

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ С УЧЕТОМ ПАЗОВЫХ ГАРМОНИК В ИНДУКЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ И НЕИСПРАВНОСТЕЙ РАЗЛИЧНОГО ТИПА

В статье приводится математическая модель асинхронного двигателя, учитывающая возникновение пазовых гармоник в индукции магнитного поля в воздушном зазоре. Данная модель может использоваться при разработке методов спектр-токового анализа тока статора асинхронных двигателей. Получены результаты математического моделирования работы асинхронного двигателя малой мощности с наличием неисправностей различного типа. Сделан вывод о возможности применения спектр-токового анализа для определения частоты вращения ротора асинхронного двигателя при наличии в нем неисправностей.

**Ключевые слова:** асинхронный двигатель, математическая модель, воздушный зазор, дефекты двигателя, пазовые гармоники.

Для упрощения анализа работы асинхронного двигателя зачастую принимают допущение о синусоидальности распределения индукции магнитного поля в воздушном зазоре и, как следствие, синусоидальности ЭДС и токов в фазах ротора и статора [1]. Однако в реальной машине индукция в воздушном зазоре имеет несинусоидальное распределение ввиду наличия зубчатости магнитной системы, а также отклонений конструкции от идеальной симметрии, обусловленных дефектами изготовления и возникающими в процессе работы неисправностями [2].

При этом из-за наличия зубчатости ротора в токе статора возникают пазовые гармоники [3] на частоте:

$$f_{nr} = f_1 \left( R \frac{1-s}{p} \pm k \right), \quad (1)$$

где  $f_1$  — частота питания сети;  $p$  — число пар полюсов двигателя;  $R$  — число пазов ротора;  $s$  — скольжение;  $k$  — порядок гармоники, целое 1, 3, 5...

Наличие дефектов ротора, статора, механической системы двигателя также приводит к возникновению различных гармонических составляющих в токе статора [4, табл. 1].

В качестве математической модели, описывающей работу трехфазного асинхронного двигателя принята модель, выраженная через токи статора и ротора [5, 6].

В данной модели дополнительно учтено явление возникновения неравномерности распределения магнитного поля в воздушном зазоре путем задания пульсации коэффициента взаимной индуктивности между фазами статора и ротора в следующем виде:

$$L'_m(\omega, t) = L_m + A \sin(m \cdot \omega t), \quad (2)$$

где  $m$  — число пазов статора,  $\omega$  — угловая скорость вращения ротора,  $A$  — амплитуда пульсаций,  $L_m$  — среднее значение коэффициента взаимной индуктивности между фазами статора и ротора.

В таком случае коэффициент рассеяния  $\sigma$ , индуктивность статора  $L_1$  и ротора  $L_2$ , наибольшее значение взаимной индуктивности трехфазной обмотки  $L_{12}$ , коэффициенты магнитной связи ротора и статора трехфазной обмотки  $k_r$ ,  $k_s$  становятся функциями от времени и угловой скорости вращения ротора:

$$\sigma(\omega, t) = 1 - \frac{L_{12}^2(\omega, t)}{L_1(\omega, t) \cdot L_2(\omega, t)}; \quad (3)$$

$$L_1(\omega, t) = L_{12}(\omega, t) + L_{1\sigma}; \quad (4)$$

$$L_2(\omega, t) = L_{12}(\omega, t) + L_{2\sigma}; \quad (5)$$

$$L_{12}(\omega, t) = \frac{3}{2} L_m(\omega, t); \quad (6)$$

Амплитуды гармоник, обусловленных дефектами различного рода,  
для асинхронного двигателя типа АИРМ63В4У3

Вид дефекта	Амплитуда сигнала, вызванного дефектом, А	Частота гармоники, вызванной дефектом, Гц
Дефект ротора	0,1000	$f_b = (1 \pm 2ks)f_1$
Межвитковое замыкание	0,0010	$f_{sc} = f_1 \left( k \pm \frac{n}{p} (1-s) \right)$
Эксцентриситет воздушного зазора	0,0010	$f_{ag} = \left( (n_r R \pm n_d) \frac{1-s}{p} \pm n_{os} \right) f_1$
Точечные дефекты подшипника	0,0001	$f_{bearing} =  f_1 \pm kf_v $
Несоосность валов двигателя и нагрузки	0,0005	$f_m = f_1 \pm kf_l$
Повреждения ременной передачи	0,0005	$f_{str} = \pi f_{sk} \frac{D_{sk}}{L_{sk}}$
Повреждения приводимого оборудования	0,0005	$f_i = f_1 \pm kf_i N_i$
Ослабление крепления на фундаменте	0,0005	$f_r = f_1 \pm k \frac{f_r}{2}$

$$k_r(\omega, t) = \frac{L_{12}(\omega, t)}{L_2(\omega, t)}; \quad (7)$$

$$k_s(\omega, t) = \frac{L_{12}(\omega, t)}{L_2(\omega, t)}, \quad (8)$$

где  $L_{1\sigma}$  — индуктивность рассеяния фазы статора,  $L_{2\sigma}$  — индуктивность рассеяния фазы ротора.

В этом случае система уравнений для трехфазного асинхронного двигателя примет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{di_{1a}(t)}{dt} = \frac{1}{\sigma(\omega, t)L_1(\omega, t)} \left( u_{1a}(t) - i_{1a}(t) \times \right. \\ \left. \times R_1 + k_r(\omega, t) \cdot e_a''(\omega, t) \right); \\ \frac{di_{1b}(t)}{dt} = \frac{1}{\sigma(\omega, t)L_1(\omega, t)} \left( u_{1b}(t) - i_{1b}(t) \times \right. \\ \left. \times R_1 + k_r(\omega, t) \cdot e_b''(\omega, t) \right); \\ \frac{di_{1c}(t)}{dt} = \frac{1}{\sigma(\omega, t)L_1(\omega, t)} \left( u_{1c}(t) - i_{1c}(t) \times \right. \\ \left. \times R_1 + k_r(\omega, t) \cdot e_c''(\omega, t) \right); \\ \frac{di'_{2a}(t)}{dt} = -\frac{1}{\sigma(\omega, t)L_2(\omega, t)} \left( k_s(\omega, t) \cdot (u_{1a}(t) - \right. \\ \left. - i_{1a}(t) \cdot R_1) + e_a''(\omega, t) \right); \\ \frac{di'_{2b}(t)}{dt} = -\frac{1}{\sigma(\omega, t)L_2(\omega, t)} \left( k_s(\omega, t) \cdot (u_{1b}(t) - \right. \\ \left. - i_{1b}(t) \cdot R_1) + e_b''(\omega, t) \right); \\ \frac{di'_{2c}(t)}{dt} = -\frac{1}{\sigma(\omega, t)L_2(\omega, t)} \left( k_s(\omega, t) \cdot (u_{1c}(t) - \right. \\ \left. - i_{1c}(t) \cdot R_1) + e_c''(\omega, t) \right); \\ \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{1}{J} (M - |M_c| \cdot \text{sign}(\omega(t))) \end{cases} \quad (9)$$

где  $i_{1a}, i_{1b}, i_{1c}$  — фазные токи статора;  $u_{1a}, u_{1b}, u_{1c}$  — фазные напряжения статора;  $R_1$  — активное сопротивление фазы статора;  $M_c$  — момент сопротивления на валу двигателя;  $J$  — момент инерции двигателя;  $M$  — электромагнитный момент двигателя;  $e_a'', e_b'', e_c''$  — приведенные к статору э.д.с., индуцируемые потокосцеплением ротора:

$$e_a''(\omega, t) = i'_{2a}(t) \cdot R'_2 + \omega_{\text{за}}(L_{12}(\omega, t) \cdot i_{1cb}(t) + L_2(\omega, t) \cdot i_{2cb}(t)); \quad (10)$$

$$e_b''(\omega, t) = i'_{2b}(t) \cdot R'_2 + \omega_{\text{за}}(L_{12}(\omega, t) \cdot i_{1ac}(t) + L_2(\omega, t) \cdot i_{2ac}(t)); \quad (11)$$

$$e_c''(\omega, t) = i'_{2c}(t) \cdot R'_2 + \omega_{\text{за}}(L_{12}(\omega, t) \cdot i_{1ba}(t) + L_2(\omega, t) \cdot i_{2ba}(t)), \quad (12)$$

где  $i'_{2a}, i'_{2b}, i'_{2c}$  — приведенные к статору токи ротора по ортогональным осям фаз;  $R'_2$  — активное сопротивление приведенного ротора;  $\omega_{\text{за}} = \omega p$  — электрическая угловая скорость вращения ротора;  $p$  — число пар полюсов;  $i_{1cb}, i_{1ac}, i_{1ba}$  — токи по осям, ортогональным фазам статора:

$$i_{1cb}(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} (i_{1b}(t) - i_{1c}(t)); \quad (13)$$

$$i_{1ac}(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} (i_{1c}(t) - i_{1a}(t)); \quad (14)$$

$$i_{1ba}(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} (i_{1a}(t) - i_{1b}(t)); \quad (15)$$

$i_{2cb}, i_{2ac}, i_{2ba}$  — токи по осям, ортогональным фазам ротора:

$$i_{2cb}(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}(i_{2b}(t) - i_{2c}(t)); \quad (16)$$

$$i_{2ac}(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}(i_{2c}(t) - i_{2a}(t)); \quad (17)$$

$$i_{2ba}(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}(i_{2a}(t) - i_{2b}(t)). \quad (18)$$

Численное решение системы уравнений (9) можно получить в одном из пакетов прикладных программ, предназначенных для математических расчетов. В данной работе был выбран *Matlab* с графической средой симуляции динамических систем *Simulink*. Данная комбинация позволяет произвести автоматизацию выполнения расчетов с помощью написания специальных скриптов. Расчет системы дифференциальных уравнений выполнен для асинхронного двигателя типа АИРМ63В4У3 при синусоидальном симметричном напряжении сети. Данный двигатель имеет следующие параметры:  $P_n = 750$  Вт,  $R_1 = 11,9$  Ом,  $R'_2 = 13,3$  Ом,  $L_{1\sigma} = 0,026$  Гн,  $L'_{2\sigma} = 0,02$  Гн,  $L_m = 0,499$  Гн, число пазов ротора  $R = 30$  шт.

Исследуем ток одной из фаз двигателя. Для этого выполним вычисление спектра тока статора с помощью быстрого преобразования Фурье. С целью ослабления влияния эффекта Гиббса на исследуемый сигнал накладывалась весовая функция Хэмминга. На рис. 1 показан спектр фазы *a* статора моделируемого двигателя. В спектре тока видно три частотных пика — первый пик обусловлен главной гармоникой тока, два других — пазовые гармоники тока. Их частота совпадает с частотами, вычисленными по формуле (1) и реально наблюдаемыми в двигателе. В двух других фазах двигателя в спектре тока будет наблюдаться аналогичная картина.

Наличие двух боковых гармоник в спектре тока статора с частотой, связанной с частотой вращения ротора, подробно объясняется в [7] и описывается процессами амплитудной модуляции тока статора.

Подобным же образом возможно исследование и других физических явлений в приведенной модели, ведущих к возникновению неравномерности распределения магнитной индукции в воздушном зазоре: дефектов ротора, дефектов статора, эксцентриситета ротора, дефектов подшипников и присоединенных механизмов. При этом соблюдается принцип суперпозиции: гармоники, вызванные отдельными дефектами, не влияют друг на друга в случае присутствия нескольких дефектов, что наблюдается и при экспериментальных исследованиях [8], в рамках которых были выявлены амплитуды гармонических составляющих в сигнале тока, обусловленные различными видами дефектов.

Амплитуды и частоты гармоник, обусловленных дефектами, влияние которых на сигнал тока было исследовано с применением математической модели (9), сведены в табл. 1.

При моделировании приняты следующие допущения:

- модель имитирует только первые гармоники ( $k = 1$ ) сигналов, так как именно первые гармоники имеют наибольшую амплитуду и, следовательно, наиболее различимы на уровне общих шумов тока статора двигателя;

- двигатель работает в номинальном режиме без перегрузки.

Расчетный спектр тока статора асинхронного двигателя АИРМ63В4У3 при наличии дефектов, указанных в табл. 1, приведен на рис. 2.

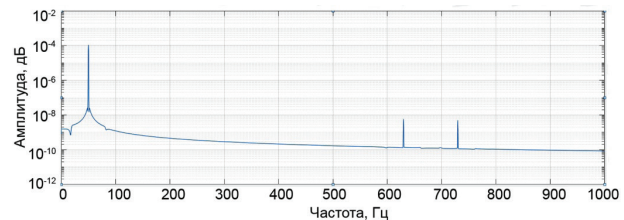


Рис. 1. Результат математического моделирования работы асинхронного двигателя АИРМ63В4У3 с учетом пазовых гармоник и без учета возможных неисправностей

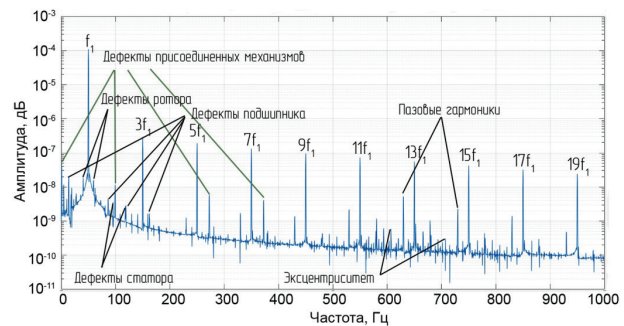


Рис. 2. Результат математического моделирования работы асинхронного двигателя АИРМ63В4У3 с учетом пазовых гармоник и заданных неисправностей

Анализ полученных результатов позволил сделать следующие **выводы**:

- построенная математическая модель может быть использована для получения характеристических картин спектра тока статора при наличии дефектов асинхронного двигателя;

- частоты гармоник, вызванные различными дефектами, могут совпадать, поэтому возможны ситуации, когда один тип дефекта сложно отличить от другого. В этом случае требуется анализ по вторым и третьим гармоникам сигнала;

- неисправности асинхронных двигателей не влияют на расположение пазовых гармоник на частотной оси спектра и, следовательно, не искажают вычисленную частоту вращения ротора. Однако они вносят дополнительные спектральные составляющие в диапазон расположения пазовых гармоник, которые могут влиять на работу алгоритмов расчета частоты вращения двигателя.

Эту проблему можно преодолеть, используя специальные методы выделения пазовых гармоник из спектра сигнала [9–10].

#### Библиографический список

1. Вольдек А. И., Попов В. В. Электрические машины. Машины переменного тока. 1-е изд. СПб.: Питер, 2010. 349 с. ISBN 978-5-469-01381-5.
2. Копылов И. П. Проектирование электрических машин / отв. ред. И. П. Копылов. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Юрайт, 2017. 767 с. ISBN 978-5-9916-1848-9.
3. Hurst K. D., Habetler T. G. Sensorless speed measurement using current harmonic spectral estimation in induction machine drives // IEEE Transactions on Power Electronics. 1996. Vol. 11. P. 66–73. DOI: 10.1109/PESC.1994.349756.
4. Барков А. В., Баркова Н. А., Борисов А. А. [и др.]. Методика диагностирования механизмов с электроприводом по

потребляемому току. СПб.: Спектр, 2012. 67 с. ISBN 978-5-914-98-028-0.

5. Фираго Б. И., Павлячик Л. Б. Регулируемые электроприводы переменного тока. Минск: Техноперспектива, 2006. 363 с. ISBN 985-6591-37-6.

6. Харламов В. В., Попов Д. И., Литвинов А. В. Совершенствование технологии испытаний асинхронных тяговых двигателей локомотивов: моногр. Омск, 2016. 160 с. ISBN 978-5-949-41144-5.

7. Скляр А. В. Модель пазовых гармоник тока статора как амплитудно-модулированное колебание // Динамика систем, механизмов и машин. 2016. Т. 3, № 1. С. 159–163.

8. Скляр А. В. О влиянии дефектов электромагнитной системы асинхронного двигателя на пазовые гармоники статорного тока // Омский научный вестник. 2016. № 4 (148). С. 109–115.

9. Скляр А. В., Чижма С. Н., Елизаров Д. А. Алгоритм выделения пазовых гармоник по спектру сигнала тока статора асинхронного двигателя // Омский научный вестник. 2016. № 4 (148). С. 70–75.

10. Hurst K. D., Habetler T. G. A comparison of spectrum estimation techniques for sensorless speed detection in induction machines // IEEE Transactions on Industrial Applications. 1997. Vol. 33, no. 4. P. 898–905.

**ХАРЛАМОВ Виктор Васильевич**, доктор технических наук, профессор (Россия), заведующий кафедрой «Электрические машины и общая электротехника».

SPIN-код: 5093-8463

AuthorID (РИНЦ): 465264

ORCID: 0000-0003-3621-3377

AuthorID (SCOPUS): 7006332004

**СКЛЯР Андрей Владимирович**, аспирант кафедры «Электрические машины и общая электротехника».

**ПОПОВ Денис Игоревич**, кандидат технических наук, доцент (Россия), доцент кафедры «Электрические машины и общая электротехника».

SPIN-код: 8506-9250

AuthorID (РИНЦ): 657177

ORCID: 0000-0001-9519-1062

AuthorID (SCOPUS): 57200090858

**ЕРОШЕНКО Александра Викторовна**, кандидат технических наук, доцент (Россия), доцент кафедры «Информатика, прикладная математика и механика».

SPIN-код: 5015-5688

AuthorID (РИНЦ): 674458

Адрес для переписки: emoe@omgups.ru

#### Для цитирования

Харламов В. В., Скляр А. В., Попов Д. И., Ерошенко А. В. Математическая модель асинхронного двигателя с учетом пазовых гармоник в индукции магнитного поля и неисправностей различного типа // Омский научный вестник. 2018. № 4 (160). С. 55–58. DOI: 10.25206/1813-8225-2018-160-55-58.

Статья поступила в редакцию 13.04.2018 г.

© В. В. Харламов, А. В. Скляр, Д. И. Попов, А. В. Ерошенко