

## СНИЖЕНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В статье представлен метод выбора шага по времени при решении нестационарных задач теплопроводности. Произведено сравнение с аналитическим решением. Предложен алгоритм выбора шага в автоматическом режиме. Применение данной методики позволяет существенно сократить затраты машинного времени на проведение расчета нестационарного температурного поля без ущерба в точности.

Указанная методика реализована в программе «Tempreg-3d», используемой для выполнения теплотехнических расчетов ограждающих конструкций.

**Ключевые слова:** метод конечных элементов (МКЭ), теплотехнический расчет МКЭ, «Tempreg-3d», валидация EN ISO 1021, автоматическая генерация конечно-элементной сети.

**Введение.** Расчет температурных полей методом конечных элементов широко используется в машиностроении, строительстве автомобильных дорог, промышленных и гражданских зданий, строительстве холодильных установок и др.

Этот метод также используется при производстве работ в геологоразведке, нефтедобыче, а также при расчете конструкций на пожаробезопасность.

Расчет температурных полей аналитическим методом возможно только для тел простой формы [1, 2].

Однако сложность проведения расчета, и прежде всего численная реализация, не позволяет производить расчеты реальных трехмерных конструкций за приемлемое время с требуемой точностью.

Доказано, что при измельчении конечно-элементной сети точность расчета увеличивается [3], однако это ведет к существенному увеличению размерности системы линейных уравнений, что, в свою очередь, значительно увеличивает затраты машинного времени на проведение расчета.

Размерность конечно-элементной сети для реальных трехмерных расчетов может достигать 1 млн узлов и более, а затраты машинного времени могут составлять несколько часов.

Чрезмерное уменьшение конечно-элементной сети не позволяет детально идеализировать расчетную область, а самое главное — вносит существенную погрешность.

Степень дискретизации в значительной степени зависит от вида конечного элемента, вернее, от закона распределения температуры в конечном элементе.

В данной работе используется восьмиузловой изопараметрический элемент с трilinearным законом распределения температуры. Использование данного закона распределения означает, что если температурное поле будет незначительно отличаться от линейного, то погрешность расчета будет

невелика, в случае существенно нелинейного распределения температуры необходима более мелкая дискретизация.

Например, при расчете трехслойной ограждающей конструкции достаточно всего трех конечных элементов для получения точного решения, так как распределение температурного поля в данном случае будет линейным, дополнительное измельчение в данном случае совершенно не требуется.

В случае же расчета области в виде угла требуется значительное измельчение в зоне угла, так как в этой области температурное поле существенно нелинейно.

Поэтому актуальным является вопрос об оценке погрешностей вносимых в расчет в зависимости от степени дискретизации. Также важным является разработка методики, позволяющая производить автоматическую генерацию конечно-элементной сети, что значительно сокращает затраты на подготовку исходных данных и снижает ошибки при вводе исходных данных, так как человеческий фактор сведен к минимуму.

**1. Пример автоматической генерации конечно-элементной сети программой Tempreg-3d.** Для тестирования алгоритма необходимо точное (аналитическое) решение, но таких решений найти в литературе не представилось возможным, так как решение приводилось для тел простой формы со сравнительно однородными граничными условиями. А это не представляло интереса с точки зрения метода конечных элементов, так как требовалось произвести сравнение на расчетной области с граничными условиями, которые формировали бы существенно нелинейное температурное поле.

Поэтому в качестве аналитического решения была выбрана задача, в которой в силу симметрии можно было бы произвести сравнительный анализ.

Расчетная область представляет из себя пластину размером 500×500 мм. Она представлена на рис. 1.

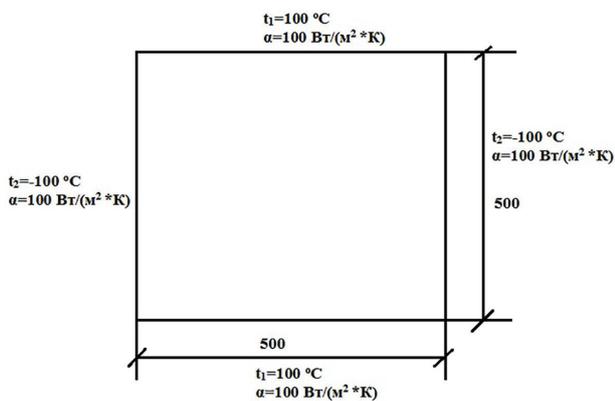


Рис. 1. Расчетная область

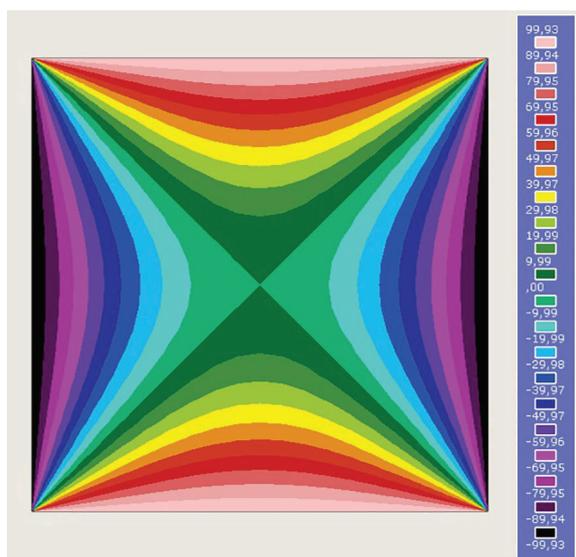


Рис. 2. Температурное поле

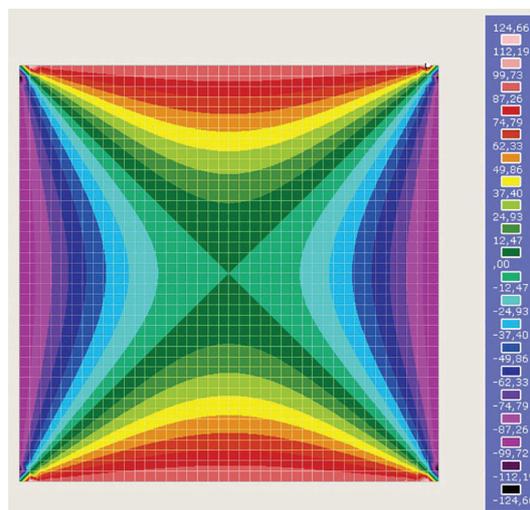


Рис. 3. Температурное поле с равномерной конечно-элементной сетью

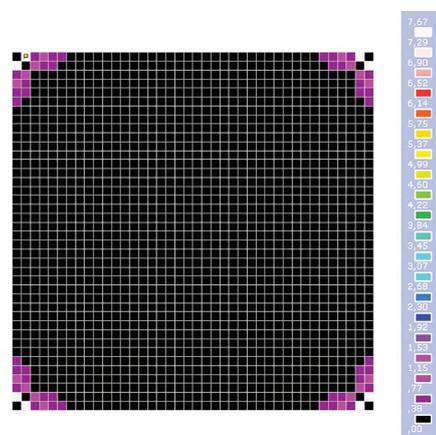


Рис. 4. Расчетная область в режиме «Искажения»

Произведем расчет температурного поля методом конечных элементов по программе Tempreg-3d [4, 5] плоская задача.

Расчет производился при следующих граничных условиях:

- теплопроводность пластины  $\lambda = 0,01$  Вт/(м·К);
- коэффициент теплоотдачи  $\alpha = 100$  Вт/(м<sup>2</sup>·К);
- температура в зоне подвода тепла (сверху и снизу)  $t_1 = 100$  °С;
- температура в зоне отвода тепла (слева и справа)  $t_2 = -100$  °С.

На рис. 2 приведено температурное поле.

Как видно из рис. 2, температурное поле симметрично, на диагоналях температура равна 0 °С.

Максимальная температура  $t_{max} = 99,93$  °С наблюдается в середине области сверху и снизу. Минимальная температура  $t_{min} = -99,93$  °С наблюдается в середине области слева и справа.

Значения максимальных и минимальных температур не анализировались.

Температура во всех четырех углах равна 0 °С.

Для того, чтобы выяснить, как необходимо разбивать расчетную область на конечные элементы, для получения корректного результата, произведем расчет с равномерной конечно-элементной сетью с шагом 12,5 мм, всего получится 1600 КЭ (рис. 3).

Как видно из рис. 3, температурное поле в углах конструкции некорректно, кроме того, в точках,

близких к угловым, наблюдаются некорректные значения температур 124,66 °С (сверху и снизу), так и  $-124,66$  °С (справа и слева), что, конечно же, может быть приемлемым, так как значения этих температур находятся за пределами температур окружающей среды 100,00 °С,  $-100,00$  °С.

Причем температурное поле в центре области отображено вполне корректно.

Можно предположить, что более мелкая дискретизация в угловых зонах приведет к более корректному расчету, т.е. использовать неравномерную конечно-элементную сеть.

Однако априори сложно определить, как необходимо производить дискретизацию, чтобы получить корректное решение.

Для решения этой проблемы в программе Tempreg-3d, используется понятие «искажение» в КЭ, которые рассчитываются для каждой грани конечного элемента, эти искажения представляют из себя отклонение температур для четырех узлов каждой грани конечного элемента от плоскости [6].

На рис. 4 приведена расчетная область, где изображены искажения.

Как видно из рис. 4 наибольшие искажения возникают вблизи углов и достигают значения 7,67 °С.

Как показали результаты численных исследований, для получения корректного расчета необходимо, чтобы искажения не превышали 1 °С.

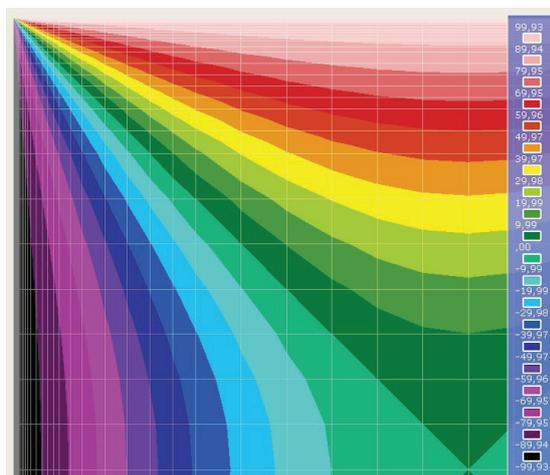


Рис. 5. Температурное поле при использовании неравномерной конечно-элементной сети

Программа производит автоматическую дискретизацию области на конечные элементы таким образом, чтобы в любой грани конечного элемента искажения не превышали наперед заданного значения, например  $1^\circ\text{C}$ .

На рис. 5 приведено температурное поле, полученное при автоматическом генерировании конечно-элементной сети (представлен фрагмент расчетной области, всего 4620 КЭ).

Как видно из рис. 5, размер конечного элемента в центре конструкции достаточно велик (25 мм), а по мере приближения к углам области размер зна-

чительно уменьшается и составляет в углу 0,2 мм, отношение максимального конечного элемента к минимальному в данном расчете составляет 125.

Максимальные искажения для данного расчета составляют  $2,25^\circ\text{C}$ , меньшее значение получить не удалось, так как в программе стоит ограничение на минимальный размер КЭ (0,15 мм).

Данное обстоятельство связано со специфичностью расчета (в углу сверху температура  $100^\circ\text{C}$ , а слева  $-100^\circ\text{C}$ ).

При проведении реальных расчетов удается получить практически сколь угодно маленькое значение искажения, вплоть до  $0,01^\circ\text{C}$ .

**2. Возможности программы Tempreg-3d в соответствии с требованиями EN ISO 10211.** Программа Tempreg-3d предназначена для выполнения теплотехнических расчетов ограждающих конструкций с применением температурных полей и тепловых потоков через узлы ограждающей конструкции. При создании плоских и объемных моделей узлов ограждающей конструкции в Tempreg-3d производится автоматическое разбиение конечно-разностной сетки, соответствующей требованиям EN ISO 10211 [4, 5].

Для проверки точности расчета имеется возможность производить измельчение сетки в кратное количество раз для оценки корректности результатов согласно требованиям EN ISO 10211. Ниже приведен пример расчета плоской ограждающей конструкции.

Всего проведено девять расчетов, из них — восемь с равномерной конечно-элементной сетью,

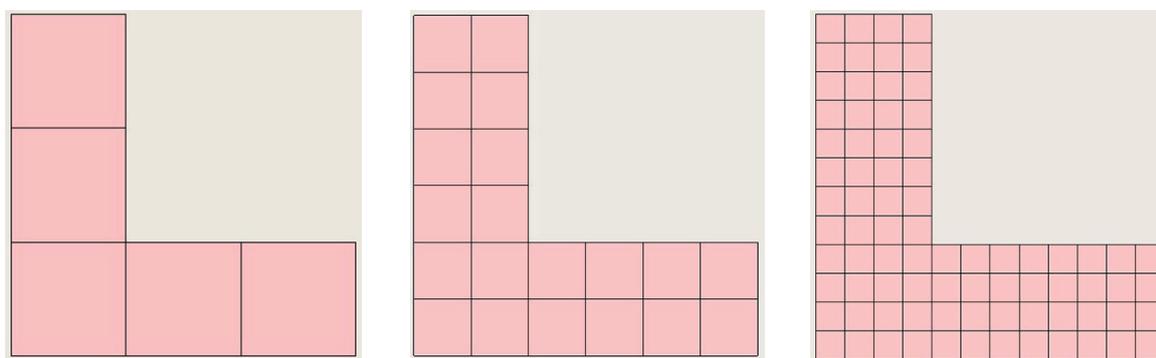


Рис. 6. Дискретизация на конечные элементы (расчеты № 1–№ 3)

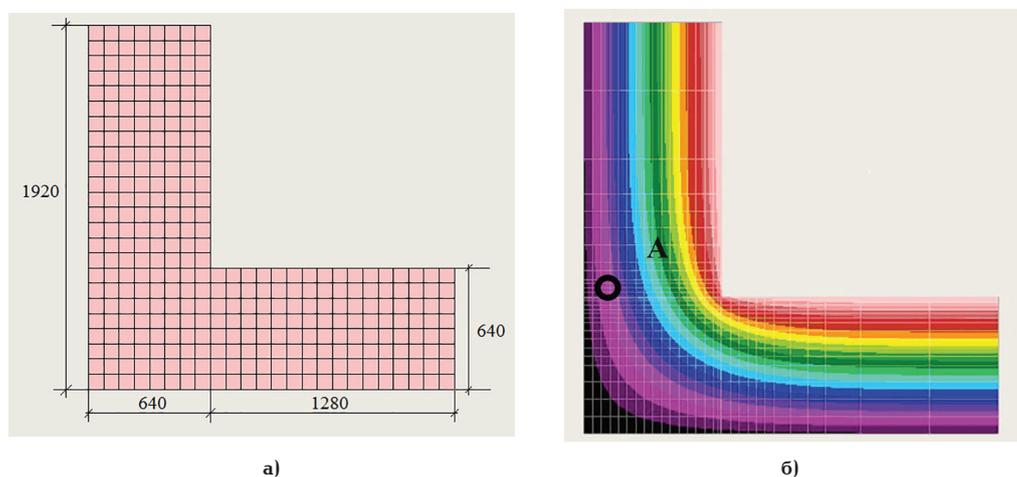


Рис. 7. а — расчетная область, расчет № 4; б — температурное поле, расчет № 9

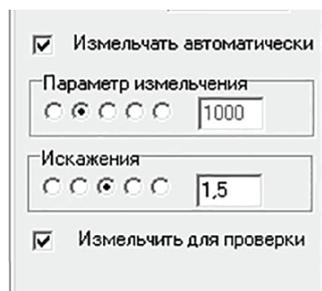


Рис. 8. Панель настройки для проведения расчетов

один — с неравномерной конечно-элементной сетью при автоматическом разбиении. Во всех расчетах использованы идентичные граничные условия: температура наружного воздуха  $-30\text{ }^{\circ}\text{C}$ , температура внутреннего воздуха  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Расчетная область, для расчета № 1 состояла из пяти конечных элементов, каждый размером  $640 \times 640\text{ мм}$ , для расчета № 2 из 20 конечных элементов каждый размером  $320 \times 320\text{ мм}$ , и т.д. Каждый последующий расчет получался путем увеличения в 2 раза в направлении  $x$  и  $y$  количества конечных элементов.

На рис. 6 показана дискретизация (разбиение) на конечные элементы для трех расчетов.

На рис. 7а приведена дискретизация (разбиение) расчетной области на конечные элементы для расчета № 4 с указанием размеров модели. Рисунки для расчетов № 5–№ 8 не приведены.

В качестве конечного элемента использовался восьмиузловой изопараметрический конечный элемент [4, 5]. Расчеты производились на удаленном сервере по сети Интернет [7].

На рис. 7б приведено температурное поле для расчета № 9 (промежуточный расчет с неравномерной конечно-элементной сетью). В качестве контрольного значения принята температура внутреннего угла в точке А.

Результаты расчета представлены в табл. 1.

Как видно из табл. 1, абсолютная погрешность расчета контрольной температуры уменьшается с увеличением количества конечных элементов, что свидетельствует о корректности проведенных расчетов. Также уменьшается значение  $\Delta f_{Rsi}$  в расчете № 4 ( $\Delta f_{Rsi} = 0,005\Delta$ ). Значит, этот и последующие расчеты проведены корректно (Условие 1 по EN ISO 10211) [8, 9].

Погрешность тепловых потоков при измельчении в 2 раза уже в расчете 3 менее 1 %. Это значит, что все последующие расчеты после № 3 корректные (Условие 2 по EN ISO 10211).

Погрешность входящих и выходящих тепловых потоков в табл. 1 не приведена, так как для всех расчетов она значительно меньше 0,01 % (Условие 3 по EN ISO 10211).

Корректным также является расчет с неравномерной конечно-элементной сетью при меньшем количестве конечных элементов.

При решении данной задачи корректным следует считать расчет № 4 и все последующие, так как именно в этих расчетах выполняются все три условия.

Таблица 1

№ расчета	Количество КЭ в области $640 \times 640\text{ мм}$ , $n \times n$	Максимальное искажение температуры, $^{\circ}\text{C}$	Температура в точке А	Температурный коэффициент $f_{Rsi}$ в точке А	Изменение температурного коэффициента $\Delta f_{Rsi}$	Количество КЭ	Входящий тепловой поток $Q$ , Вт	Приведенное сопротивление теплопередачи $R_p$ ( $\text{M}^2 \cdot ^{\circ}\text{C} / \text{Вт}$ )	Изменение теплового $dQ$ , %	Погрешность температуры в точке А, $dt$ , $^{\circ}\text{C}$ *
1	1	27,96	8,89	0,778		5	14,41	0,888		0,81
2	2	11,07	9,01	0,78	0,002	20	14,26	0,897	1,0057	0,93
3	4	4,96	8,49	0,77	-0,01	80	14,2	0,901	0,4196	0,41
4	8	2,3	8,24	0,765	-0,005	320	14,18	0,903	0,1429	0,16
5	16	1,06	8,14	0,763	-0,002	1280	14,18	0,903	0,0434	0,06
6	32	0,47	8,1	0,762	-0,001	5120	14,17	0,903	0,0123	0,02
7	64	0,21	8,09	0,762	0	20480	14,17	0,903	0,0033	0,01
8	128	0,09	8,08	0,762	0	81920	14,17	0,903	0,0009	0
9	—	0,07	8,13	0,763	0	2972	14,17	0,903	-0,0027	0,05

\* при определении абсолютной погрешности в качестве точного решения принят расчет № 8

Искажения температуры контрольной точки в расчете № 4 составляют 2,3 °С. Однако, как показала практика расчета трехмерной модели, результаты будут корректными при искажениях от 0,6 до 1 °С. В этой связи критерием корректности расчета не может служить величина искажений температуры. Она необходима только для генерации рационально конечно-элементной сети.

**2. Рекомендации по выбору шага.** В используемых в настоящее время нормативных документах, для расчета ограждающих конструкций МКЭ рассматривается вопрос о корректности расчета всей ограждающей конструкции, включая внутренние точки только с точки зрения интегральных характеристик, таких как, например, входящий и выходящий тепловые потоки [9, 10].

Вопрос о погрешности расчета температурных полей для точек, не принадлежащих внутренней поверхности ограждающей конструкции, EN ISO 10211 не регламентирован.

В этой связи рекомендуется следующий алгоритм проведения расчета температурного поля и теплового потока через узел ограждающей конструкции с помощью программы «Temper-3d»:

1. Произвести расчет с автоматической дискретизацией на конечные элементы ограждающей конструкции, при этом в программе устанавливаются искажения 1,5 °С и убедиться, что погрешность входящих и выходящих потоков не превышает 0,01 %. Данный параметр указан в файле \*.pmn (Условие 3).

2. Произвести повторный расчет ограждающей конструкции, измельчив конечно-элементную сеть в 2 раза в по каждой координате. В случае трехмерного расчета количество конечных элементов увеличится в  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$  раз.

3. Сравнить значения тепловых потоков и убедиться, что при измельчении сети в два раза по каждой координатной оси изменение теплового потока не превышает 1 % (Условие 1).

4. Произвести расчет температурного коэффициента внутренней поверхности, используя в качестве расчетных узлов точки на внутренней поверхности. В этом случае отличие коэффициента не должно превышать 0,005 для любой точки, принадлежащей внутренней поверхности. Например, если температура внутреннего воздуха 20 °С, а наружного – 30 °С, то разница температур в точках на внутренней поверхности не должна превышать 0,25 °С при измельчении конечно-элементной сети в два раза по каждой координатной оси (Условие 2).

5. Если выполнены условия 1, 3 и 4, то результатами расчета можно воспользоваться, в противном случае необходима более мелкая дискретизация, для этого надо повторить все с пункта №1, при этом установив меньшее значение параметра искажения, например, 1 °С и так далее, пока не будут выполнены все три условия корректности. На рис. 8 приведена панель настройки для расчетов. С ее помощью можно установить требуемые искажения,

параметр измельчения и произвести дополнительное измельчение конечно-элементной сети для проведения контрольного расчета.

6. Считать расчет корректным, если искажения менее, например, 1 °С; не соответствует нормативным требованиям EN ISO 10211, этот параметр используется только для автоматической генерации рационально конечно-элементной сети.

#### Библиографический список

1. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
2. Лыков А. В. Тепломассообмен. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Энергия, 1978. 480 с.
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике: моногр. М.: Мир, 1975. 538 с.
4. Теплотехнические расчеты в «Temper-3d». URL: <http://www.temper3d.ru> (дата обращения: 01.02.2018).
5. Федоров С. В. Свидетельство об официальной регистрации программ «Temper-3d» для ЭВМ № 2006610359 // Реестр программ для ЭВМ. М.: ФИПС. № 2005613080 от 20.01.2006.
6. Федоров С. В. Алгоритм автоматической генерации конечно-элементной сети для теплотехнических расчетов // Информационный бюллетень Омского научно-образовательного центра ОмГТУ и ИМ СО РАН в области математики и информатики. 2017. Т. 1, № 1. С. 128 – 129.
7. Федоров С. В. Клиент-серверные расчеты по e-mail // Прикладная математика и фундаментальная информатика. 2016. № 3. С. 204 – 207.
8. Федоров С. В., Терехова И. А. оценка корректности теплотехнических расчетов ограждающих конструкций методом конечных элементов // Прикладная математика и фундаментальная информатика. 2017. Т. 4, № 1. С. 31 – 42.
9. EN ISO 10211:2007 Тепловые мостики в зданиях. Тепловые потоки и температура поверхности. Подробные расчеты. Авеню Marnix 17, В-1000 Брюссель, 2009. 64 с.
10. СП 50.13330.2012 Тепловая защита зданий (взамен СНиП 23-02-2003). Введ. 2013-07-01. М.: Госстрой России, 2013. URL: <http://docs.cntd.ru/document/1200095525> (дата обращения: 01.02.2018).

**ФЕДОРОВ Сергей Витальевич**, кандидат технических наук, доцент (Россия), доцент кафедры «Прикладная математика и фундаментальная информатика».

SPIN-код: 9085-8584, AuthorID (РИНЦ): 903562  
Адрес для переписки: [temper99@mail.ru](mailto:temper99@mail.ru)

#### Для цитирования

Федоров С. В. Снижения погрешностей при решении задач теплопроводности методом конечных элементов // Омский научный вестник. 2018. № 4 (160). С. 169–173. DOI: 10.25206/1813-8225-2018-160-169-173.

Статья поступила в редакцию 11.04.2018 г.

© С. В. Федоров