



# ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.2:004.421.5:004.7  
DOI: 10.25206/1813-8225-2018-160-156-160

В. Н. ЗАДОРОВЫЙ<sup>1</sup>  
Е. Б. ЮДИН<sup>2</sup>  
В. А. БАДРЫЗЛОВ<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Омский государственный  
технический университет,  
г. Омск

<sup>2</sup>Институт математики  
им. С. Л. Соболева СО РАН,  
Омский филиал,  
г. Омск

## РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТЕПЕНЕЙ ВЕРШИН В РАСТУЩИХ ГРАФАХ: МЕТОДЫ РАСЧЕТА С КОНТРОЛЕМ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Разрабатываются методы для расчета финальных распределений степеней вершин в растущих графах с нелинейным правилом предпочтительного связывания. Решается задача контроля погрешностей расчета. Для определения основных свойств рассчитываемых распределений выводятся их аналитические представления. Приводятся примеры расчета с контролем погрешностей.

**Ключевые слова:** случайные графы с нелинейным правилом предпочтительного связывания, распределение степеней связности вершин, численные методы.

*Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-60023 мол\_а\_дк.*

**1. Введение.** Математической основой науки о сетях (Network Science) является теория случайных графов. При этом классическая теория случайных графов Эрдёша–Реньи [1] практически не используется, поскольку не учитывает закономерностей роста сетей. Наиболее распространенными моделями растущих сетей являются графы предпочтительного связывания. Первая и наиболее популярная версия таких графов — это графы Барабаши–Альберт (графы БА), предложенные в работах [2–4], вызвавших взрывной рост числа публикаций о растущих сетях — см., например, [5–10]. В работах [11–15] для моделирования растущих сетей предлагаются графы с нелинейным правилом предпочтительного связывания (НППС) и разрабатываются методы расчета характеристик этих графов.

Граф с НППС выращивается из небольшого графа-затравки путем добавления к нему в моменты  $t = t_1, t_2, \dots$  очередного приращения графа — новой вершины с ограниченным случайным числом  $m$  исходящих из нее дуг. В данной статье, учитывая цели выполняемого исследования, мы будем считать число дуг  $u$  приращений графа фиксированным и равным  $m$ . Концы дуг приращения связываются со случайно выбираемыми вершинами графа. Вероятность  $p_i$  того, что дуга выберет для связи вершину  $i$ , пропорциональна весу  $f$  этой вершины, определяемому через ее степень связности  $k_i$ :

$$p_i = \frac{f(k_i)}{\sum_{j=1}^N f(k_j)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

где  $N$  — текущее число вершин в графе. Таким образом, случайный граф с НППС далее будет задаваться двумя параметрами — степенью  $m$  приращенный графа и весовой функцией  $f(k) \geq 0$ .

Кроме того, далее будем считать, что затравка графа состоит из  $m$  вершин. Добавляемые вершины будем нумеровать моментами  $i$  их поступления. Число  $N$  вершин в графе перед присоединением новой вершины всегда будет равно текущему времени  $t = i$  поступления этой вершины.

Одной из самых важных и распространенных характеристик растущего графа является финальное (определяемое при  $N \rightarrow \infty$ ) распределение степени связности (РСС)  $Q_k$  его вершин,  $k = 1, 2, \dots$ . Здесь  $Q_k$  — это вероятность того, что случайно (равновероятно) выбранная в бесконечном графе вершина будет иметь степень связности  $k$ . Задачей, решаемой в статье, является разработка для графов с НППС метода расчета РСС  $Q_k$  с контролем погрешностей.

**2. Постановка задачи.** В [15] найдено точное рекуррентное решение задачи определения РСС  $Q_k$  в графах с НППС:

$$Q_m = \frac{\langle f \rangle}{\langle f \rangle + mf_m}, \quad (2)$$

$$Q_k = \frac{mf_{k-1}}{\langle f \rangle + mf_k} Q_{k-1}, \quad k \geq m + 1, \quad (3)$$

где

$$\langle f \rangle = \sum_{k=m}^{\infty} f_k Q_k \quad (4)$$

— финальный средний вес вершин,  $f_k = f(k)$  — вес вершины со степенью  $k$ .

Решение (2)–(4) определено с точностью до среднего веса  $\langle f \rangle$ , т.е. представляет собой рекуррентное уравнение, которое при фиксированной весовой функции  $f(k)$  подлежит окончательному решению, дающему явное выражение РСС  $Q_k$  через  $k$ . Такое явное решение системы (2)–(4) легко выводится в случае линейной функции  $f(k)$ . Например, при  $f(k) = k$ , т.е. когда граф с НППС является графом БА, явное решение рекуррентной системы (2)–(4) имеет следующий вид:

$$Q_k = \frac{2m(m+1)}{k(k+1)(k+2)}, \quad k \geq m. \quad (5)$$

При этом  $\langle f \rangle = \langle k \rangle = 2m$ . Равенство  $\langle f \rangle = \langle k \rangle$  вытекает здесь из того, что  $f(k) = k$ , равенство  $\langle k \rangle = 2m$  вытекает из построения графа с НППС — оно справедливо при любой весовой функции  $f(k)$ , и в данном случае, естественно, совпадает со средним распределения (5). При весовой функции  $f(k) = 1$  система (2)–(4) имеет решение

$$Q_m = \frac{1}{1+m}, \quad Q_k = \frac{m}{1+m} Q_{k-1}, \quad k \geq m. \quad (6)$$

Аналогично нетрудно найти решение и для весовой функции  $f(k) = k + s$ , где  $s$  — константа.

К сожалению, для нелинейных рекуррентных уравнений (2)–(4), которые возникают в случае нелинейных весовых функций  $f(k)$ , отсутствуют аналитические методы решения. Поэтому для общего случая в [15] предложен численный метод решения системы (2)–(4), который можно назвать методом подбора параметра.

Метод заключается в следующем. Вначале по формулам (2)–(3), в которых вместо неизвестного  $\langle f \rangle$  используется произвольным образом заданный параметр  $a$  (например,  $a = 1$ ), рассчитывается соответствующее РСС  $Q_k$ . В [15] доказано, что сумма вероятностей  $Q_k$  при любом  $a > 0$  будет равна единице. Затем по полученному РСС вычисляются средняя степень  $\langle k \rangle = \sum_k k Q_k$  и средний вес  $\langle f \rangle = \sum_k f_k Q_k$ . После этого подбирается такое значение параметра  $a$ , при котором достигается равенство  $a = \langle f \rangle$ . Тем самым находится численное решение системы (2)–(4). Одновременно с параметром  $a$  определяется правильно рассчитанное РСС  $Q_k$ , а значение  $\langle k \rangle$ , вычисляемое через это РСС, становится равным  $2m$ . Можно вместо равенства  $a = \langle f \rangle$  потребовать достижения равенства  $\langle k \rangle = 2m$  — результат подбора параметра  $a$  будет точно таким же, и равенство  $a = \langle f \rangle$  выполнится автоматически.

**Пример 1.** Метод подбора параметра удобно реализовать в электронных таблицах. На рис. 1 показан пример расчета РСС  $Q_k$  при  $f(k) = \ln(k)$ .

В ячейке E7 электронной таблицы записана формула =LN(D7) для вычисления веса  $f(k) = \ln(k)$  вершины со степенью  $k$ ; формула скопирована на весь столбец, и, таким образом, веса в столбце рассчитаны до степени  $k = 10000$ . В ячейке F7 формула =D4/(D4+C2\*E7) соответствует формуле (2), т.е. вычисляет вероятность  $Q_m = Q_2$ . В ячейке D4 константа  $a$  первоначально была задана равной единице. В ячейке F8 записана формула =(\$C\$2\*E7\*F7/(\$D\$4+\$C\$2\*E8)), соответствующая формуле (3), т.е. вычисляющая  $Q_m + 1 = Q_3$ . Эта формула скопирована на весь столбец и, таким образом, в столбце вычислены все  $Q_k$  до  $k = 10000$ . Формула =СУММПРОИЗВ(E7:E10005;F7:F10005) в ячейке E4 вычисляет средний вес вершин и соответствует формуле (4). Первоначально, при  $a = 1$ , средний вес в ячейке E4 был равен 1,251416579 и не совпадал с  $a$ . В ячейке E1 записана формула =СУММПРОИЗВ(D7:D10005;F7:F10005), вычисляющая среднюю степень вершин. Первоначально, при  $a = 1$ , вычисленная в этой ячейке величина составляла 4,502833, т.е. не была равна  $2m = 4$ . И, наконец, в ячейке F4 формула =1000\*(D4-E4) показывает разность (увеличенную в 1000 раз) значений параметра  $a$  и среднего веса  $\langle f \rangle$ .

Используя сервис «Подбор параметра» или сервис «Поиск решения», мы даем команду подобрать такое значение параметра  $a$ , при котором содержимое ячейки F4 станет равным нулю. Эта команда выполняется за долю секунды и возникает картина, показанная на рис. 1. Параметр  $a$  становится равным  $\langle f \rangle$  и, следовательно, вероятности  $Q_k$ , вычисленные через параметр  $a$ , становятся вычисленными через значение  $\langle f \rangle$ . Следовательно, система (2)–(4) для весовой функции  $f(k) = \ln(k)$  здесь решена численно с высокой точностью. Это подтверждается также тем, что средняя степень, вычисленная в ячейке E1, становится равной  $2m$  (рис. 1).

Высокая точность полученного решения достигнута потому, что полученное РСС  $Q_k$  относится к распределениям с легким хвостом, вследствие чего вероятности  $Q_k$  с ростом  $k$  убывают очень быстро (см. рис. 1).

Сумма вероятностей  $Q_k$  в рассчитанном столбце равна 1,000 000 000 000 000 с 15-ю нулями после запятой. Значения среднего веса  $\langle f \rangle$  и средней степени  $\langle k \rangle$  рассчитываются также с точностью 15 значащих десятичных цифр, если

| D4               |   |   |          |                |                |   |   |   |   |
|------------------|---|---|----------|----------------|----------------|---|---|---|---|
| 1.17452918181768 |   |   |          |                |                |   |   |   |   |
|                  | A | B | C        | D              | E              | F | G | H | I |
| 1                |   |   | m        | <k> =          | 4.000000       |   |   |   |   |
| 2                |   |   | 2        |                |                |   |   |   |   |
| 3                |   |   | a        | <f>            |                |   |   |   |   |
| 4                |   |   | 1.174529 | 1.174529       | 0.000000       |   |   |   |   |
| 5                |   |   |          |                |                |   |   |   |   |
| 6                |   |   | k        | f <sub>k</sub> | Q <sub>k</sub> |   |   |   |   |
| 7                |   |   | 2        | 0.693147       | 0.458653       |   |   |   |   |
| 8                |   |   | 3        | 1.098612       | 0.188575       |   |   |   |   |
| 9                |   |   | 4        | 1.386294       | 0.104973       |   |   |   |   |
| 10               |   |   | 5        | 1.609438       | 0.066246       |   |   |   |   |
| 11               |   |   | 6        | 1.791759       | 0.044816       |   |   |   |   |
| 10002            |   |   | 9997     | 9.21004        | 4.7E-308       |   |   |   |   |
| 10003            |   |   | 9998     | 9.21014        | 4.4E-308       |   |   |   |   |
| 10004            |   |   | 9999     | 9.21024        | 4.2E-308       |   |   |   |   |
| 10005            |   |   | 10000    | 9.21034        | 3.9E-308       |   |   |   |   |
| 10006            |   |   |          |                |                |   |   |   |   |

Рис. 1. Расчет РСС  $Q_k$  в графе с НППС с весовой функцией  $f(k) = \ln(k)$ 

в ячейке F4 разность увеличить достаточно большим коэффициентом (например, в  $10^{12}$  раз).

**Пример 2.** Проблемы возникают, когда рассчитываемые РСС оказываются распределениями с тяжелыми хвостами. В качестве иллюстрации рассчитаем РСС  $Q_k$  для графа БА, т.е. при весовой функции  $f(k) = k$ . Выбор этой весовой функции позволит нам оценивать точность расчета РСС не только по отличию среднего веса  $\langle k \rangle$  от  $2m$ , но и путем сравнения получаемых численных решений с точным решением (5). При расчете  $Q_k$  для всех  $k \leq N = 10\,000$  методом подбора параметра погрешность, определяемая отклонением  $\langle k \rangle$  от  $2m = 4$ , еще заметна: получается значение параметра  $a = 3,999399$  и такое же значение принимает параметр  $\langle k \rangle$ .

С увеличением  $N$  погрешность уменьшается. При  $N = 40\,000$  мы получаем  $\langle f \rangle = \langle k \rangle = 3,999850$ , при  $N = 1000\,000$   $\langle f \rangle = \langle k \rangle = 3,999994$ , при  $N = 4000\,000$   $\langle f \rangle = \langle k \rangle = 3,999985 \approx 3,999999$  (для расчета таблиц с таким большим числом строк написана специальная программа). Таким образом, если бы мы не знали точного решения (5), то нам пришлось бы для получения шести точных значащих цифр обработать таблицу, содержащую несколько миллионов строк. В данном случае в таблице при 4 млн строк получено РСС  $Q_k$ , совпадающее с точным решением (5) с точностью до 5–7 значащих цифр. Например,  $Q_k$  при  $k = 3$  получилось равным  $0,2000000$ , при  $k = 1\,500\,000$  — равным  $3,555582 \cdot 10^{-18}$ . Соответствующие точные решения составляют  $0,2000000$  и  $3,555548 \cdot 10^{-18}$ . Заметим, что вершины со степенью  $k = 1\,500\,000$  начинают появляться в графе БА, когда общее число вершин графа приближается к  $1\,500\,000^2/3,05 \approx 7,4 \cdot 10^{11}$  [11]. Такие большие графы еще никто не выращивал. Но для того чтобы вероятность выбора вершины со степенью  $k = 1\,500\,000$  приблизилась к стационарной, граф должен увеличиться еще в тысячи раз.

**Пример 3.** Рассчитаем РСС графа с еще более быстро растущей весовой функцией  $f(k) = k^{1,1}$ , по-прежнему приняв  $m = 2$ . Постепенно увеличивая размер расчетной таблицы, мы получаем значения  $a = \langle f \rangle$ , которые при  $N = 10\,000$ ,  $40\,000$ ,  $1$  млн,  $4$  млн и  $8$  млн, составляют, соответственно,  $4,890514$ ,  $4,929545$ ,  $5,034715$ ,  $5,098913$  и  $5,137879$ . Расчет последнего значения выполняется персональным компьютером средней мощности в течение 30 минут. Но, тем не менее, если судить по изменению параметра  $a = \langle f \rangle$  с ростом  $N$ , то мы не можем быть уверены даже в том, что в пределе при  $N \rightarrow \infty$  сохранится первая цифра — цифра 5 — самого точного

из найденных приближений. Впрочем (в отличие от предыдущего примера), мы даже не знаем, существует ли в данном случае конечный средний вес  $\langle f \rangle$ .

**Задача о существовании конечного среднего веса вершин.** Определить путем численных расчетов, существует ли конечный предел у вычисляемых при разных  $N$  приближений среднего веса  $a = \langle f \rangle$ , далеко не всегда возможно. Но отвечать на этот вопрос перед расчетом РСС  $Q_k$  принципиально важно. Иначе, остановившись на каком-нибудь  $N$  и взяв полученное  $a = \langle f \rangle$  в качестве приближенного решения, мы будем допускать бесконечную погрешность, когда в действительности  $a = \langle f \rangle = \infty$ .

Поэтому задачей, решаемой в статье, является поиск аналитических методов, позволяющих для любой весовой функции  $f(k)$  определить, является ли финальный средний вес вершин графа с НППС конечным.

**3. Метод решения задачи о существовании конечного среднего веса.** В качестве аналитического метода для решения вопроса о конечности финального среднего веса  $a = \langle f \rangle$  предлагается использовать асимптотический анализ РСС вершин, основанный на приближенном аналитическом описании РСС, получаемом методом среднего поля (МСП) [2].

Используя МСП, выведем, например, приближенное аналитическое описание РСС вершин графа, выращиваемого при использовании весовой функции  $f(k) = k^\gamma$ . С учетом того, что число  $N$  вершин в графе всегда равно времени  $t$  поступления очередного приращения, выполним следующие предписываемые МСП шаги (которые имеют достаточно простую вероятностную интерпретацию, поэтому не комментируются).

1). Запишем для изменения во времени средней степени  $k_i$  вершины  $i$  вытекающее из (1) дифференциальное уравнение  $\frac{dk_i}{dt} = \frac{mk_i^\gamma}{at}$  и найдем его решение

$$\int \frac{dk_i}{mk_i^\gamma} = \int \frac{dt}{at} + C \quad \text{или} \quad \frac{1}{m} \frac{k_i^{1-\gamma}}{1-\gamma} = \frac{1}{a} \ln(t) + C,$$

$$\text{т.е.} \quad k_i = \left[ \frac{m(1-\gamma)}{a} \ln(t) + C_1 \right]^{\frac{1}{1-\gamma}}. \quad (7)$$

Константу  $C_1$  найдем из начального условия  $k_i(i) = m$ :

$$\left[ \frac{m(1-\gamma)}{a} \ln(i) + C_1 \right]^{\frac{1}{1-\gamma}} = m,$$

т.е. 
$$C_1 = m^{1-\gamma} - \frac{m(1-\gamma)}{a} \ln(i).$$

Подставляя  $C_1$  в (7), окончательно получаем

$$k_i = \left[ \frac{m(1-\gamma)}{a} \ln\left(\frac{t}{i}\right) + m^{1-\gamma} \right]^{\frac{1}{1-\gamma}}. \quad (8)$$

2). Используя (8), находим номер  $l$  такой вершины, степень которой равна  $k$ :

$$\left[ \frac{m(1-\gamma)}{a} \ln\left(\frac{t}{l}\right) + m^{1-\gamma} \right]^{\frac{1}{1-\gamma}} = k,$$

т.е. 
$$\frac{l}{t} = e^{-\frac{a}{m} \left( \frac{k^{1-\gamma} - m^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right)}. \quad (9)$$

3). Отсюда получаем выражение функции распределения (ф.р.) степени  $k$  вершины, случайно выбираемой в графе:

$$F(k) = \frac{t-l}{t} = 1 - e^{-\frac{a}{m} \left( \frac{k^{1-\gamma} - m^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right)}, \quad k \geq m. \quad (10)$$

4). РСС  $Q_k$  вершин находим как производную  $F'(k)$ :

$$\hat{Q}_k = F'(k) = \frac{a}{m} k^{-\gamma} e^{-\frac{a}{m} \left( \frac{k^{1-\gamma} - m^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right)}, \quad k \geq m. \quad (11)$$

Через  $\hat{Q}_k$  обозначена полученная приближенная оценка вероятности  $Q_k$ .

Применяя в сомнительных случаях представление РСС в виде ф.р. (10) или в виде распределения (11), можно определить математические ожидания (м.о.)  $\langle k \rangle$  и  $a = \langle t \rangle$  путем вычисления соответствующих интегралов. Поскольку выражения (10) и (11) приближенные, точные значения  $\langle k \rangle$  и  $\langle t \rangle$  при этом найдены не будут. Но, поскольку скорость уменьшения  $Q_k$  с ростом  $k$  (тяжесть хвоста) определяется выражениями (10) и (11) асимптотически точно, то и вопрос о конечности вычисляемых м.о. будет решен вычислением интегралов точно. Если мы получим конечное м.о.  $\langle t \rangle$ , то рассчитаем его с нужной точностью уже с помощью рекуррентных формул (2) – (4).

**Пример 4.** При весовой функции  $f(k) = k^\gamma$ , когда  $0 < \gamma < 1$ , в использовании выражений (10), (11) нет необходимости. Здесь асимптотическая скорость роста  $f(k)$  меньше, чем у функции  $f(k) = k$ : при любом  $c > 0$   $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{ck^\gamma}{k} = 0$ . Отсюда вытекает, что хвост распределения  $\hat{Q}_k$  здесь не тяжелее, чем при использовании весовой функции  $f(k) = k$ . Следовательно,  $\langle t \rangle$  конечно и мы можем вычислять  $\langle t \rangle$  с нужной точностью методом подбора параметра.

При  $\gamma = 1$  формула (11) после раскрытия неопределенности в выражении показателя степени сводится к виду  $\hat{Q}_k = \frac{2m^2}{k^3}$ , где учтено, что  $a = \langle k \rangle = 2m$ . На рис. 2 полученное приближение  $\hat{Q}_k$  сравнивается с точным РСС  $Q_k$ , рассчитанным по формулам (2) – (4). График построен для приближения  $\hat{Q}_k = c \frac{2m^2}{k^3}$ , где  $c = 1,50083$  — поправочный коэффициент. Коэффициент  $c$  не влияет на решение вопроса о конечности м.о.  $\langle t \rangle$ , но позволяет нагляднее

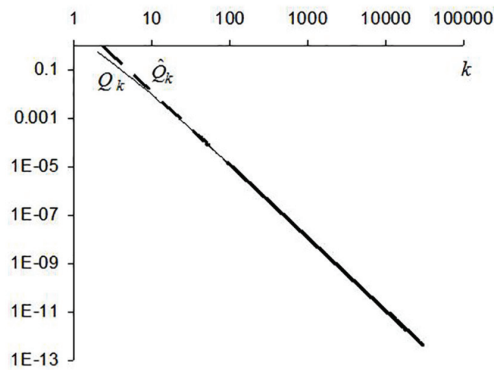


Рис. 2. Сравнение скоростей убывания вероятностей  $Q_k$  (тонкая линия) и  $\hat{Q}_k$  (прерывистая жирная линия) в графе с весовой функцией  $f(k) = k$  при  $m = 2$

показать одинаковую асимптотику скорости убывания вероятностей  $\hat{Q}_k$  и  $Q_k$ .

**Пример 5.** Для случая весовой функции  $f(k) = k^\gamma$  при  $\gamma > 1$  запишем, используя (10), выражение для м.о.  $\langle k \rangle$ :

$$\langle k \rangle = \int_0^\infty (1 - F(k)) dk = m + \int_2^\infty e^{-\frac{a}{m} \left( \frac{k^{1-\gamma} - m^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right)} dk.$$

Этот интеграл расходится к бесконечности при любом конечном  $a$ . В то же время в действительности  $\langle k \rangle$  конечно: по построению графа  $\langle k \rangle = 2m$ . Следовательно,  $a \rightarrow \infty$ . Поэтому, если мы в примере 3 остановим расчет при некотором сколь угодно большом  $N$  и примем полученное конечное  $a$  в качестве приближенного решения, то допустим бесконечную ошибку.

Итак, при использовании функции  $f(k) = k^{1.1}$  (пример 3)  $a = \infty$ , и, как вытекает из формул (2) – (4) при  $m = 2$ , в финальном РСС получаем  $Q_2 = 1$ , остальные  $Q_k$  все равны нулю. При  $\gamma = 1,5$  финальное РСС такое же, причем это становится очевидным даже при имитационном моделировании (непосредственном выращивании) графа размером всего 100 000 вершин.

**Пример 6.** При весовой функции  $f(k) = k \ln(k)$ , применяя МСП, получаем ф.р. степеней вершин

$$F(k) = 1 - \left( \frac{\ln k}{\ln m} \right)^{\frac{a}{m}} \quad \text{и, следовательно,} \quad \langle k \rangle = m + \int_m^\infty \left( \frac{\ln k}{\ln m} \right)^{\frac{a}{m}} dk.$$

Интеграл расходится к бесконечности при любом конечном  $a$ , следовательно,  $a \rightarrow \infty$ . Метод подбора параметра приведет к бесконечной погрешности.

**Пример 7.** При весовой функции  $f(k) = k^{0.9} \ln k$  МСП применить не удастся, так как решение исходного дифференциального уравнения не выражается в элементарных функциях. Но конечность среднего веса вытекает из того, что асимптотическая скорость возрастания весовой функции здесь меньше, чем у функции  $f(k) = k$ : при любом  $c > 0$   $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{ck^{0.9} \ln k}{k} = 0$ . При расчете  $\langle t \rangle$  методом подбора параметра получаем при  $N = 10\,000, 40\,000, 1\,млн, 4\,млн, 8\,млн$  приближения  $\langle t \rangle = 5,970803, 6,178251, 6,520930, 6,620860, 6,661795$  и, соответственно, приближения  $\langle k \rangle = 3,744160, 3,770692, 3,832100, 3,860479, 3,874862$ . Медленная сходимость объясняется тем,

что асимптотическая скорость роста  $f(k) = k^{0.9} \ln k$  становится меньше, чем у функции  $f(k) = k$ , при очень больших  $k$ : отношение  $\frac{k^{0.9} \ln k}{k} = \frac{\ln k}{k^{0.1}}$  становится меньше единицы лишь при  $k > 3,43 \cdot 10^{15}$ . Число  $N$  строк в расчетной таблице, при котором вес  $\langle f \rangle$  фиксируется с 6–7 значащими цифрами, будет еще на несколько порядков выше. То же самое можно сказать о размере  $N$  графа, при котором РСС  $Q_k$  приблизится к финальному. Можно сказать поэтому, что РСС вершин растущего графа или сети с такой весовой функцией при любых практически достижимых размерах будет находиться в состоянии переходного процесса.

И хотя мы пока не знаем, как рассчитать финальный средний вес вершин этого графа, но мы знаем, что этот вес конечный, и поэтому можем поставить перед собой задачу его расчета и, соответственно, расчета финального РСС вершин этого графа.

**Заключение.** В статье разработан метод расчета финальных РСС  $Q_k$  вершин графов с НППС, отличающийся от ранее разработанного в [15] метода эффективным контролем погрешностей расчета. Поскольку расчет РСС  $Q_k$  является базовой процедурой практически во всех применениях теории случайных графов с НППС, включая работы [11–14], разработанный в статье способ контроля погрешностей можно рассматривать как фундаментальный вклад в основы теории случайных графов с НППС.

#### Библиографический список

1. Erdos P., Renyi A. On the evolution of random graphs // Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences. 1960. Vol. 5. P. 17–61.
2. Barabasi A. L., Albert R. Emergence of scaling in random networks // Science. 1999. Vol. 286. P. 509–512. DOI: 10.1126/science.286.5439.509.
3. Barabasi A. L., Albert R. Statistical mechanics of complex networks // Reviews of Modern Physics. 2002. Vol. 74. P. 47–97. DOI: 10.1103/revmodphys.74.47.
4. Barabasi A. L. Scale-free networks: a decade and beyond // Science. 2009. Vol. 325. P. 412–413. DOI: 10.1126/science.1173299.
5. Amaral L. A. N., Scala A., Barthelemy M. [et al.]. Classes of small-world networks // Proc. Natl. Acad. Sci. 2000. Vol. 97. P. 11149. DOI: 10.1371/journal.pone.0031929.
6. Krapivsky P. L., Redner S. Organization of growing random networks // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 63. P. 066123. DOI: 10.1103/PhysRevE.63.066123.
7. Newman M. The structure of scientific collaboration networks // Proc. Natl. Acad. Sci. 2001. Vol. 98. P. 404–409. DOI: 10.1007/978-88-470-0665-2\_13.
8. Clauset A., Shalizi C. R., Newman M. Power-law distributions in empirical data // Rev. Mod. Phys. 2009. Vol. 81. P. 661–703. DOI: 10.1137/070710111.
9. Cohen R., Havlin S. Complex networks: structure, stability and function. Cambridge University Press. 2010. DOI: 10.1017/SVO9780511780356.

10. Jeong H., Neda Z., Barabasi A. L. Measuring preferential attachment in evolving networks // Europhysics Letters. 2003. Vol. 61. P. 567–572. DOI: 10.1209/epl/i2003-00166-9.

11. Задорожный В. Н., Юдин Е. Б. Структурные свойства безмасштабного графа Барабаша–Альберта // Автоматика и телемеханика. 2012. № 4. С. 131–150.

12. Zadorozhnyi V. N., Yudin E. B. Growing network: models following nonlinear preferential attachment rule // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2015. Vol. 428. P. 111–132. DOI: 10.1016/j.physa.2015.01.052.

13. Задорожный В. Н., Юдин Е. Б., Юдина М. Н. Распределение степеней в растущих графах, теряющих дуги // Омский научный вестник. 2017. № 5 (155). С. 159–163.

14. Zadorozhnyi V. N., Yudin E. B., Yudina M. N. Analytical and numerical methods of calibration for preferential attachment random graphs // 2017 International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON), Astana, Kazakhstan. 2017. P. 1–6. DOI: 10.1109/SIBCON.2017.7998461.

15. Задорожный В. Н. Случайные графы с нелинейным правилом предпочтительного связывания // Проблемы управления. 2010. № 6. С. 2–11.

**ЗАДОРЖНЫЙ Владимир Николаевич**, доктор технических наук, доцент, профессор кафедры «Автоматизированные системы обработки информации и управления».

SPIN-код: 3577-0466, AuthorID: 655365

ORCID: 0000-0003-3968-5329

AuthorID (SCOPUS): 36349587000

ResearcherID: J-4435-2014

Адрес для переписки: zwn2015@yandex.ru

**ЮДИН Евгений Борисович**, кандидат технических наук, старший научный сотрудник Омского филиала Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН.

SPIN-код: 9012-7874, AuthorID: 610564

ORCID: orci-dorg-0000-0002

AuthorID (SCOPUS): 5524814650

ResearcherID: N-9857-2015

Адрес для переписки: udinev@asoiu.com

**БАДРЫЗЛОВ Владимир Александрович**, аспирант кафедры «Автоматизированные системы обработки информации и управления».

SPIN-код: 8411-1487

AuthorID: 557902

Адрес для переписки: v\_bad@mail.ru

#### Для цитирования

Задорожный В. Н., Юдин Е. Б., Бадрызов В. А. Распределение степеней вершин в растущих графах: методы расчета с контролем погрешностей // Омский научный вестник. 2018. № 4 (160). С. 156–160. DOI: 10.25206/1813-8225-2018-160-156-160.

Статья поступила в редакцию 04.07.2018 г.

© В. Н. Задорожный, Е. Б. Юдин, В. А. Бадрызов