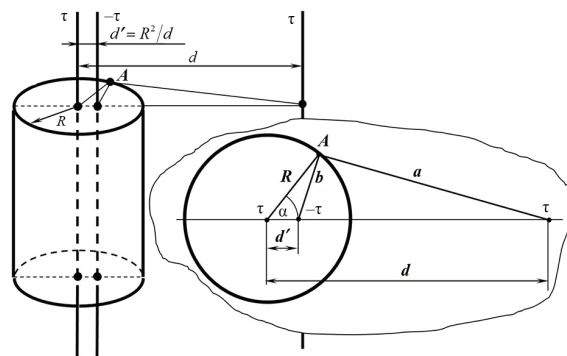


Рис. 1. Проводящий цилиндр в поле равномерно заряженной прямолинейной нити

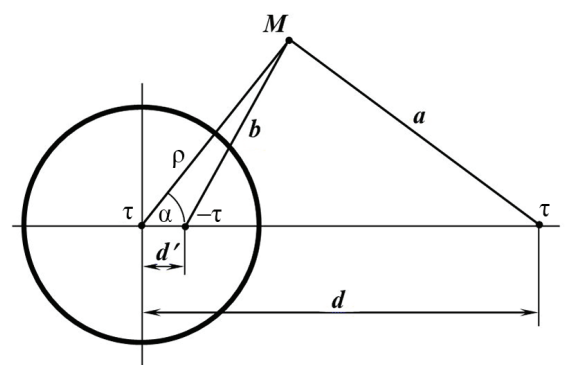


Рис. 2. Произвольная точка M электрического поля в системе «равномерно заряженная прямолинейная нить — проводящий цилиндр круглого сечения»

С учётом выражения (1) и подстановки выражений (2) для потенциала точки A поверхности проводящего цилиндра получим

$$\varphi_A = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{d} \sqrt{\frac{1 - 2\frac{d'}{R} \cos \alpha + \frac{d'^2}{R^2}}{1 - 2\frac{R}{d} \cos \alpha + \frac{R^2}{d^2}}} = const. \quad (4)$$

Выполнение условия постоянства потенциала возможно, если принять соотношение [7]

$$d' = \frac{R^2}{d}. \quad (5)$$

Тогда потенциал поверхности цилиндра будет

$$\varphi_A = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{d} \sqrt{\frac{1 - 2\frac{R}{d} \cos \alpha + \frac{R^2}{d^2}}{1 - 2\frac{R}{d} \cos \alpha + \frac{R^2}{d^2}}} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{d}. \quad (6)$$

Из выражения (6) следует, что потенциал цилиндра не зависит от угловой координаты α и в силу этого является постоянным и равным потенциалу точки пространства до его введения. Принятая система трех линейных зарядов позволяет считать, что в общем случае полный суммарный линейный заряд цилиндра будет равен нулю. Поэтому проводящий цилиндр произвольного потенциала не будет являться источником собственного поля [8].

Потенциал и напряженность произвольной точки пространства M вне цилиндра определяются выражениями (см. рис 2)

$$\begin{aligned}\varphi_M &= \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\sqrt{\rho^2 - 2d'\rho \cos\alpha + d'^2}}{\sqrt{\rho^2 - 2d\rho \cos\alpha + d^2}} = \\ &= \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\rho^2 - 2d'\rho \cos\alpha - d'^2}{\rho^2 - 2d\rho \cos\alpha + d^2}.\end{aligned}\quad (7)$$

$$\vec{E}_M = -\nabla\varphi_M = -\left(\vec{e}_\rho \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \vec{e}_\alpha \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} + \vec{e}_z \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right).\quad (8)$$

Радиальная компонента напряжённости электростатического поля имеет вид:

$$\begin{aligned}E_\rho = E_r(\rho, \alpha) &= -\frac{\partial\varphi_M}{\partial\rho} = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\rho} \times \\ &\times \left\{1 - \frac{\rho(d-d')[\rho(d+d') - (\rho^2 + dd')\cos\alpha]}{(\rho^2 - 2d'\rho \cos\alpha + d'^2) \cdot (\rho^2 - 2d\rho \cos\alpha + d^2)}\right\}.\end{aligned}\quad (9)$$

Подставив в выражение (9) $\rho = R$ и $d' = R^2/d$ после преобразований получим

$$E_R = E_r(R, \alpha) = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 d} \cdot \frac{1}{\frac{R}{d}} \left[1 - \frac{\left(1 - \frac{R^2}{d^2}\right)}{\left(1 - 2\frac{R}{d}\cos\alpha + \frac{R^2}{d^2}\right)}\right].\quad (10)$$

Приведем выражение (10) к виду. Тогда

$$E_R = E_r(R, \alpha) = -\frac{1}{a} \left[1 - \frac{(1-a^2)}{(1-2a\cos\alpha + a^2)}\right] E_0,\quad (11)$$

где $E_0 = \tau/2\pi\epsilon_0 d$ — напряжённость исходного ЭП, создаваемая равномерно заряженной прямолинейной нитью с поверхностной плотностью заряда τ в точке с координатами $\rho = 0$, $\alpha = 0$, $z = 0$ в отсутствии проводящего цилиндра; $a = R/d$ — относительное расстояние от центра цилиндра до источника ЭП (характеризует степень неоднородности поля).

Проанализируем выражение (11). Для этого найдем его предел при $a \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}\lim_{a \rightarrow 0} E_r(\rho, a) &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \left[1 - \frac{(1-a^2)}{(1-2a\cos\alpha + a^2)}\right] E_0 = \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \left[\frac{1-2a\cos\alpha + a^2 - 1 + a^2}{(1-2a\cos\alpha + a^2)}\right] = \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \frac{2a(a-2\cos\alpha)}{(1-2a\cos\alpha + a^2)} = \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{2(a-2\cos\alpha)}{(1-2a\cos\alpha + a^2)} = -2E_0 \cos\alpha.\end{aligned}\quad (12)$$

Из выражения (12) видно, что при предельном переходе выражение (11) стремится к выражению, соответствующему распределению нормальной составляющей напряженности на поверхности изолированного цилиндра, находящейся в однородном поле [14].

Зная радиальную напряженность (11) несложно получить распределение поверхностной плотности

индуцированного электрического заряда на боковой поверхности цилиндра [9]:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma(\alpha) = \epsilon\epsilon_0 E_r(R, \alpha) = \\ &= -\epsilon\epsilon_0 \frac{1}{a} \left[1 - \frac{(1-a^2)}{(1-2a\cos\alpha + a^2)}\right] E_0 = \\ &= \frac{\epsilon\epsilon_0 (2 \cdot \cos\alpha - a)}{1 - 2a \cdot \cos\alpha + a^2} E_0.\end{aligned}\quad (13)$$

Таким образом, при внесении незаряженного проводящего цилиндра в электрическое поле равномерно заряженной прямолинейной нити, параллельной оси цилиндра на его боковой поверхности образовалась поверхностная плотность индуцированного заряда $\sigma(\alpha)$.

Поверхностная плотность индуцированного заряда неравномерно распределена по поверхности проводящего цилиндра. Степень отмеченной неравномерности можно оценить по графику рис. 3, на котором по одной оси отложены величины отношения локальной поверхностной плотности индуцированного электрического заряда к максимальной поверхностной плотности заряда $\sigma(\alpha)/\sigma(0)$ в зависимости от полярного угла α при различных значениях параметра $a=R/d$, характеризующего степень неоднородности поля.

$$\frac{\sigma(\alpha)}{\sigma(0)} = \frac{(1-a) \cdot (\cos\alpha - a)}{1 - 2a\cos\alpha + a^2}.\quad (14)$$

Легко видеть, что с увеличением расстояния между осью проводящего цилиндра и нитью (параметр a уменьшается), распределение поверхностной плотности заряда становится близко к распределению в однородном поле.

Согласно выражению (8), произвольная точка пространства M имеет еще и угловую составляющую напряженности электрического поля:

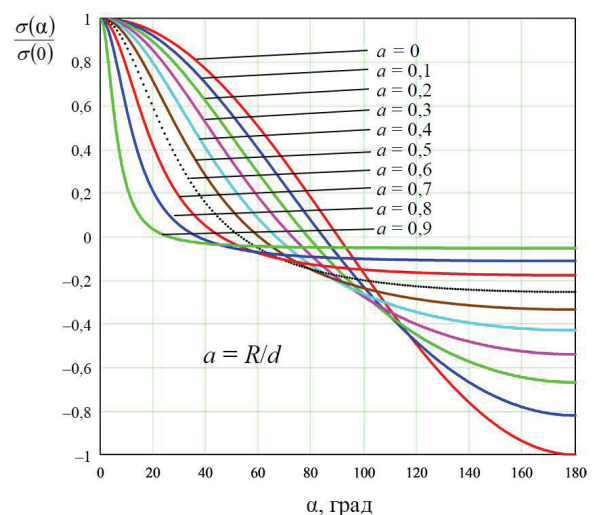


Рис. 3. Графики зависимости величины отношения локальной к максимальной поверхностной плотности индуцированного электрического заряда в зависимости от полярного угла α при различных значениях параметра $a = R/d$, характеризующего степень неоднородности поля

$$E_{\alpha} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = -\frac{\tau \cdot \sin \alpha}{2\pi \epsilon_0 d} \times \left[\left(\frac{R^2}{d^2} - 2 \frac{\rho}{d} \cos \alpha + \frac{\rho^2}{R^2} \right)^{-1} - \left(1 - 2 \frac{\rho}{d} \cos \alpha + \frac{\rho^2}{d^2} \right)^{-1} \right]. \quad (15)$$

Как известно [10], угловая составляющая напряжённости электрического поля на поверхности проводящего цилиндра обращается в нуль. Поэтому для подтверждения правильности нахождения поверхностной плотности заряда на боковой поверхности цилиндра (13) нужно убедиться, что E_{α} на поверхности проводящего цилиндра равно нулю. Это условие легко проверить при подстановке в выражение (15) $\rho = R$.

Таким образом, доказана правильность полученных результатов.

Заключение. Полученные выражения (10), (11) для нормальной составляющей напряженности электрического поля на боковой поверхности проводящего цилиндра, находящегося в поле прямолинейной и равномерно заряженной нити, позволили получить выражение (13) для поверхностной плотности заряда на проводящем цилиндре и представить топологию неоднородности распределения поля вокруг проводящего цилиндра (рис. 3). В таком виде выражение (13) получено впервые. Выражение (13) позволит рассчитывать электрические заряды, индуцированные на поверхностях чувствительных электродов цилиндрических датчиков и пропорциональные напряженности электрического поля.

Библиографический список

1. Нейман Л. Р., Демирчян К. С. Теоретические основы электротехники. В 2 т. М.-Л.: Энергия, 1967. Т. 2. 408 с.
2. Бирюков С. В. Расчет электрического поля на поверхности электроиндукционного сферического датчика напряженности, находящегося вблизи проводящей плоскости. Омск: Изд-во ОмПИ, 1984. 22 с. Деп. в ВИНТИ 13.09.84, № 6225-84.
3. Бирюков С. В. Теория и практика построения электроиндукционных датчиков потенциала и напряженности электрического поля // Омский научный вестник. 2000. № 11. С. 89–93.
4. Бирюков С. В. Расчет электрического поля на поверхности электроиндукционного сферического датчика напряженности, находящегося в поле сферического конденсатора // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. 2003. № 4. С. 22–25.

5. Миролюбов Н. Н., Костенко М. В., Левинштейн М. Л. Методы расчета электростатических полей. М.: Высшая школа, 1963. 415 с.

6. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: Электромагнитное поле. 7-е изд., перераб. и доп. М.: Высшая школа, 1978. 273 с.

7. Шимони К. Теоретическая электротехника: пер. с нем. / под ред. К. М. Поливанова. М.: Мир. 1964. 773 с.

8. Поливанов К. М. Теоретические основы электротехники. В 3 т. Т. 3. Теория электромагнитного поля. М.: Энергия, 1975. 207 с.

9. Справочник по физике: формулы, таблицы, схемы / Под ред. Х. Штёкера; пер. с нем. Т. Н. Зазаевой под ред. К. В. Смирнова. М.: Техносфера, 2009. 1262 с. ISBN 978-5-94836-205-2.

10. Тамм И. Е. Основы теории электричества. 9-е изд. М.: Наука, 1976. 616 с.

БИРЮКОВ Сергей Владимирович, доктор технических наук, профессор (Россия), профессор кафедры «Физика» Омского государственного технического университета (ОмГТУ); профессор кафедры «Физика» Сибирского государственного автомобильно-дорожного университета.

SPIN-код: 9384-0078

AuthorID (РИНЦ): 189467

КОЛМОГОРОВ Аркадий Сергеевич, ведущий инженер ООО «Автоматика-сервис», г. Омск.

КОЛМОГОРОВА Светлана Сергеевна, кандидат технических наук, доцент кафедры «Автоматизированные системы обработки информации и управления», старший преподаватель кафедры «Радиотехнические устройства и системы диагностики» ОмГТУ.

SPIN-код: 4216-9920

AuthorID (РИНЦ): 916641

Адрес для переписки: sbiryukov154@mail.ru

Для цитирования

Бирюков С. В., Колмогоров А. С., Колмогорова С. С. Взаимодействие проводящей поверхности цилиндрического датчика с электрическим полем равномерно заряженной прямолинейной нити, параллельной оси цилиндра // Омский научный вестник. 2018. № 3 (159). С. 18–21. DOI: 10.25206/1813-8225-2018-159-18-21.

Статья поступила в редакцию 25.02.2018 г.

© С. В. Бирюков, А. С. Колмогоров, С. С. Колмогорова